



NÁRODNÝ ÚSTAV CERTIFIKOVANÝCH
MERANÍ VZDELÁVANIA

Maturitná skúška 2015

Správa o výsledkoch riadneho termínu externej časti maturitnej skúšky z matematiky

PhDr. Michal Hajdúk
Mgr. Pavol Kelecsényi
RNDr. Viera Ringlerová, PhD.

Bratislava 2015

OBSAH

ÚVOD	4
1 CHARAKTERISTIKA TESTU RT EČ MS Z MATEMATIKY A TESTOVANÍ ŽIACI.....	5
1.1 Charakteristika testu EČ MS z matematiky	5
1.2 Testovaní žiaci	6
2 VÝSLEDKY RT EČ MS Z MATEMATIKY PODĽA VYHODNOTENIA CTT	10
2.1 Všeobecné výsledky	10
2.2 Rozdiely vo výsledkoch	13
3 VÝSLEDKY POLOŽIEK TESTU RT EČ MS Z MATEMATIKY PODĽA CTT	27
3.1 Porovnanie variantov testu	27
3.2 Obťažnosť položiek	27
3.2.1 Obťažnosť položiek podľa tematického celku	28
3.2.2 Obťažnosť položiek podľa náročnosti myšlienkovej operácie	33
3.2.3 Obťažnosť položiek podľa druhu školy	33
3.2.4 Obťažnosť položiek podľa pohlavia	34
3.3 Korelácia položiek so zvyškom testu	35
3.4 Distribúcia úspešností a citlivosť položiek	36
3.5 Neriešenosť položiek	37
3.6 Súhrnné charakteristiky položiek	39
4 VÝSLEDKY RT EČ MS Z MATEMATIKY PODĽA VYHODNOTENIA IRT	41
5 VYHODNOTENIE POLOŽIEK TESTU RT EČ MS Z MATEMATIKY	44
ZÁVER	135
LITERATÚRA.....	137
PRÍLOHA – VYSVETLENIE NIEKTORÝCH POUŽITÝCH POJMOV	139
ZADANIA ÚLOH TESTU MAT15 – 1203	146

Vysvetlivky

MS	– maturitná skúška
EČ MS	– externá časť maturitnej skúšky
RT EČ MS	– riadny termín externej časti maturitnej skúšky
GYM	– gymnáziá
SOŠ	– stredné odborné školy
ÚKO	– úloha s krátkou odpoveďou (otvorená), hodnotí sa výsledok riešenia
ÚVO	– úloha s výberom odpovede (uzavretá) z piatich možností
BA	– Bratislavský kraj
TT	– Trnavský kraj
TN	– Trenčiansky kraj
NR	– Nitriansky kraj
ZA	– Žilinský kraj
BB	– Banskobystrický kraj
PO	– Prešovský kraj
KE	– Košický kraj
N	– veľkosť štatistického súboru, počet žiakov
<i>P. Bis.</i>	– Point Biserial, parameter medzipoložkovej korelácie
<i>r</i>	– korelačný koeficient, koeficient vecnej významnosti (signifikancie)
CTT	– klasická teória testovania (Classical Test Theory)
IRT	– teória odpovede na položku (Item Response Theory)
MAT15	– označenie testu z matematiky pre RT EČ MS v roku 2015
položka (testová)	– príklad, úloha, otázka v teste určená na riešenie a hodnotená (0, 1) v hrubom skóre

Úvod

Dňa 19. marca 2015 sa konal RT EČ MS z matematiky.

Cieľom EČ MS je porovnať a zhodnotiť vedomosti a zručnosti maturantov pomocou jednotného testovacieho nástroja. Vysoká objektivita a validita skúšky zaručujú prostredníctvom percentilu porovnateľnosť výsledkov všetkých žiakov z celého Slovenska, ktorí konali skúšku v rovnakom termíne a riešili rovnaké úlohy.

Správa dokladuje korektnosť a exaktnosť RT EČ MS z matematiky a spracovania jej výsledkov.

V prvej časti správy opisujeme vstupy, uvádzame charakteristiky testu a kvantifikujeme štatistický súbor obsahujúci žiakov maturujúcich z matematiky v RT EČ MS 2015. Údaje o počte žiakov sú členené z hľadiska územného, zriaďovateľa školy, charakteristík školy, pohlavia, známky, dĺžky, formy a odboru štúdia.

V ďalšej časti prezentujeme kvalitatívne znaky testu a možné faktory rozdielnosti výkonov žiakov v RT EČ MS prostredníctvom štatistických výsledkov spracovaných podľa vybraných triediacich znakov CTT metódou.

V tretej časti prinášame výsledky štatistických meraní jednotlivých položiek testu vypracovaných CTT metódou. Opisujeme obťažnosť položiek podľa tematických celkov, náročnosti myšlienkovej operácie potrebnej na vyriešenie položky, druhu školy a pohlavia, koreláciu obťažnosti položiek so zvyškom testu, rozlišovaciu silu a stupeň neriešenosti položiek. Na konci tejto časti predkladáme súhrnné charakteristiky jednotlivých položiek. Vychádzame zo Záverečnej správy zo štatistického spracovania testu z matematiky (Ringlerová, V., 2015).

V nasledujúcej časti oboznamujeme s výsledkami vyhodnotenia testu a jednotlivých položiek IRT metódou. Hodnotíme obťažnosť a rozlišovaciu schopnosť položiek testu. Údaje čerpáme zo Správy zo štatistického vyhodnotenia maturitnej skúšky 2015 z predmetu Matematika (papierová + online forma) – Analýza prostredníctvom IRT (Hajdúk, M., 2015).

V piatej časti prinášame rozbor a vyhodnotenie jednotlivých položiek a testu ako celku.

V závere sumarizujeme štatistické zistenia smerované k hodnoteniu výkonov populačného ročníka a k overeniu meracieho nástroja, prípadne identifikujeme jeho slabiny v záujme budúceho skvalitnenia tvorby testov.

Stručné vysvetlenie niektorých odborných pojmov, štatistických postupov a vzťahov používaných v tejto správe uvádzame v prílohe.

Variant vyhodnoteného testu a Kľúč správnych odpovedí sú uverejnené na www.nucem.sk.

1 Charakteristika testu RT EČ MS z matematiky a testovaní žiaci

1.1 Charakteristika testu EČ MS z matematiky

Maturitnú skúšku legislatívne upravuje Zákon č. 245/2008 Z. z. o výchove a vzdelávaní (školský zákon) a o zmene a doplnení niektorých zákonov a Vyhláška Ministerstva školstva Slovenskej republiky č. 318/2008 Z. z. o ukončovaní štúdia na stredných školách v znení neskorších predpisov, podľa ktorých maturitnú skúšku z matematiky na jednej úrovni absolvovali iba žiaci, ktorí si matematiku zvolili ako voliteľný predmet (len žiaci gymnázií) alebo konali z matematiky dobrovoľnú MS.

Test EČ MS z matematiky bol zostavený ako porovnávací, rozlišujúci test relatívneho výkonu (norm-referenced NR test), s cieľom usporiadať všetkých maturujúcich žiakov (riešiacich jeden rovnaký test v jednom rovnakom termíne) do poradia podľa priradeného percentilu.

Položky testov, ktoré pripravil kolektív autorov, boli v predchádzajúcich školských rokoch zaradené do pilotného testovania na vybranej vzorke žiakov maturitného ročníka, pripravujúcich sa na maturitnú skúšku z matematiky. Okrem štatistických ukazovateľov jednotlivých položiek (obťažnosť, citlivosť, rozlišovacia schopnosť) sa vyhodnocovali aj reakcie žiakov na zrozumiteľnosť zadania a jednoznačnosť riešenia položiek. Paralelne prebiehala recenzia pilotovaných testov. Následne bola zostavená skupina 30 položiek pokrývajúcich čo najširší záber pojmov a zručností obsiahnutých v Cieľových požiadavkách na vedomosti a zručnosti maturantov z matematiky tak, že priemer obťažnosti vybraných položiek podľa výsledkov pilotných testovaní bol 50,0 % (priemerná úspešnosť žiakov v dobre zostavenom NR teste by podľa CTT mala dosiahnuť hodnotu z intervalu od 40 % do 60 %). Otvorené aj uzavreté položky testu boli zoradené do poradia od najľahších po najťažšie podľa klesajúcej obťažnosti nameranej v pilotných testovaniach.

Test RT EČ MS z matematiky bol určený maturantom všetkých druhov stredných škôl. Obsahoval 30 úloh, ktoré vychádzali z Cieľových požiadaviek na vedomosti a zručnosti maturantov z matematiky. Tematické celky Základy matematiky, Funkcie a Planimetria boli v teste zastúpené každý siedmimi úlohami, celok Stereometria piatimi úlohami a tematický celok Kombinatorika, pravdepodobnosť a štatistika štyrmi úlohami.

Prvých dvadsať úloh testu bolo otvorených s krátkou odpoveďou. Žiaci mali vypočítať výsledok úlohy a uviesť ho v tvare celého alebo desatinného čísla. Posledných desať úloh bolo uzavretých s výberom jednej správnej odpovede z piatich možností.

Podľa náročnosti myšlienkovej operácie, ktorú musel žiak zvládnuť na vyriešenie úlohy, boli položky v teste zaradené do nasledovných skupín kognitívnej náročnosti:

1. jednoduché – úlohy vyžadujúce jednoduché myšlienkové operácie (úlohy na reprodukciu a porozumenie) – overenie znalosti pojmov, porozumenie, priradovanie, zoradovanie, triedenie, porovnávanie, jednoduchá aplikácia,
2. zložitejšie – úlohy vyžadujúce zložitejšie myšlienkové operácie (úlohy na aplikáciu poznatkov) – analýza, syntéza, indukcia, dedukcia, vysvetľovanie, hodnotenie, dokazovanie, overovanie algoritmov riešenia úloh v kontextoch blízkych alebo podobných školskej praxi,
3. tvorivé – úlohy vyžadujúce tvorivý prístup (problémové úlohy) – tvorba hypotéz, zložitejšia aplikácia, riešenie problémových situácií, objavovanie nových myšlienok a vzťahov, tvorba produktívnych riešení a použitie poznatkov v neobvyklých a neznámych kontextoch.

Z hľadiska predpokladanej obťažnosti test obsahoval ľahké úlohy, stredne obťažné a náročné úlohy.

Úlohy testu bolo možné riešiť pomocou kalkulačky, ktorá umožňovala obvyklé operácie a výpočet hodnôt funkcií. Nebolo povolené používať kalkulačku, ktorá mala základné štatistické vybavenie, grafický displej, funkcie Graph, Graphic, Calc, Solve a programovateľnú kalkulačku. Žiaci mohli použiť prehľad základných matematických vzťahov uvedený na poslednom liste testu. V porovnaní s uplynulými rokmi zostal nezmenený, napriek tomu, že obsahoval aj vzťahy, ktoré podľa Cieľových požiadaviek na vedomosti a zručnosti maturantov z matematiky žiaci nemusia ovládať. Poznajú ich však z vyučovania matematiky a mohli ich využiť pri riešení niektorých príkladov v teste.

Žiaci mali na vyriešenie úloh testu 120 minút. Za každú správnu odpoveď získali 1 bod, bez ohľadu na obťažnosť úlohy, za nesprávnu alebo neuvedenú odpoveď získali 0 bodov.

Pripravené boli dva varianty testu, ktoré sa líšili poradím položiek a distraktorov. Zadania úloh testu boli preložené do maďarského jazyka pre žiakov škôl s vyučovacím jazykom maďarským. Zdravotne znevýhodnení žiaci riešili test s graficky upraveným zadaním úloh (veľkosť písma, riadkovanie). Test bol administrovaný formou papierového výtlačku alebo elektronicky systémom E-test. Výtlačok testu obsahoval dva bezpečnostné prvky (čiarový kód a úzky pásik geometrických vzorov, osobitý pre každý jednotlivý test). Prihlásenie do systému E-test a zobrazenie variantu testu na obrazovke počítača bolo možné po zadaní hesla, ktoré sa žiaci dozvedeli od administrátora testovania.

1.2 Testovaní žiaci

Test MAT15 riešilo 6 658 žiakov z 390 škôl, čo bolo 14,3 % všetkých maturujúcich žiakov.

Tab. 1 Počet škôl a žiakov podľa kraja a zriaďovateľa školy v MAT15

		Školy		Žiaci	
		počet	%	počet	%
Kraj	BA	54	13,8	915	13,7
	TT	34	8,7	550	8,3
	TN	36	9,2	628	9,4
	NR	43	11,0	720	10,8
	ZA	59	15,1	1 068	16,0
	BB	50	12,8	701	10,5
	PO	62	15,9	1 050	15,8
	KE	52	13,3	1 026	15,4
	spolu	390	100,0	6 658	100,0
Zriaďovateľ	štátne školy	300	76,9	5 807	87,2
	súkromné školy	38	9,7	192	2,9
	cirkevné školy	52	13,3	659	9,9
	spolu	390	100,0	6 658	100,0

Počet žiakov maturujúcich z matematiky v jednotlivých krajoch bol proporčný k celkovému počtu maturantov v jednotlivých krajoch. Rozdelenie žiakov do škôl podľa zriaďovateľa nebolo rovnomerné. Žiaci súkromných a cirkevných škôl tvorili iba 12,8 % z celkového počtu maturantov. V súkromných a cirkevných školách sa testovania zúčastnilo v priemere 9,5 žiakov v prepočte na školu, čo je oveľa menej ako v štátnych školách (priemerne 19,4 žiakov na školu), čo pravdepodobne súvisí s nižším počtom tried a žiakov v triedach v jednotlivých ročníkoch súkromných a cirkevných škôl.

Tab. 2 Počet škôl a žiakov podľa druhu školy, celkového počtu žiakov školy a počtu obyvateľov v sídle školy v MAT15

		Školy		Žiaci	
		počet	%	počet	%
Druh školy	GYM	226	57,9	4 843	72,7
	SOŠ	164	42,1	1 815	27,3
	spolu	390	100,0	6 658	100,0
Celkový počet žiakov školy	menej ako 300	163	41,8	1 488	22,3
	300 až 600	183	46,9	3 524	52,9
	viac ako 600	44	11,3	1 646	24,7
	spolu	390	100,0	6 658	100,0
Počet obyvateľov v sídle školy	menej ako 15 000	88	22,6	1 218	18,3
	viac ako 15 000	227	58,2	4 003	60,1
	Bratislava a Košice	75	19,2	1 437	21,6
	spolu	390	100,0	6 658	100,0

Z matematiky maturovalo 28,6 % všetkých maturujúcich žiakov GYM a 6,1 % všetkých maturujúcich žiakov SOŠ. Takmer tretina maturujúcich žiakov boli žiaci SOŠ, ktorí konali MS z matematiky ako dobrovoľný predmet. Možnosti prípravy žiakov GYM a SOŠ na MS nie sú porovnateľné, vyplývajú z rozdielneho počtu hodín matematiky v učebnom pláne a rozsahu učiva v tematických celkoch Štátneho vzdelávacieho programu pre GYM a SOŠ a tiež z možnosti výberu voliteľných predmetov v maturitnom ročníku. Obsah učiva predmetu matematika GYM ani SOŠ nepokrýva obsah učiva cieľových požiadaviek z matematiky, preto absolvovanie predmetu matematika nepostačuje ako príprava na MS z matematiky.

Tab. 3 Počet žiakov podľa pohlavia, známky z matematiky a vyučovacieho jazyka v MAT15

		Počet	%
Pohlavie	chlapci	4 514	67,8
	dievčatá	2 144	32,2
	spolu	6 658	100,0
Známka z matematiky	1	1 978	29,7
	2	1 896	28,5
	3	1 273	19,1
	4	389	5,8
	5	33	0,5
	neuvedená	1 089	16,4
	spolu	6 658	100,0
Vyučovací jazyk	slovenský jazyk	6 333	95,1
	maďarský jazyk	325	4,9
	spolu	6 658	100,0

MAT15 riešilo približne dvakrát viac chlapcov ako dievčat. Z matematiky maturovalo 19,9 % všetkých maturujúcich chlapcov a 9,0 % všetkých maturujúcich dievčat. Dvaja žiaci maturujúci papierovou formou a všetkých 1 087 žiakov maturujúcich elektronickou formou neuviedlo známku z predmetu, na ktorom sa najviac pripravovali na maturitu z matematiky. Prekvapivý je výber matematiky ako voliteľného maturitného predmetu 422 žiakmi (6,4 % všetkých maturantov z matematiky) hodnotenými známkou 4 a 5.

Tab. 4 Počet žiakov podľa variantu a formy administrácie testu v MAT15

		Počet	%
Variant	1203/1104	3 359	50,5
	1506/1707	3 299	49,5
	spolu	6 658	100,0
Forma administrácie	papierová	5 571	83,7
	elektronická	1 087	16,3
	spolu	6 658	100,0

Približne šestine maturantov z matematiky bol test administrovaný elektronicky prostredníctvom systému E-test.

Tab. 5 Počet žiakov podľa formy štúdia v MAT15

		Počet	%
Forma štúdia	denná	6 651	99,9
	externá	7	0,1
	spolu	6 658	100,0

Iba 0,1 % maturantov študovalo externe, všetci ostatní navštevovali dennú formu štúdia.

Tab. 6 Počet žiakov GYM podľa dĺžky štúdia v MAT15

		Počet	%
Dĺžka štúdia	4 roky	3 159	65,2
	5 rokov	252	5,2
	6 rokov	30	0,6
	8 rokov	1 402	28,9
	spolu	4 843	100,0

Takmer dve tretiny maturantov z GYM boli žiaci štvorročného štúdia.

Tab. 7 Počet žiakov SOŠ podľa hlavnej skupiny odboru štúdia a dosiahnutého vzdelania po ukončení štúdia v MAT15

		Počet	%
Hlavná skupina odboru štúdia	technické vedy a náuky I	915	50,4
	technické vedy a náuky II	548	30,2
	lesnícke a veterinárne vedy a náuky	1	0,1
	zdravotníctvo	1	0,1
	spoločenské vedy, náuky a služby I	326	18,0
	spoločenské vedy, náuky a služby II	21	1,2
	vedy a náuky o kultúre a umení	3	0,2
	spolu	1 815	100,0
Dosiahnuté vzdelanie po ukončení štúdia	Úplné stredné odborné s maturitou		
	• a výučným listom	8	0,5
	• bez výučného listu (nadstavba)	6	0,4
	• bez výučného listu	1 479	99,1
	spolu	1 493	100,0

Najpočetnejšou skupinou maturantov zo SOŠ boli žiaci odborov štúdia technických vied a náuk a žiaci, ktorí po ukončení štúdia dosiahnu úplné stredné odborné vzdelanie s maturitou bez výučného listu.

2 Výsledky RT EČ MS z matematiky podľa vyhodnotenia CTT

2.1 Všeobecné výsledky

V nasledujúcich tabuľkách a grafoch uvádzame kvalitatívne znaky testu a úspešnosti žiakov.

Tab. 8 Výsledné psychometrické charakteristiky testu MAT15

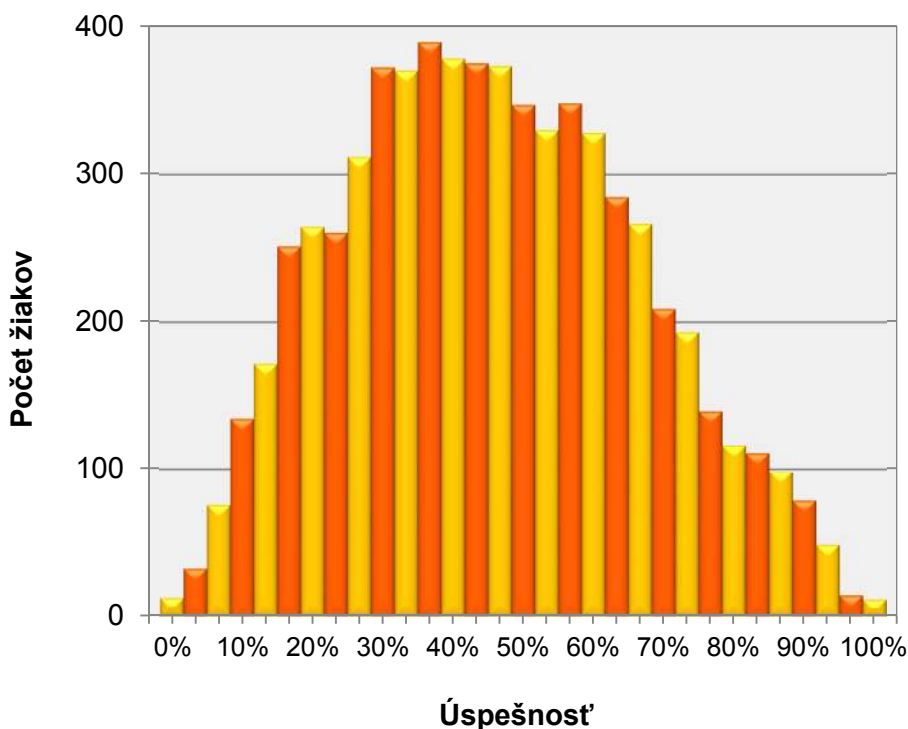
Počet testovaných žiakov	6 658
Minimum	0,0 %
Maximum	100,0 %
Priemer	45,7 %
Štandardná odchýlka	20,8 %
Intervalový odhad úspešnosti populácie – dolná hranica	4,9 %
Intervalový odhad úspešnosti populácie – horná hranica	86,5 %
Štandardná chyba priemernej úspešnosti	0,3 %
Interval spoľahlivosti pre priemernú úspešnosť – dolná hranica	45,1 %
Interval spoľahlivosti pre priemernú úspešnosť – horná hranica	46,3 %
Štandardná chyba merania pre úspešnosť	7,7 %
Intervalový odhad úspešnosti individuálneho žiaka – dolná hranica	30,6 %
Intervalový odhad úspešnosti individuálneho žiaka – horná hranica	60,8 %
Reliabilita – Cronbachovo alfa	0,86

Hodnota 45,7 % priemernej úspešnosti žiakov v teste MAT15 a tvar histogramu rozloženia početností percentuálnych úspešností žiakov, mierne vychýlený doľava, zodpovedajú normálnemu rozloženiu úrovne matematickej schopnosti v populácii a poukazujú na mierne vyššiu náročnosť testu pre testovaných žiakov a potvrdzujú, že úlohy testu MAT15 skutočne merali mieru matematickej schopnosti maturujúcich žiakov.

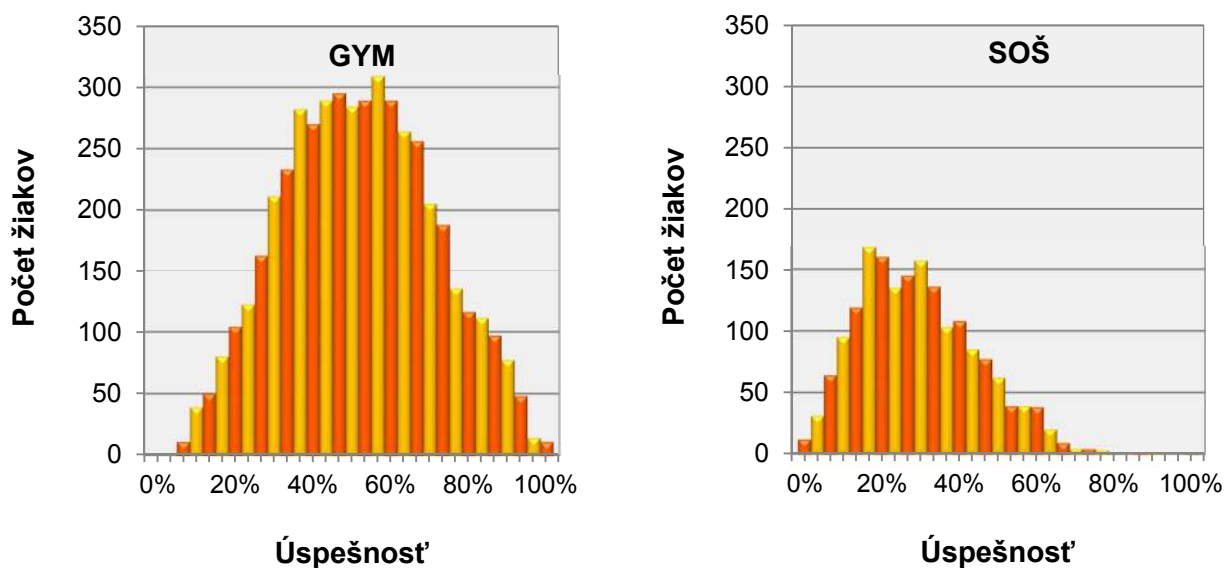
V ďalšej interpretácii nameranej hodnoty priemernej úspešnosti (národného priemeru) 45,7 % žiakov v NR teste však musíme byť opatrní. Záver, že maturanti testovaného ročníka ovládajú učivo stredoškolskej matematiky na 45,7 % nie je možné vyvodiť, pretože uvedená hodnota je výsledkom rozlišovacieho testu a nie testu absolútneho výkonu. Nízky počet položiek testu nie je postačujúci na preskúšanie celého obsahu Cieľových požiadaviek na vedomosti a zručnosti maturantov z matematiky v potrebnom rozsahu tak, aby každý dôležitý pojem alebo zručnosť boli v teste zastúpené samostatnou položkou.

Podobne opatrne treba interpretovať aj dosiahnutú úspešnosť jednotlivých žiakov v teste RT EČ MS z matematiky, napriek tomu, že úspešnosť žiaka vyjadrená percentom sa uvádza aj na maturitnom vysvedčení žiaka (rovnocenne so známku z ústnej formy internej časti MS).

Z ďalších údajov vyplýva, že približne dve tretiny maturantov z matematiky dosiahli úspešnosť v intervale od 24,9 % do 66,5 %. Podľa intervalového odhadu úspešnosti 95 % testovaných žiakov dosiahlo úspešnosť medzi 4,9 % a 86,5 %. Spôľahlivosť merania (reliabilita testu) určená hodnotou Cronbachovho alfa 0,86 je pre test s pomerne nízkym počtom tridsiatich položiek a pomerne vysokým zastúpením náročných položiek veľmi dobrá. Reliabilita nad 0,85 (niekedy nad 0,90) je postačujúca na vyvodenie záveru a prijatie rozhodnutia na základe jednej skúšky alebo testovania.



Obr. 1 Histogram rozloženia početností úspešností všetkých žiakov v MAT15



Obr. 2 Histogramy rozloženia početností úspešností žiakov GYM a SOŠ v MAT15

Tab. 9 Prepojenie úspešnosti a percentilu žiakov v MAT15

Počet bodov	Úspešnosť %	Percentil	Počet žiakov	Počet bodov	Úspešnosť %	Percentil	Počet žiakov
0	0,0	0,0	12				
1	3,3	0,2	32	16	53,3	61,5	330
2	6,7	0,7	75	17	56,7	66,5	348
3	10,0	1,8	134	18	60,0	71,7	328
4	13,3	3,8	171	19	63,3	76,6	284
5	16,7	6,3	251	20	66,7	80,8	266
6	20,0	10,1	264	21	70,0	84,8	209
7	23,3	14,0	260	22	73,3	87,9	192
8	26,7	17,9	312	23	76,7	90,8	139
9	30,0	22,6	372	24	80,0	92,9	116
10	33,3	28,2	370	25	83,3	94,6	111
11	36,7	33,7	389	26	86,7	96,3	98
12	40,0	39,5	378	27	90,0	97,7	78
13	43,3	45,2	375	28	93,3	98,9	48
14	46,7	50,8	373	29	96,7	99,6	14
15	50,0	56,3	347	30	100,0	99,8	11

V Tab. 9 sú uvedení aj žiaci konajúci opravnú MS v čase RT EČ MS.

Najúspešnejšiu skupinu žiakov, ktorí dosiahli úspešnosť 90,0 % a viac, tvorilo 151 žiakov, čo boli 2,3 % všetkých žiakov riešiacich test MAT15.

Menej úspešná polovica žiakov (percentil 50,0 a menej) dosiahla úspešnosť 43,3 % alebo menej a bola rozdelená do 14 skupín. Úspešnejšia polovica žiakov dosiahla úspešnosť 46,7 % a viac a rozdelila sa do 17 skupín. MAT15 teda veľmi mierne lepšie rozlíšil celkove úspešnejších žiakov ako žiakov menej úspešných, čo potvrdzuje aj tvar histogramu rozloženia početností úspešností žiakov na Obr. 1.

Histogram rozloženia početností úspešností žiakov GYM, v ktorom boli s výnimkou 202 žiakov konajúcich maturitnú skúšku z matematiky ako dobrovoľnú skúšku zaznamenané len úspešnosti 4 641 žiakov konajúcich MS z matematiky ako voliteľný predmet, mal ideálny tvar. Histogram rozloženia početností úspešností žiakov SOŠ, konajúcich MS z matematiky ako dobrovoľnú skúšku, bol značne vychýlený doľava.

Najnižšiu úspešnosť 0,0 % v MAT15 dosiahli 12 žiaci SOŠ, najvyššiu úspešnosť 100,0 % dosiahlo 11 žiakov GYM. Zo žiakov SOŠ úspešnosť 70,0 % a vyššiu dosiahlo iba 13 žiakov (0,7 % žiakov SOŠ maturujúcich z matematiky), z toho úspešnosť 70,0 % 4 žiaci, úspešnosť 73,3 % 4 žiaci, úspešnosť 76,7 % 3 žiaci, úspešnosť 86,7 % 1 žiak, úspešnosť 90,0 % 1 žiak.

Tab. 10 Rozdelenie žiakov s úspešnosťou 25,0 % a menej v MAT15

			chlapci		dievčatá		spolu	
			počet	%	počet	%	počet	%
Druh školy	GYM	voliteľne	227	19,1	162	13,6	389	32,7
		dobrovoľne	8	0,7	10	0,8	18	1,5
	SOŠ	dobrovoľne	591	49,6	193	16,2	784	65,8
spolu			826	69,4	365	30,6	1 191	100,0

Úspešnosť 25,0 % a menej v MAT15 dosiahlo 1 191 žiakov, čo bolo 17,9 % všetkých žiakov maturujúcich z matematiky. Z toho 389 žiakov GYM (8,0 % všetkých žiakov GYM riešiacich test MAT15), ktorí si vybrali matematiku ako ďalší voliteľný predmet, neúspešne vykonalo EČ MS z matematiky a museli opakovať EČ MS z matematiky, aby úspešne vykonali MS.

Tab. 11 Rozdelenie žiakov s úspešnosťou viac ako 25,0 % a zároveň menej alebo rovnou 33,0 % v MAT15

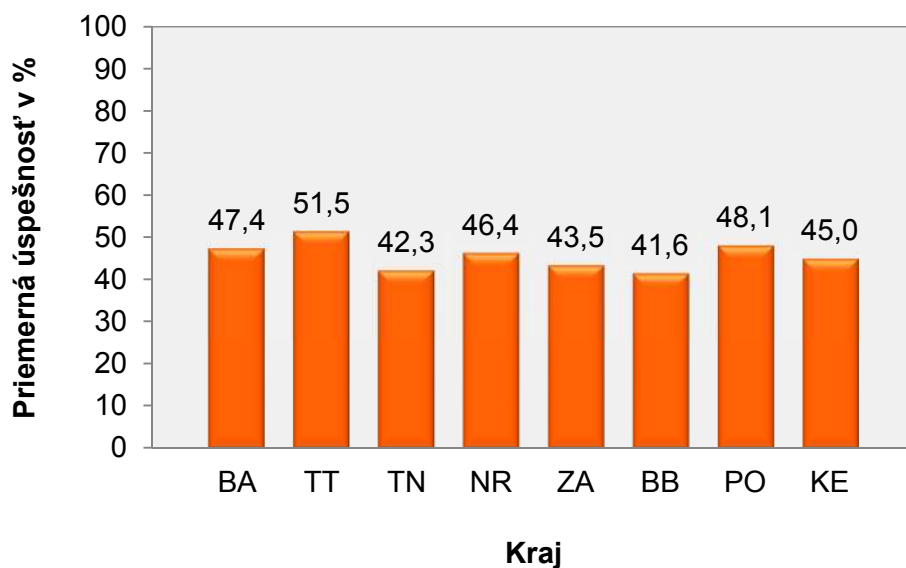
			chlapci		dievčatá		spolu	
			počet	%	počet	%	počet	%
Druh školy	GYM	voliteľne	208	30,8	152	22,5	360	53,3
		dobrovoľne	6	0,9	8	1,2	14	2,1
	SOŠ	dobrovoľne	266	39,3	36	5,3	302	44,7
spolu			480	71,0	196	29,0	676	100,0

Úspešnosť viac ako 25,0 % a zároveň menej alebo rovnú 33,0 % dosiahlo 360 žiakov GYM (208 chlapcov a 152 dievčat) maturujúcich z matematiky ako ďalšieho voliteľného predmetu, čo bolo 7,4 % všetkých maturujúcich žiakov GYM z matematiky. Úspešné vykonanie MS z matematiky u týchto žiakov bolo podmienené hodnotením ústnej formy internej časti MS známku nie horšou ako 3 (dobrý).

Žiak neúspešne vykoná EČ MS z matematiky ako dobrovoľného predmetu, ak v EČ MS získa 33,0 % a menej z celkového počtu bodov. Úspešnosť 33,0 % a menej v MAT15 dosiahli 0,7 % dobrovoľne maturujúcich žiakov GYM a 59,8 % maturujúcich žiakov SOŠ, čo bolo 16,8 % všetkých žiakov, ktorí sa zúčastnili RT EČ MS z matematiky. Výsledok dobrovoľnej MS sa však pri neúspešnom vykonaní nezapočítava do výsledku MS.

2.2 Rozdiely vo výsledkoch

V nasledujúcich tabuľkách a grafoch prezentujeme rozdiely v priemernej úspešnosti žiakov v MAT15 podľa jednotlivých kategórií a mieru ich vecnej významnosti.



Obr. 3 Priemerná úspešnosť žiakov v MAT15 podľa kraja

Priemerná úspešnosť žiakov najúspešnejšieho Trnavského kraja bola mierne vecne významne vyššia ako priemerná úspešnosť žiakov Banskobystrického a Trenčianskeho kraja. Medzi priemernými úspešnosťami žiakov ostatných krajov neboli vecne významné rozdiely.

Tab. 12 Porovnanie priemernej úspešnosti žiakov GYM podľa kraja a priemeru žiakov GYM v MAT15

		Priemer GYM = 51,8 %			
		Počet žiakov	Priemerná úspešnosť %	Štatistická významnosť	Vecná významnosť
GYM	BA	761	51,3	0,506	0,024
	TT	429	56,3	0,000	0,222
	TN	400	50,9	0,344	0,047
	NR	505	52,4	0,511	0,029
	ZA	757	48,8	0,000	0,162
	BB	486	49,0	0,000	0,159
	PO	752	54,4	0,001	0,124
	KE	753	52,0	0,788	0,010

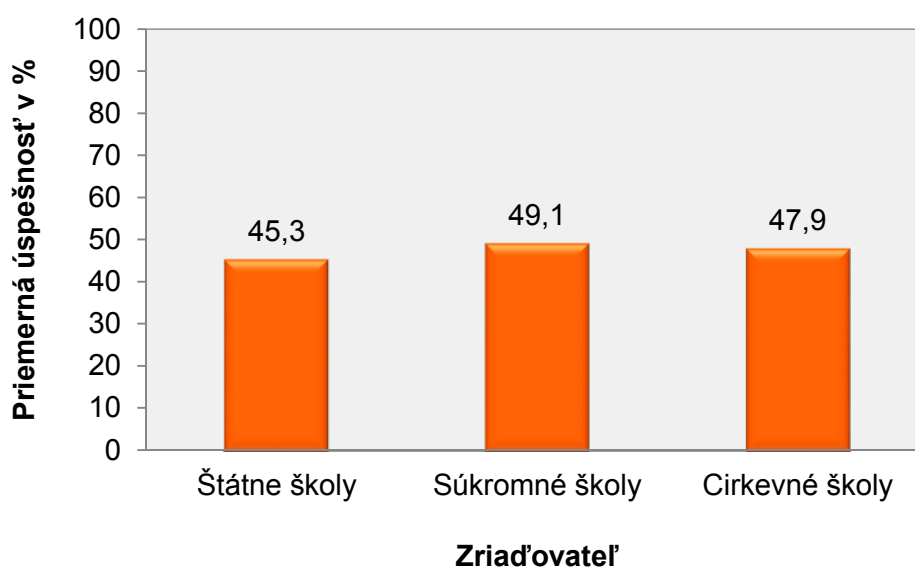
Rozdiely v priemerných úspešnostiach žiakov GYM podľa kraja neboli vecne významné. Priemerná úspešnosť žiakov GYM Trnavského kraja bola vyššia ako priemer žiakov GYM na úrovni miernej vecnej významnosti. Priemerné úspešnosti žiakov GYM ostatných krajov boli porovnateľné s priemerom žiakov GYM.

Tab. 13 Porovnanie priemernej úspešnosti žiakov SOŠ podľa kraja a priemeru žiakov SOŠ v MAT15

		Priemer SOŠ = 29,3 %			
		Počet žiakov	Priemerná úspešnosť %	Štatistická významnosť	Vecná významnosť
SOŠ	BA	154	27,8	0,192	0,105
	TT	121	34,7	0,001	0,308
	TN	228	27,1	0,015	0,161
	NR	215	32,4	0,002	0,206
	ZA	311	30,8	0,079	0,100
	BB	215	24,9	0,000	0,297
	PO	298	32,4	0,001	0,191
	KE	273	25,7	0,000	0,232

Rozdiely priemernej úspešnosti žiakov SOŠ Banskobystrického a Košického kraja a priemernej úspešnosti žiakov SOŠ Trnavského, Nitrianskeho a Prešovského kraja boli mierne vecne významné. Rozdiel priemernej úspešnosti žiakov SOŠ Trnavského kraja a priemernej úspešnosti žiakov SOŠ Bratislavského a Trenčianskeho kraja bol mierne vecne významný.

Priemerná úspešnosť žiakov SOŠ Trnavského kraja bola stredne vecne významne lepšia a priemerná úspešnosť žiakov SOŠ Nitrianskeho kraja bola mierne vecne významne lepšia ako priemer žiakov SOŠ. Priemerná úspešnosť žiakov SOŠ Banskobystrického a Košického kraja bola stredne vecne významne horšia ako priemer žiakov SOŠ.



Obr. 4 Priemerná úspešnosť žiakov v MAT15 podľa zriaďovateľa

Priemerné úspešnosti žiakov škôl rôznych zriaďovateľov boli porovnateľné. Analýza bola ovplyvnená veľmi nerovnomerným rozdelením počtu žiakov do jednotlivých skupín (Tab. 1).

Tab. 14 Porovnanie priemernej úspešnosti žiakov GYM podľa zriaďovateľa a priemeru žiakov GYM v MAT15

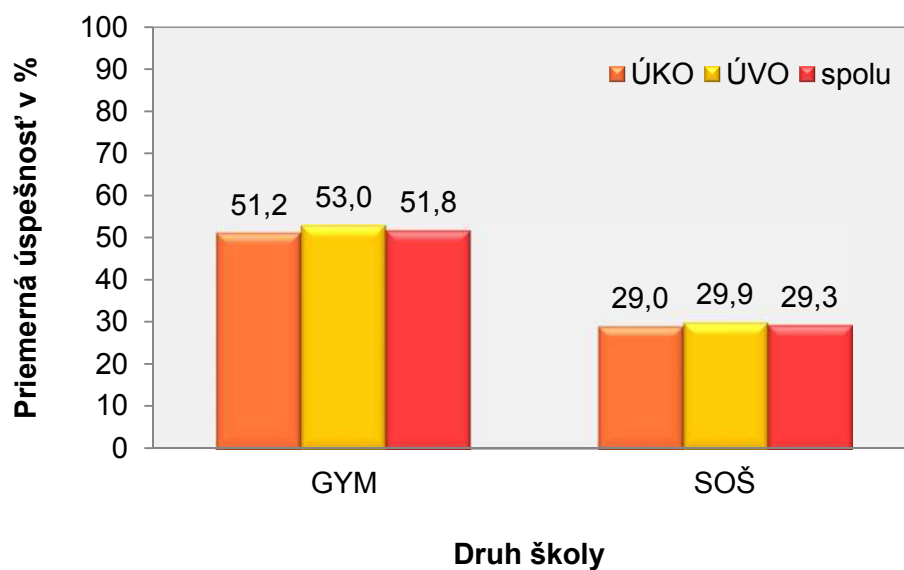
		Priemer GYM = 51,8 %			
		Počet žiakov	Priemerná úspešnosť %	Štatistická významnosť	Vecná významnosť
GYM	štátne školy	4 060	52,2	0,146	0,023
	súkromné školy	135	55,2	0,064	0,144
	cirkevné školy	648	48,2	0,000	0,190

Priemerné úspešnosti žiakov GYM všetkých zriaďovateľov boli porovnateľné navzájom, aj s priemerom žiakov GYM.

Tab. 15 Porovnanie priemernej úspešnosti žiakov SOŠ podľa zriaďovateľa a priemeru žiakov SOŠ v MAT15

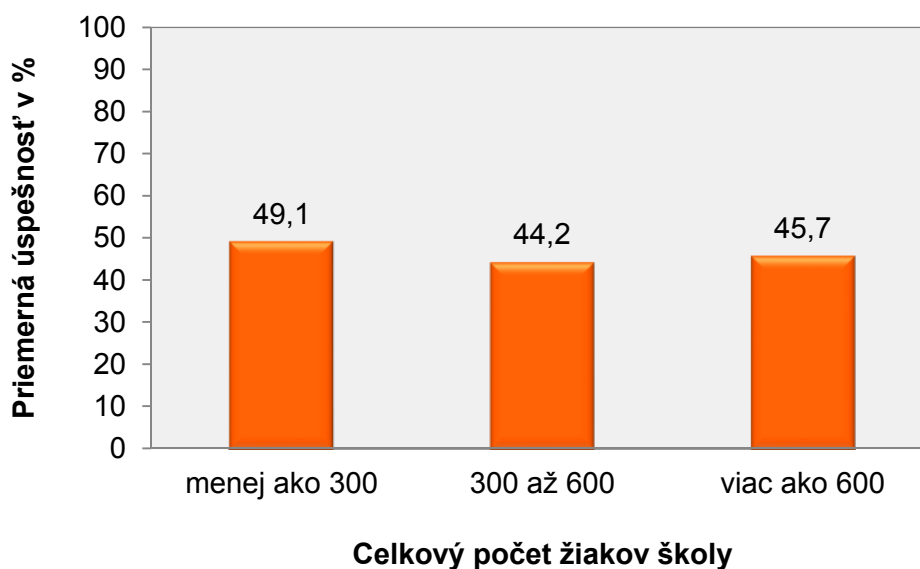
		Priemer SOŠ = 29,3 %			
		Počet žiakov	Priemerná úspešnosť %	Štatistická významnosť	Vecná významnosť
SOŠ	štátne školy	1 747	29,2	0,710	0,009
	súkromné školy	57	34,6	0,028	0,288
	cirkevné školy	11	26,7	0,230	0,375

Zastúpenie žiakov SOŠ podľa zriaďovateľa bolo výrazne nerovnomerné v prospech žiakov štátnych škôl (96,3 %). Priemerné úspešnosti žiakov SOŠ preto neporovnávame.



Obr. 5 Priemerná úspešnosť žiakov v MAT15 a jeho častiach podľa druhu školy

Rozdiel priemernej úspešnosti žiakov GYM a žiakov SOŠ bol stredne vecne významný. Priemerná úspešnosť žiakov v otvorených ÚKO bola porovnateľná s priemernou úspešnosťou v uzavretých ÚVO u žiakov oboch druhov stredných škôl.



Obr. 6 Priemerná úspešnosť žiakov v MAT15 podľa celkového počtu žiakov školy

Priemerná úspešnosť žiakov škôl s rôznym celkovým počtom žiakov bola porovnateľná. Rozdiely priemernej úspešnosti žiakov škôl s rozdielnym celkovým počtom žiakov neboli vecne významné.

Tab. 16 Porovnanie priemernej úspešnosti žiakov GYM podľa celkového počtu žiakov školy a priemeru žiakov GYM v MAT15

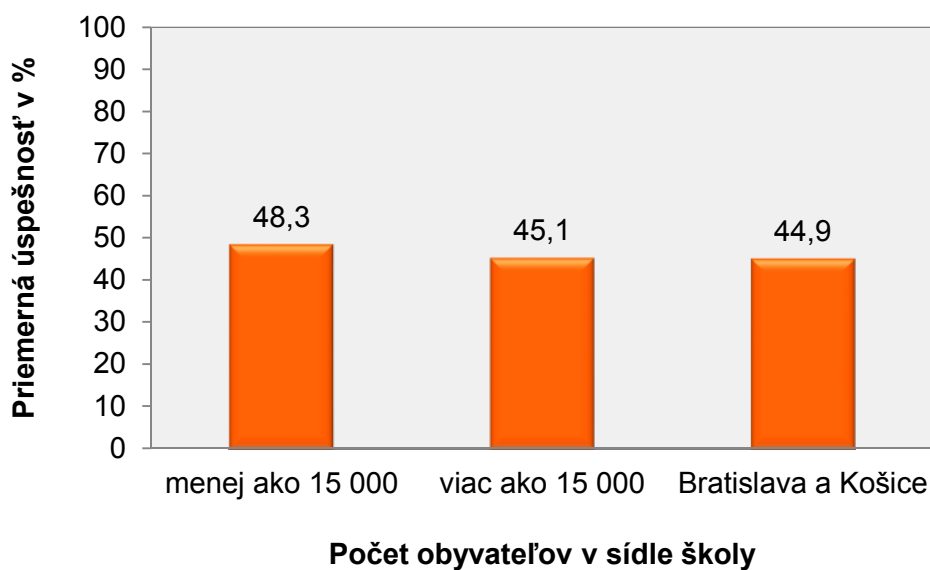
		Priemer GYM = 51,8 %			
		Počet žiakov	Priemerná úspešnosť %	Štatistická významnosť	Vecná významnosť
GYM	menej ako 300	1 210	52,2	0,523	0,018
	300 až 600	2 432	51,7	0,807	0,005
	viac ako 600	1 201	51,5	0,639	0,014

Rozdiely v priemerných úspešnostiach žiakov GYM s rôznym celkovým počtom žiakov školy neboli vecne významné. Priemerná úspešnosť žiakov GYM s rôznym celkovým počtom žiakov sa nelíšila od priemeru žiakov GYM.

Rozdiel priemernej úspešnosti žiakov SOŠ s počtom žiakov školy menším ako 300 a žiakov SOŠ s počtom žiakov 300 až 600 bol mierne vecne významný (Tab. 17). Priemerná úspešnosť žiakov SOŠ s celkovým počtom žiakov menším ako 300 bola stredne vecne významne lepšia ako priemer žiakov SOŠ.

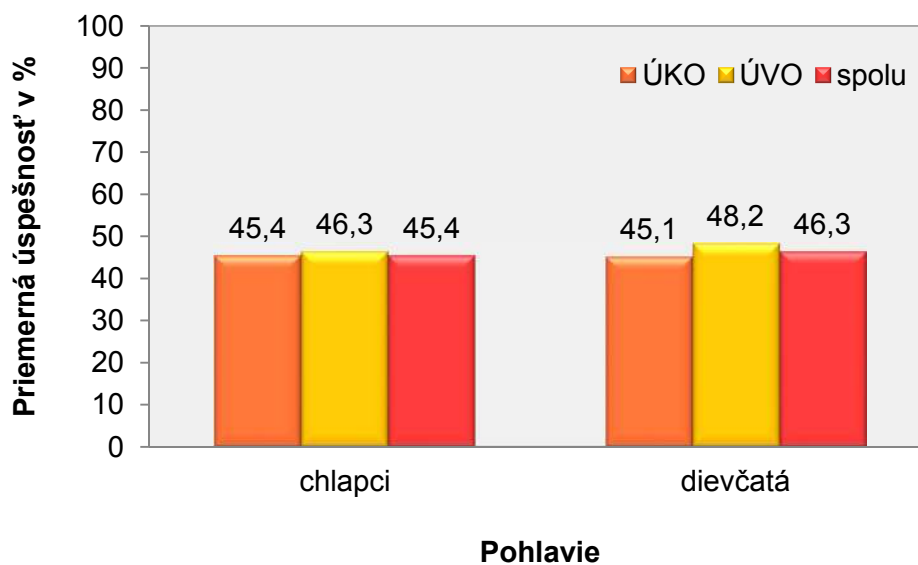
Tab. 17 Porovnanie priemernej úspešnosti žiakov SOŠ podľa celkového počtu žiakov školy a priemeru žiakov SOŠ v MAT15

		Priemer SOŠ = 29,3 %			
		Počet žiakov	Priemerná úspešnosť %	Štatistická významnosť	Vecná významnosť
SOŠ	menej ako 300	278	35,5	0,000	0,378
	300 až 600	1 092	27,5	0,000	0,128
	viac ako 600	445	30,0	0,377	0,042



Obr. 7 Priemerná úspešnosť žiakov v MAT15 podľa počtu obyvateľov v sídle školy

Priemerná úspešnosť žiakov škôl s rôznym počtom obyvateľov v sídle školy bola porovnateľná.



Obr. 8 Priemerná úspešnosť žiakov v MAT15 a jeho častiach podľa pohlavia

Rozdiel priemerných úspešností žiakov podľa pohlavia bol zanedbateľný, priemerné výsledky chlapcov (45,4 %) a dievčat (46,3 %) boli takmer rovnaké.

Tab. 18 Porovnanie priemernej úspešnosti žiakov GYM podľa pohlavia a priemeru žiakov GYM v MAT15

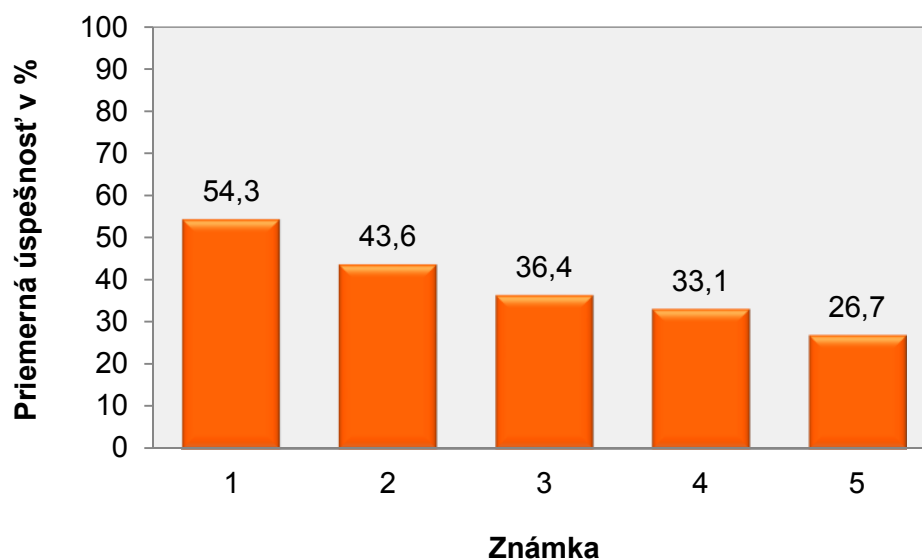
		Priemer GYM = 51,8 %			
		Počet žiakov	Priemerná úspešnosť %	Štatistická významnosť	Vecná významnosť
GYM	chlapci	3 059	52,7	0,011	0,046
	dievčatá	1 784	50,2	0,000	0,082

Priemerné úspešnosti chlapcov a dievčat z GYM boli porovnateľné a nelíšili sa ani od priemeru žiakov GYM.

Tab. 19 Porovnanie priemernej úspešnosti žiakov SOŠ podľa pohlavia a priemeru žiakov SOŠ v MAT15

		Priemer SOŠ = 29,3 %			
		Počet žiakov	Priemerná úspešnosť %	Štatistická významnosť	Vecná významnosť
SOŠ	chlapci	1 455	30,0	0,085	0,045
	dievčatá	360	26,6	0,001	0,175

Priemerné úspešnosti chlapcov a dievčat zo SOŠ boli porovnateľné a nelíšili sa ani od priemeru žiakov SOŠ.



Obr. 9 Priemerná úspešnosť žiakov v MAT15 podľa známky z predmetu, na ktorom sa najviac pripravovali na MS z matematiky

Podľa pokynov administrátora mali žiaci do odpovedového hárka zaznačiť poslednú známku z toho predmetu, na ktorom sa najviac pripravujú na MS z matematiky. Predpokladáme, že napriek tomu mnohí žiaci uviedli známku z povinného predmetu matematika, ktorý nesúvisí s prípravou žiaka na MS, keďže absolvovanie voliteľného predmetu so zameraním na prípravu na MS z matematiky pre žiaka nie je povinné alebo v niektorých školách nie je možné. Vzájomný vzťah úspešnosti žiakov v MAT15 a ich známku preto treba interpretovať opatrne s prihliadnutím na vstupné údaje. Napríklad polročná známka žiaka GYM z matematiky vyjadruje podľa učebného plánu ISCED 3A a štátneho vzdelávacieho programu hodnotenie práce žiaka na jednej hodine matematiky týždenne z vybranej časti jedného tematického celku Štatistika. Test MAT15 však vyžaduje znalosti zo všetkých tematických celkov v celom rozsahu Cieľových požiadaviek na vedomosti a zručnosti maturantov z matematiky.

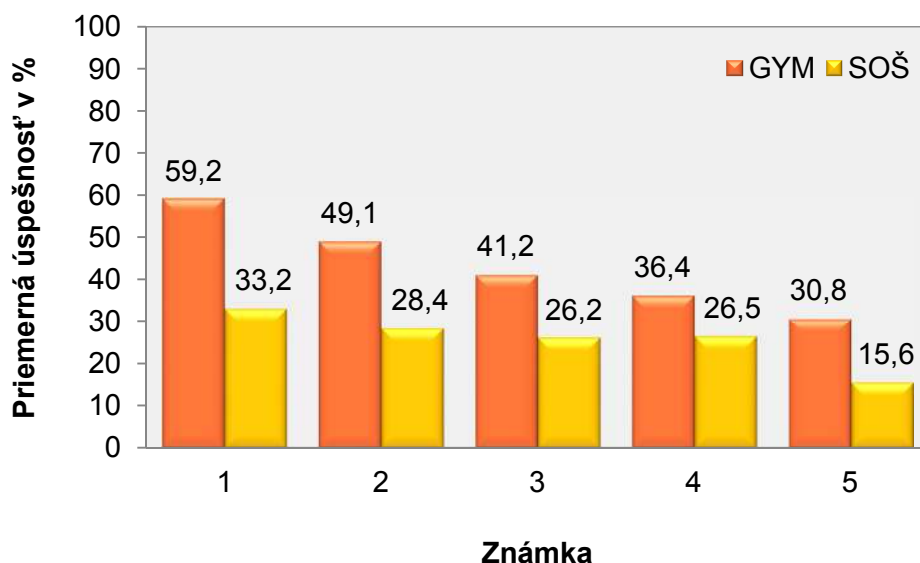
Žiadny z 1 087 žiakov maturujúcich elektronickou formou známku neuviedol, pretože v systéme E-test nebola možnosť vložiť známku pri prihlasovaní alebo odosielaní odpovedí. Znamku tiež neuviedli 2 žiaci riešiaci test papierovou formou. Priemerná známka žiakov, ktorí údaj uviedli, bola 2,03. Korelácia (vzájomný vzťah) medzi úspešnosťou žiaka v MAT15 a známku bola iba stredná ($r = -0,371$).

Priemerná úspešnosť jednotkárov bola vyššia ako národný priemer, priemerná úspešnosť žiakov s ostatnými známkami bola nižšia ako národný priemer. Napriek tomu, že test MAT15 dobre rozlíšil testovaných žiakov a splnil svoj cieľ rozlišovacieho NR testu (potvrdzujú to údaje na Obr. 1 a v Tab. 9), priemerná úspešnosť všetkých skupín žiakov rozdelených podľa známky z matematiky bola v úzkom intervale od 26,7 % do 54,3 % okolo hodnoty 40 %. Ani najlepšia skupina žiakov so známku 1 nedosiahla vysokú priemernú úspešnosť, napríklad nad 80 %. Každá skupina podľa známky teda obsahovala žiakov s vysokou, priemernou aj nízkou úspešnosťou v teste MAT15, pričom v skupine s hodnotením 1 bolo najviac v teste celkove úspešných žiakov, naopak v skupine s hodnotením 5 bola prevaha žiakov s nízkou úspešnosťou.

Rozdiely priemerných úspešností žiakov podľa hodnotenia boli stredne vecne významné medzi jednotkármi a trojkármi a medzi jednotkármi a štvorkármi, mierne vecne významné medzi jednotkármi a dvojkármi a medzi dvojkármi a štvorkármi.

Rovnako významné boli rozdiely medzi uvedenými skupinami aj v súbore žiakov GYM.

U žiakov SOŠ rozdiely v priemernej úspešnosti žiakov so známku 1 a žiakov so známku 3 boli mierne vecne významné. Výsledky žiakov SOŠ so známku 5 neinterpretujeme pre malý počet žiakov.



Obr. 10 Priemerná úspešnosť žiakov v MAT15 podľa známky a druhu školy

Priemerná úspešnosť žiakov v MAT15 podľa známky sa značne líšila v závislosti od druhu školy. Žiaci SOŠ dosiahli v porovnaní so žiakmi GYM s rovnakým hodnotením nižšiu priemernú úspešnosť. Priemerná úspešnosť každej skupiny žiakov GYM a SOŠ (s výnimkou žiakov SOŠ so známkou 5) bola vyššia ako 25,0 %. Priemerná úspešnosť všetkých žiakov SOŠ, okrem skupiny žiakov s hodnotením 5 (0,5 % žiakov SOŠ riešiacich test MAT15), bola v úzkom intervale od 26,5 % do 33,2 %. Posledné hodnotenie žiakov SOŠ z matematiky alebo predmetu zameraného na matematiku teda vôbec nepredikovalo úspešnosť žiakov SOŠ v MAT15. Pre všetky skupiny žiakov SOŠ bol test MAT15 takmer rovnako náročný alebo v každej skupine žiakov sa nachádzali žiaci úspešní aj menej úspešní. Úspešnosť žiakov GYM v MAT15 lepšie zodpovedala predpokladom hodnotenia žiakov počas štúdia.

Tab. 20 Porovnanie priemernej úspešnosti žiakov GYM podľa známky z matematiky a priemeru žiakov GYM v MAT15

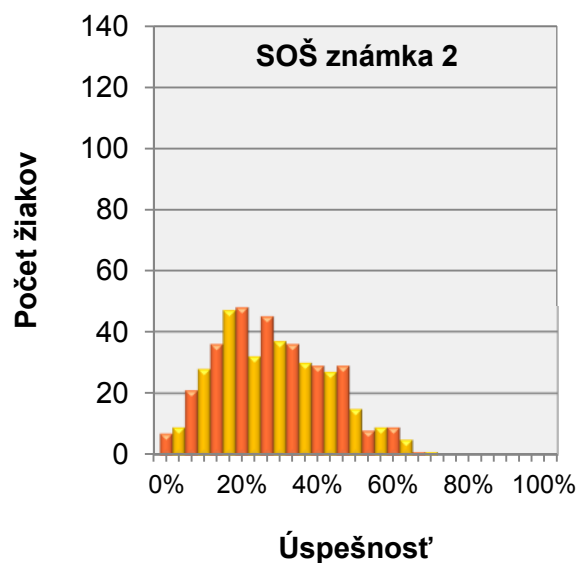
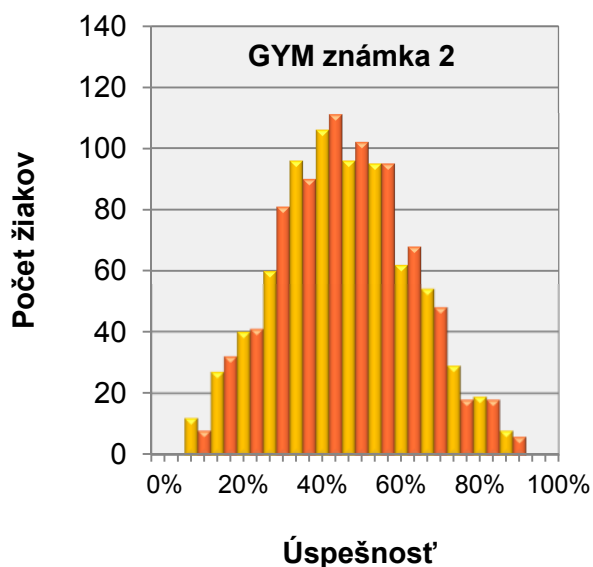
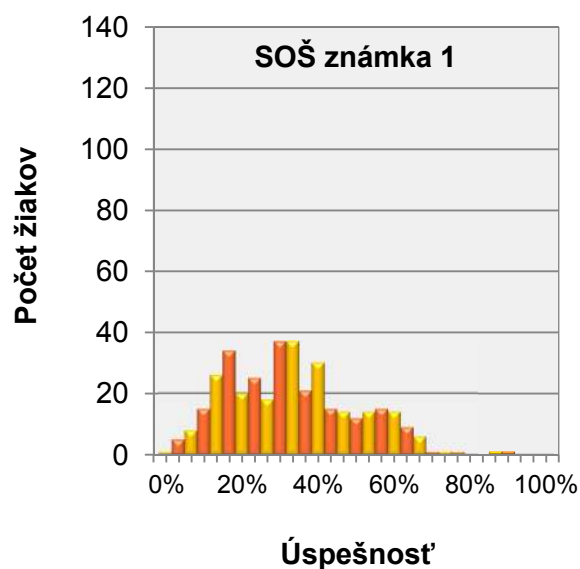
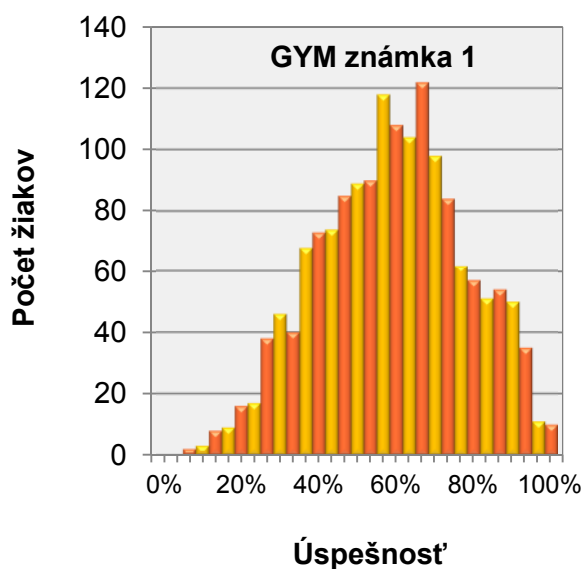
		Priemer GYM = 51,8 %			
		Počet žiakov	Priemerná úspešnosť %	Štatistická významnosť	Vecná významnosť
GYM	1	1 608	59,2	0,000	0,368
	2	1 400	49,1	0,000	0,160
	3	866	41,2	0,000	0,543
	4	260	36,4	0,000	0,714
	5	24	30,8	0,000	0,812

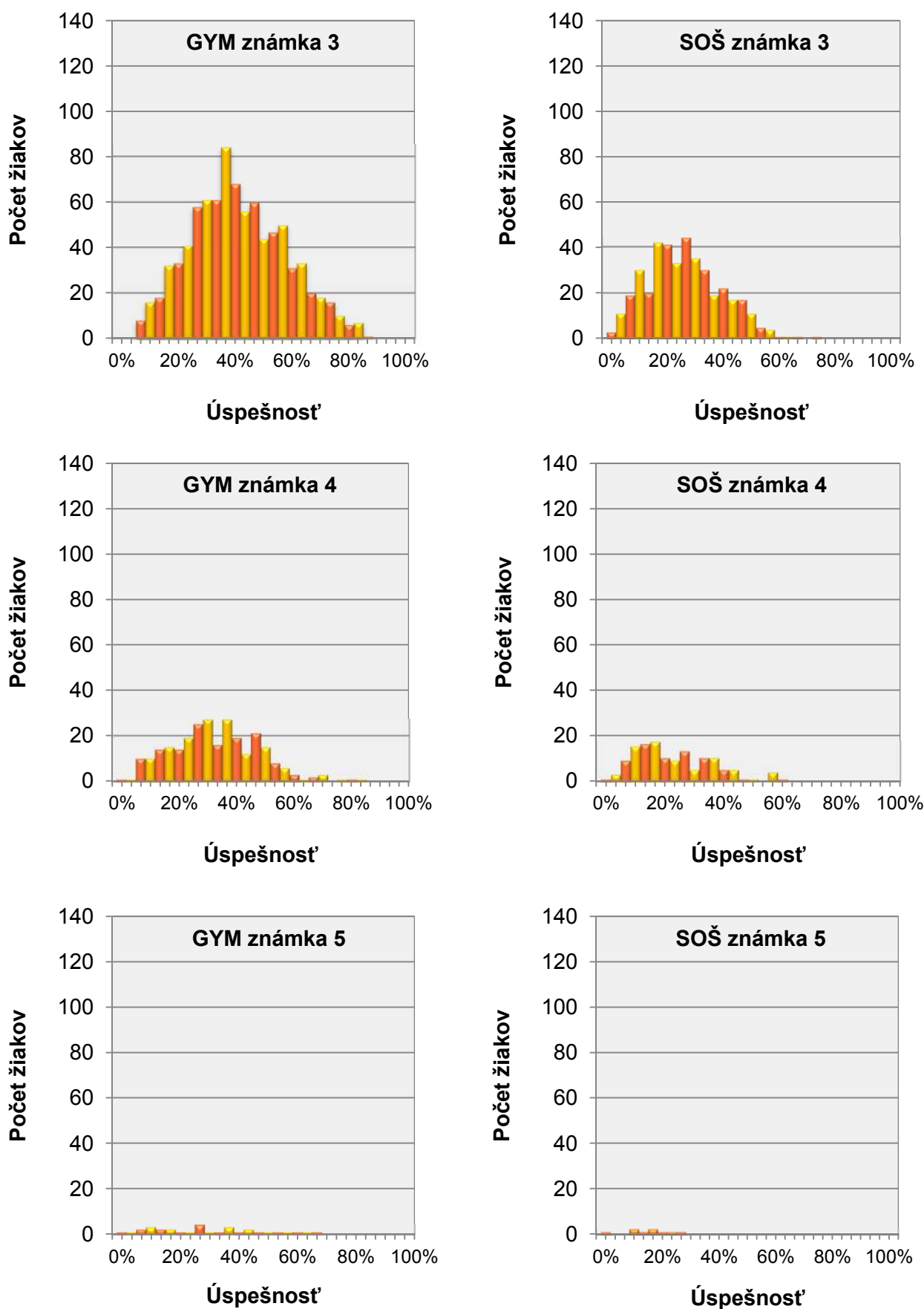
Priemerná úspešnosť žiakov GYM so známkou 1 bola stredne vecne významne lepšia a žiakov GYM so známkou 3, 4 a 5 silne vecne významne horšia ako priemer žiakov GYM.

Tab. 21 Porovnanie priemernej úspešnosti žiakov SOŠ podľa známky z matematiky a priemeru žiakov SOŠ v MAT15

		Priemer SOŠ = 29,3 %			
		Počet žiakov	Priemerná úspešnosť %	Štatistická významnosť	Vecná významnosť
SOŠ	1	370	33,2	0,000	0,229
	2	496	28,4	0,156	0,064
	3	407	26,2	0,000	0,225
	4	129	26,5	0,014	0,215
	5	9	15,6	0,001	0,890

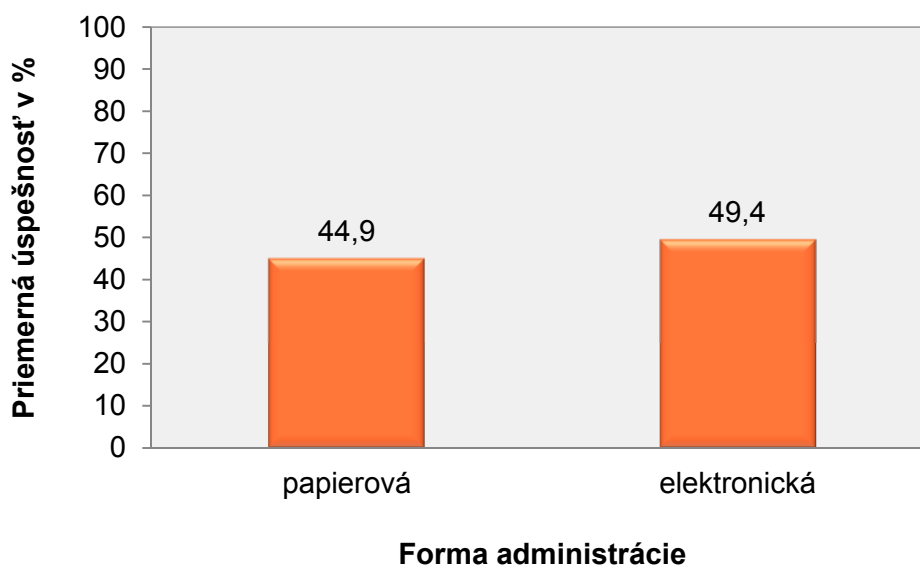
Priemerná úspešnosť žiakov SOŠ so známkou 1 bola mierne vecne významne lepšia a žiakov SOŠ so známkou 3 a 4 mierne vecne významne horšia ako priemer žiakov SOŠ.





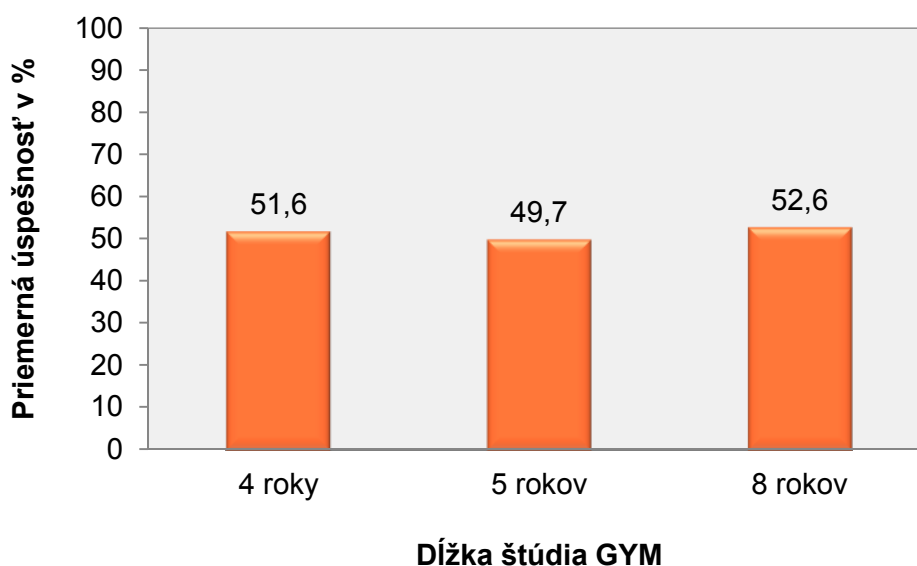
Obr. 11 Histogramy rozloženia početností percentuálnych úspešností žiakov podľa známky a druhu školy v MAT15

Histogramy rozloženia početností percentuálnych úspešností žiakov v MAT15 podľa známky dokladujú veľkú variabilitu úspešností žiakov s rovnakým hodnotením. Takmer v každej skupine sa nachádzali žiaci v teste celkove úspešní aj žiaci celkove v teste menej úspešní. V skupine jednotkárov GYM aj SOŠ bola početná skupina žiakov s úspešnosťou nižšou ako 50 %, dokonca žiaci s úspešnosťou nižšou ako 33 % a 25 %. Maximálnu úspešnosť 100 % dosiahli iba žiaci GYM so známku 1, všetci boli chlapci. Najúspešnejší žiak SOŠ dosiahol úspešnosť 90,0 % a bol hodnotený známku 1.



Obr. 12 Priemerná úspešnosť žiakov v MAT15 podľa formy administrácie

Priemerná úspešnosť žiakov s rôznou formou administrácie testu bola porovnateľná.



Obr. 13 Priemerná úspešnosť žiakov GYM v MAT15 podľa dĺžky štúdia

Priemerná úspešnosť žiakov GYM s rôznou dĺžkou štúdia bola porovnateľná.

Tab. 22 Významnosť rozdielu priemernej úspešnosti žiakov v MAT15 podľa kategórií a národného priemeru

		Národný priemer = 45,7 %			
		Počet žiakov	Priemerná úspešnosť %	Štatistická významnosť	Vecná významnosť
Kraj	BA	915	47,4	0,016	0,079
	TT	550	51,5	0,000	0,267
	TN	628	42,3	0,000	0,167
	NR	720	46,4	0,352	0,035
	ZA	1 068	43,5	0,000	0,112
	BB	701	41,6	0,000	0,202
	PO	1 050	48,1	0,000	0,111
	KE	1 026	45,7	0,298	0,032
Zriaďovateľ	štátne školy	5 807	45,3	0,144	0,019
	súkromné školy	192	49,1	0,051	0,141
	cirkevné školy	659	47,9	0,003	0,117
Druh školy	GYM	4 843	51,8	0,000	0,300
	SOŠ	1 815	29,3	0,000	0,735
Celkový počet žiakov školy	menej ako 300	1 488	49,1	0,000	0,158
	300 až 600	3 524	44,2	0,000	0,072
	viac ako 600	2 083	45,7	0,970	0,001
Počet obyvateľov v sídle školy	menej ako 15 000	1 218	48,3	0,000	0,127
	viac ako 15 000	4 003	45,1	0,070	0,029
	Bratislava, Košice	1 437	44,9	0,175	0,036
Pohlavie	chlapci	4 514	45,4	0,296	0,016
	dievčatá	2 144	46,3	0,192	0,028
Známka	1	1 978	54,3	0,000	0,381
	2	1 896	43,6	0,000	0,109
	3	1 273	36,4	0,000	0,480
	4	389	33,1	0,000	0,639
	5	33	26,7	0,000	0,785
Forma administrácie	papierová	5 571	44,9	0,005	0,038
	elektronická	1 087	49,4	0,000	0,163

Vyššia priemerná úspešnosť žiakov Trnavského kraja v porovnaní s národným priemerom bola mierne vecne významná. Rozdiely priemerných úspešností žiakov škôl rôznych zriaďovateľov a národného priemeru neboli vecne významné.

Vyššia priemerná úspešnosť žiakov GYM v porovnaní s národným priemerom bola mierne vecne významná, nižšia priemerná úspešnosť žiakov SOŠ v porovnaní s národným priemerom bola silne vecne významná.

Priemerné úspešnosti žiakov škôl s rôznym celkovým počtom žiakov, s rôznym počtom obyvateľov v sídle školy a priemerné výkony chlapcov a dievčat sa nelíšili od národného priemeru.

Priemerné úspešnosti jednotkárov a trojkárov sa stredne vecne významne líšili od národného priemeru, rozdiely v priemernej úspešnosti žiakov so známku 4 a 5 a národného priemeru boli silne vecne významné.

Priemerné úspešnosti žiakov riešiacich test papierovou a elektronickou formou sa nelíšili od národného priemeru.

Tab. 23 Významnosť rozdielu priemernej úspešnosti žiakov v MAT15 podľa formy štúdia a národného priemeru

		Národný priemer = 45,7 %			
		Počet žiakov	Priemerná úspešnosť %	Štatistická významnosť	Vecná významnosť
Forma štúdia	denná	6 651	45,7	0,912	0,001
	externá	7	36,7	0,067	0,673

Výsledky neinterpretujeme pre malý počet žiakov externej formy štúdia.

Tab. 24 Významnosť rozdielu priemernej úspešnosti žiakov v MAT15 podľa dosiahnutého vzdelania po ukončení štúdia a národného priemeru

		Národný priemer = 45,7 %			
		Počet žiakov	Priemerná úspešnosť %	Štatistická významnosť	Vecná významnosť
Dosiahnuté vzdelanie po ukončení štúdia	úplné stredné odborné s maturitou a výučným listom				
		8	28,3	0,007	0,815
	úplné stredné odborné s maturitou bez výučného listu (nadstavba)				
		6	18,9	0,001	0,960
	úplné stredné odborné s maturitou bez výučného listu				
		1 479	30,7	0,000	0,698

Priemerná úspešnosť žiakov, ktorí po ukončení štúdia dosiahli úplné stredné odborné vzdelanie s maturitou bez výučného listu, bola silne vecne významne horšia ako národný priemer. Výsledky žiakov, ktorí po ukončení štúdia dosiahli úplné stredné odborné vzdelanie s maturitou a výučným listom a bez výučného listu (nadstavba), neinterpretujeme pre malý počet žiakov.

3 Výsledky položiek testu RT EČ MS z matematiky podľa vyhodnotenia CTT

3.1 Porovnanie variantov testu

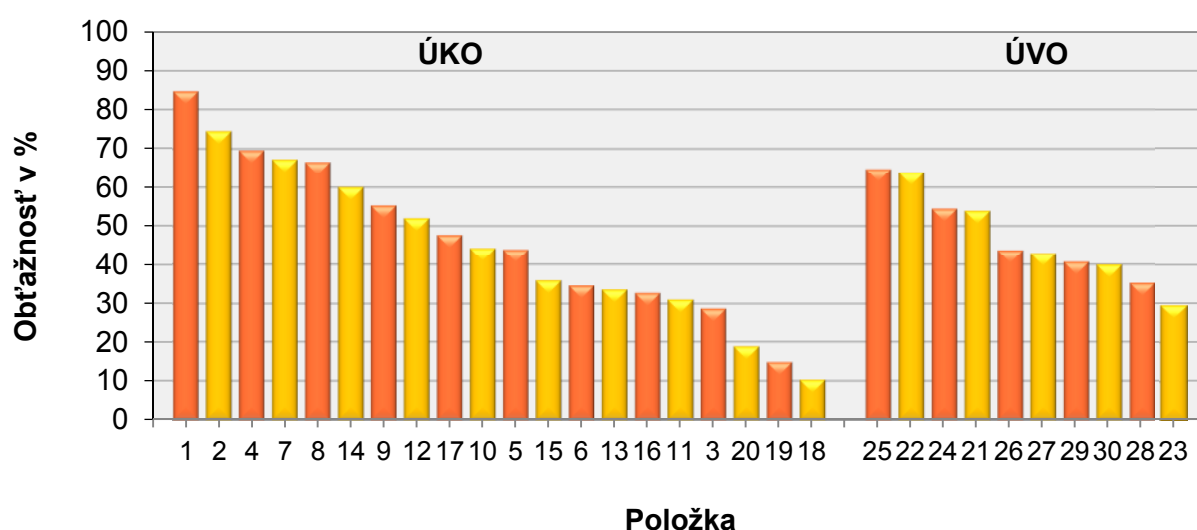
Zo štatistických vyhodnotení vyplýva, že administrácia variantov testu 1203/1104 a 1506/1707 bola proporčná zo všetkých hľadísk (kraj, zriaďovateľ, druh školy, celkový počet žiakov školy, počet obyvateľov v sídle školy, pohlavie). Porovnateľné boli aj dosiahnuté priemerné úspešnosti žiakov a reliability variantov testu (Cronbachovo alfa).

Tab. 25 Porovnanie variantov testu MAT15

		Počet administrovaných testov	Priemerná úspešnosť %	Štandardná odchýlka	Cronbachovo alfa
Variant	1203/1104	3 359	45,8	21,2	0,868
	1506/1707	3 299	45,5	20,5	0,857

Vecná významnosť rozdielov obťažností zodpovedajúcich položiek podľa variantu testu bola zanedbateľná. Poradie úloh v teste teda nemalo vplyv na úspešnosť ich riešenia žiakmi a preto považujeme varianty testu MAT15 za ekvivalentné. V nasledujúcich štatistických vyhodnoteniach, v ktorých sledujeme vlastnosti jednotlivých položiek, sme na štatistické spracovanie použili zástupný variant 1203/1104, ktorému zodpovedá aj číslovanie položiek.

3.2 Obťažnosť položiek



Obr. 14 Obťažnosť položiek v jednotlivých častiach testu MAT15 – 1203/1104 (položky sú usporiadané zostupne podľa hodnoty obťažnosti)

Test podľa štatistického vyhodnotenia obsahoval jednu veľmi ľahkú úlohu (č. 1), sedem ľahkých úloh (č. 2, 4, 7, 8, 14, 22 a 25), desať stredne ťažných úloh (č. 5, 9, 10, 12, 21, 24, 26, 27 a 29), deväť ťažných úloh (č. 3, 6, 11, 13, 15, 16, 23, 28 a 30) a tri veľmi ťažné úlohy (č. 18, 19 a 20).

Žiaci boli najúspešnejší v riešení úloh z rôznych oblastí matematiky, ktorých riešenie sa dalo získať krátkym, jednoduchým výpočtom (č. 1 – určiť počet žiakov triedy s využitím aritmetického priemeru, č. 4 – určiť počet žiakov triedy hodnotených známku 3), v slovných úlohách, ktorých riešenie bolo možné určiť úvahou alebo zdĺhavejším výpočtom zostavenej rovnice (č. 7 – určiť dĺžky úsečiek, ktoré boli po sebe nasledujúce členy aritmetickej postupnosti, č. 8 – vypočítať cenu kalerábu po zdražení) alebo vypisovaním a overovaním vhodných možností (č. 2 – nájsť správne dvojciferné číslo, č. 25 – určiť počet bielych guľiek v osudí). Žiaci boli úspešní aj pri negácii konjunkcie v úlohe č. 22.

S nižšou úspešnosťou žiaci riešili rôzne úlohy o funkciách (č. 10 – zistiť x -ovú súradnicu maxima zloženej funkcie sínus, č. 12 – určiť súradnicu priesečníka grafu logaritmickkej funkcie s osou x , č. 23 – určiť definičný obor funkcie, č. 26 – určiť súradnice vrcholu paraboly), úlohy vyžadujúce úpravu výrazov a riešenie rovníc a ich sústav (č. 5 – vypočítať dĺžku úsečky pomocou kosínusovej vety, č. 9 – zjednodušiť výraz s faktoriálmi, č. 16 – zistiť prvý člen geometrickej postupnosti, č. 17 – určiť súčet všetkých koreňov základnej goniometrickej rovnice na danom intervale, č. 27 – rozhodnúť o vzájomnej polohe priamky a kružnice).

Najnižšiu úspešnosť žiaci dosiahli v úlohách vyžadujúcich využitie a analýzu nákresu alebo obrázka, či už bez potreby výpočtu (č. 23 – určiť vlastnosti lineárnej lomenej funkcie pomocou grafu funkcie, č. 28 – rozhodnúť o vzájomnej polohe lineárnych útvarov v kocke) alebo s nutnosťou výpočtu (č. 11 – vypočítať obvod mnohoholníka, č. 13 – určiť percentuálny podiel prázdneho priestoru vo valci s tenisovými loptičkami, č. 15 – vypočítať obsah vyznačenej oblasti vo štvorci, č. 18 – vypočítať polomer kružnice vpísanej do rovnoramenného trojuholníka, č. 19 – určiť súradnice vrcholu pravouhlého trojuholníka využitím analytickej geometrie, č. 20 – vypočítať počet vrcholov a obvod mnohoholníka). Žiaci boli nepozorní a dosiahli nízku úspešnosť aj pri riešení jednoduchých, typických školských úloh (č. 3 – určiť počet všetkých poradí, č. 6 – upraviť a zjednodušiť lomený výraz s mocninami).

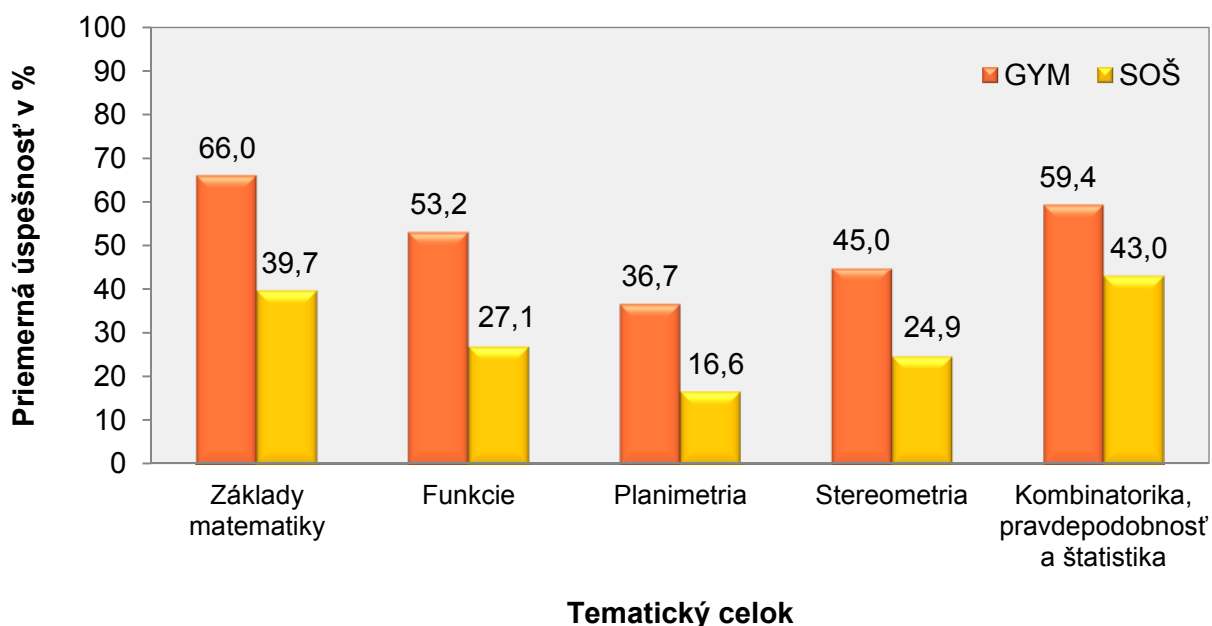
3.2.1 Ťažnosť položiek podľa tematického celku

V nasledujúcej tabuľke uvádzame rozdelenie úloh podľa tematických celkov. Úlohy, ktorých riešenie si vyžadovalo využitie poznatkov z viacerých tematických celkov, sme zaradili do tematického celku, ktorého poznatky boli rozhodujúce pre úspešné vyriešenie úlohy.

Tab. 26 Rozdelenie položiek testu MAT15 – 1203/1104 podľa tematického celku

Tematický celok	Poradové čísla položiek		Počet
Základy matematiky	ÚKO	2, 4, 6, 8, 9, 17	7
	ÚVO	22	
Funkcie	ÚKO	7, 10, 12, 16	7
	ÚVO	21, 23, 26	
Planimetria	ÚKO	5, 15, 18, 19, 20	7
	ÚVO	24, 27	
Stereometria	ÚKO	11, 13, 14	5
	ÚVO	28, 30	
Kombinatorika, pravdepodobnosť a štatistika	ÚKO	1, 3	4
	ÚVO	25, 29	

Najvyššiu priemernú úspešnosť žiaci dosiahli v tematických celkoch Základy matematiky (58,8 %), Kombinatorika, pravdepodobnosť a štatistika (55,0 %) a Funkcie (46,1 %), nasledovali celky Stereometria (39,5 %) a Planimetria (31,2 %).



Obr. 15 Priemerná úspešnosť žiakov v MAT15 – 1203/1104 podľa tematického celku a druhu školy

V tematickom celku Kombinatorika, pravdepodobnosť a štatistika žiaci GYM dosiahli lepšie výsledky ako žiaci SOŠ na úrovni miernej vecnej významnosti rozdielov priemerných úspešností, v ostatných tematických celkoch na úrovni strednej vecnej významnosti.

Tab. 27 Charakteristiky položiek MAT15 – 1203/1104 z tematického celku Základy matematiky

Číslo	Zaradenie úlohy podľa Katalógu cieľových požiadaviek a popis	Predpokladaná		Dosiahnutá obťažnosť %
		kognitívna n.	obťažnosť	
2.	1.3 Deliteľnosť prirodzených čísel	tvorivá	stredná	74,5
4.	1.1 Množiny	zložitejšia	stredná	69,6
6.	1.2 Výraz s mocninami	jednoduchá	ľahká	34,6
8.	1.4 Riešenie slovnej úlohy	zložitejšia	náročná	66,6
9.	1.2 Výraz s faktoriálmi	zložitejšia	stredná	55,3
17.	1.4 Základná goniometrická rovnica	jednoduchá	ľahká	47,7
22.	1.1 Negácia zloženého výroku	jednoduchá	ľahká	63,9

Úspešnosť žiakov v položkách tematického celku Základy matematiky vyplývala zo zaradenia väčšiny položiek na začiatok skupiny ÚKO aj ÚVO. Napríklad úlohu č. 2 správne vyriešili tri štvrtiny žiakov, napriek predpokladanej vysokej kognitívnej náročnosti a obťažnosti. Predpokladáme, že žiaci veľa úloh z teórie čísel počas stredoškolského štúdia neriešili. Väčšina z nich sa však správne zorientovala a úlohu vyriešili vypisovaním a overovaním možností tak, ako sa podobné úlohy majú riešiť, alebo pokusným hľadaním správneho čísla, pri čom však mohli stratiť viac času, ktorý im potom mohol chýbať pri riešení ostatných úloh. Ak by bola úloha zaradená až do druhej tretiny úloh, tak by pravdepodobne veľa žiakov riešenie úlohy vzdalo pred úspešným dokončením.

Žiaci SOŠ dosiahli oveľa nižšiu úspešnosť ako žiaci GYM v položkách č. 6, 9 a 17 vyžadujúcich algebraickú zručnosť pri riešení rovníc a úpravách výrazov. Za zamyslenie stojí nízka úspešnosť všetkých žiakov pri úprave jednoduchého lomeného výrazu s mocninami so základom 2 v úlohe č. 6 (pravidlá pre úpravy mocnín boli uvedené v prehľade vzťahov na zadnom liste testu) a pri riešení základnej goniometrickej rovnice v úlohe č. 17 (najmenší kladný uhol, prislúchajúci hodnote funkcie v rovnici, bol tiež uvedený na zadnom liste testu).

Tab. 28 Charakteristiky položiek MAT15 – 1203/1104 z tematického celku Funkcie

Číslo	Zaradenie úlohy podľa Katalógu cieľových požiadaviek a popis	Predpokladaná		Dosiahnutá obťažnosť %
		kognitívna n.	obťažnosť	
7.	2.2 Členy aritmetickej postupnosti	zložitejšia	stredná	67,3
10.	2.5 Maximum goniometrickej funkcie	zložitejšia	stredná	44,2
12.	2.4 Priesečník grafu funkcie s osou x	zložitejšia	stredná	52,0
16.	2.4 Členy geometrickej postupnosti	zložitejšia	stredná	32,7
21.	2.1 Definičný obor funkcie	zložitejšia	stredná	53,9
23.	2.3 Vlastnosti lin. lomenej funkcie	zložitejšia	stredná	29,4
26.	2.2 Vrchol grafu kvadratickej funkcie	zložitejšia	stredná	43,7

Dosiahnutá obťažnosť úloh tematického celku Funkcie zodpovedala predpokladanej obťažnosti a kognitívnej náročnosti úloh zaradených do testu.

Pri úlohách tematického celku Funkcie sme zaznamenali najväčší rozdiel v úspešnosti riešenia medzi žiakmi GYM a SOŠ. Žiaci GYM riešili všetky úlohy o funkciách (okrem úlohy č. 16 a 23) s priemernou úspešnosťou vyššou ako 50,0 %. Žiaci SOŠ riešili všetky úlohy tematického celku Funkcie (okrem úlohy č. 7) s priemernou úspešnosťou nižšou ako 28,0 %.

Úlohy č. 10 a 23 odhalili u žiakov nedostatočné vedomosti o vlastnostiach funkcií a zručnosti pri práci s grafmi základných typov funkcií. Načrtnúť graf funkcie na základe daného predpisu a určiť vlastnosti funkcie, aj s využitím grafu funkcie, považujeme za základné úlohy, ktoré by mal správne vyriešiť každý maturant z matematiky ako východisko k riešeniu zložitejších úloh.

Nízka úspešnosť žiakov pri riešení úlohy č. 16 o členoch geometrickej postupnosti bola zrejme spôsobená vyššou časovou náročnosťou a nedostatočnou algebraickou zručnosťou pri riešení zostavených rovníc v kombinácii s neznalosťou pojmov geometrickej postupnosti, ktoré nie sú súčasťou štátneho vzdelávacieho programu pre žiadny druh strednej školy.

ÚKO o funkciách č. 10, 12 a 16 dosiahli popri výpočtových úlohách z planimetrie najväčšiu neriešenosť, najmä u žiakov SOŠ.

Tab. 29 Charakteristiky položiek MAT15 – 1203/1104 z tematického celku Planimetria

Číslo	Zaradenie úlohy podľa Katalógu cieľových požiadaviek a popis	Predpokladaná		Dosiahnutá obťažnosť %
		kognitívna n.	obťažnosť	
5.	3.1 Kosínusová veta	zložitejšia	ľahká	43,9
15.	3.1 Obsah vyznačenej časti útvaru	zložitejšia	stredná	35,9
18.	3.1 Kružnica vpísaná do trojuholníka	tvorivá	stredná	10,3
19.	3.2 Analytická geometria priamky	zložitejšia	stredná	14,8
20.	3.1 Dĺžky a uhly v mnohouholníku	tvorivá	náročná	18,8
24.	3.4 Osová súmernosť	tvorivá	stredná	54,5
27.	3.2 Vzájomná poloha útvarov	zložitejšia	stredná	42,9

Žiaci GYM riešili položky tematického celku Planimetria podľa predpokladov autorov testu, s oveľa vyššou priemernou úspešnosťou ako žiaci SOŠ, ktorý s výnimkou úlohy č. 24 riešili úlohy s priemernou úspešnosťou maximálne 25,0 %. ÚKO z planimetrie, s výnimkou úlohy č. 5, dosiahli najväčšiu neriešenosť spomedzi všetkých úloh testu MAT15.

Nízku priemernú úspešnosť a vysokú neriešenosť úloh z planimetrie zrejme spôsobila neschopnosť žiakov objaviť myšlienku, smer a spôsob riešenia úloh a nedostatočná skúsenosť s riešením úloh pomocou analytickej geometrie, ktorá nie je súčasťou štátneho vzdelávacieho programu.

Tab. 30 Charakteristiky položiek MAT15 – 1203/1104 z tematického celku Stereometria

Číslo	Zaradenie úlohy podľa Katalógu cieľových požiadaviek a popis	Predpokladaná		Dosiahnutá obťažnosť %
		kognitívna n.	obťažnosť	
11.	4.3 Rez kocky rovinou	zložitejšia	stredná	31,0
13.	4.5 Objem gule a valca	zložitejšia	náročná	33,6
14.	4.5 Objem hranatého telesa	zložitejšia	náročná	60,0
28.	4.5 Vzájomné polohy útvarov v kocke	zložitejšia	stredná	35,3
30.	4.2 Uhol rovín v ihlane	jednoduchá	stredná	39,9

Zo Stereometrie bola pre žiakov najnáročnejšia úloha č. 11 vyžadujúca správne zostrojenie rezu kocky danou rovinou a následne výpočet obvodu vzniknutého mnohouholníka, napríklad pomocou Pytagorovej vety. Úlohu správne vyriešilo 40,4 % žiakov GYM a iba 6,1 % žiakov SOŠ.

Málo úspešní boli žiaci aj pri riešení úlohy č. 28 o vzájomných polohách lineárnych útvarov v kocke. Príčinou neúspechu žiakov mohla byť nutnosť správne rozhodnúť o pravdivosti všetkých piatich tvrdení uvedených v jednotlivých ponúkaných odpovediach.

Metrickú úlohu č. 30 v ihlane, využívajúcu výpočet veľkosti uhla dvoch rovín pomocou goniometrickej funkcie v pravouhlom trojuholníku, úspešne vyriešilo 39,9 % žiakov. Predpokladáme, že najväčšou prekážkou v riešení úlohy pre ostatných žiakov bola identifikácia uhla, ktorého veľkosť bola uvedená v zadaní úlohy.

Z úloh zameraných na objem telies (s rovnakými predpokladanými parametrami) žiaci riešili nad očakávanie úspešne úlohu č. 14. Naopak pri riešení úlohy č. 13 žiaci zrejme nedokázali správne identifikovať podstatu úlohy a nevedeli, čo majú vlastne počítať.

Tab. 31 Charakteristiky položiek MAT15 – 1203/1104 z tematického celku Kombinatorika, pravdepodobnosť a štatistika

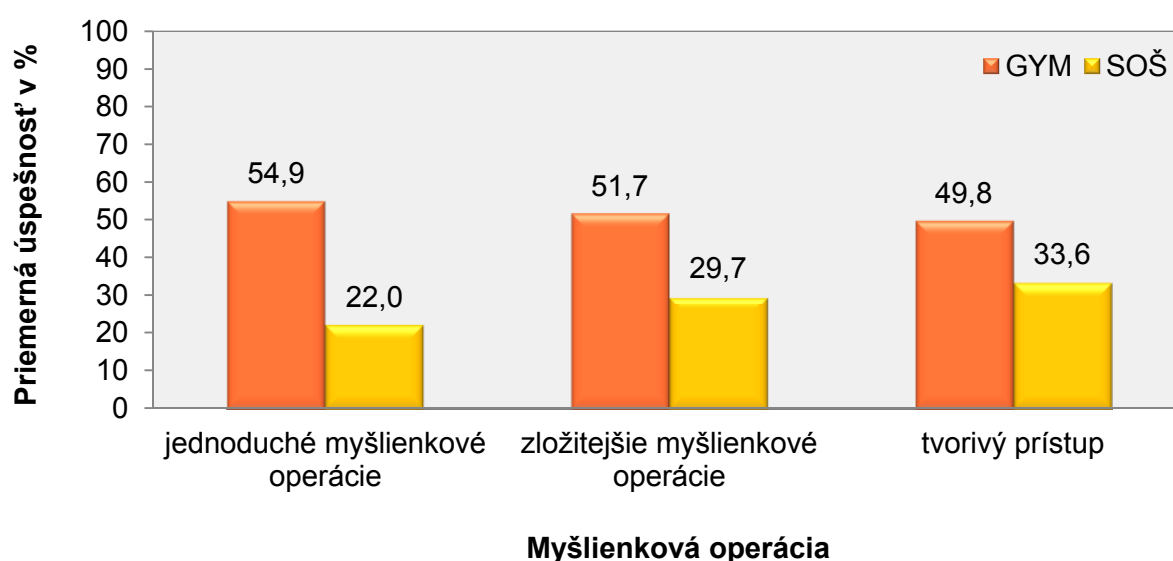
Číslo	Zaradenie úlohy podľa Katalógu cieľových požiadaviek a popis	Predpokladaná		Dosiahnutá obťažnosť %
		kognitívna n.	obťažnosť	
1.	5.2 Aritmetický priemer	zložitejšia	stredná	84,5
3.	5.1 Permutácie	zložitejšia	ľahká	28,8
25.	5.1 Pravdepodobnosť	zložitejšia	náročná	64,8
29.	5.1 Kombinatorika, počet možností	zložitejšia	stredná	40,7

Úlohy tematického celku Kombinatorika, pravdepodobnosť a štatistika žiaci riešili s predpokladanou úspešnosťou. Najnižšiu priemernú úspešnosť žiaci dosiahli v typickej školskej úlohe z kombinatoriky č. 3, ktorú správne vyriešilo iba 28,8 % žiakov. Ďalších 28,1 % žiakov bolo nedôsledných a ako správnu odpoveď uviedli výsledok, v ktorom nezapočítali aj možnosti vzájomnej výmeny chlapcov s dievčatami.

3.2.2 Obťažnosť položiek podľa náročnosti myšlienkového operácie

V teste MAT15 boli podľa predpokladu autorov testu štyri položky vyžadujúcich jednoduché myšlienkové operácie (č. 6, 17, 22 a 30), dvadsaťdva položiek vyžadujúcich zložitejšie myšlienkové operácie (č. 1, 3 – 5, 7 – 16, 19, 21, 23 a 25 – 29) a štyri položky vyžadujúce tvorivý prístup (č. 2, 18, 20 a 24).

Priemerná úspešnosť žiakov v úlohách testu MAT15 vyžadujúcich jednoduché myšlienkové operácie bola 45,9 %, v úlohách vyžadujúcich zložitejšie myšlienkové operácie bola 45,7 % a v úlohách vyžadujúcich tvorivý prístup bola 45,4 %.



Obr. 16 Priemerná úspešnosť žiakov v MAT15 – 1203/1104 podľa myšlienkového operácie a druhu školy

Zastúpenie úloh vyžadujúcich od žiaka zložitejšie myšlienkové operácie bolo v rozlišovacom NR teste dominantné. Vecná významnosť rozdielov priemerných úspešností žiakov GYM a SOŠ, zohľadňujúca nerovnomerné rozdelenie počtu úloh podľa náročnosti myšlienkového operácie, bola stredne vecne významná pri úlohách všetkých stupňov náročnosti myšlienkového operácie.

3.2.3 Obťažnosť položiek podľa druhu školy

Žiaci GYM boli stredne vecne významne lepší ako žiaci SOŠ v riešení 5 položiek testu MAT15 a mierne vecne významne lepší v riešení 12 položiek testu MAT15. Usporiadanie položiek podľa klesajúcej vecnej významnosti rozdielov obťažností podľa druhu školy uvádza Tab. 32.

Tab. 32 Obťažnosť položiek MAT15 – 1203/1104 podľa druhu školy a vecná významnosť rozdielov

Položka	Obťažnosť %		Vecná významnosť
	GYM	SOŠ	
22.	77,9	26,5	-0,477
12.	62,3	24,9	-0,334
11.	40,4	6,1	-0,331
21.	63,8	27,6	-0,324
17.	57,4	22,0	-0,316
6.	43,1	12,1	-0,291
9.	63,8	32,8	-0,278
10.	52,4	22,4	-0,269
5.	51,7	23,4	-0,254
27.	50,3	23,2	-0,245
25.	71,5	47,2	-0,227
16.	39,2	15,7	-0,224
20.	24,1	4,8	-0,220
19.	19,5	2,2	-0,218
7.	73,5	50,8	-0,216

Položka	Obťažnosť %		Vecná významnosť
	GYM	SOŠ	
4.	75,6	53,7	-0,212
26.	50,1	26,7	-0,210
1.	88,9	72,7	-0,200
15.	41,7	20,8	-0,194
28.	40,8	20,9	-0,186
24.	59,5	41,1	-0,165
14.	64,9	47,3	-0,160
2.	78,6	63,5	-0,155
3.	33,0	17,5	-0,153
13.	37,6	22,7	-0,141
30.	44,1	28,6	-0,141
18.	12,8	3,5	-0,137
23.	32,0	22,7	-0,091
29.	41,8	37,7	-0,037
8.	66,4	67,3	-0,009

Všetky položky testu MAT15 boli pre žiakov SOŠ obťažnejšie ako pre žiakov GYM, najmä úlohy, v ktorých bolo potrebné uskutočniť výpočet s výrazmi a rovnicami (č. 6, 9 a 16), úlohy vyžadujúce znalosti o funkciách (č. 10, 12 a 17) a výpočtové úlohy z geometrie (č. 5, 11, 18, 19, 20 a 27).

Jedenásť položiek testu MAT15 bolo pre žiakov GYM ľahkých až veľmi ľahkých, sedem položiek obťažných až veľmi obťažných. Naopak, štrnásť položiek testu bolo pre žiakov SOŠ obťažných, sedem položiek až veľmi obťažných a iba tri položky ľahké. V polovici položiek testu MAT15 boli žiaci GYM aspoň dvojnásobne úspešnejší ako žiaci SOŠ. Konštatujeme, že úlohy testu MAT15 boli pre žiakov SOŠ obťažné a žiaci na ne neboli dostatočne pripravení.

3.2.4 Obťažnosť položiek podľa pohlavia

Vecná významnosť rozdielov obťažností položiek podľa pohlavia bola zanedbateľná. Usporiadanie položiek podľa klesajúcej hodnoty vecnej významnosti rozdielov obťažností podľa pohlavia je zaznamenané v Tab. 33.

Chlapci dosiahli vyššiu priemernú úspešnosť ako dievčatá v trinástich položkách, v ostatných sedemnástich položkách boli úspešnejšie dievčatá.

Tab. 33 Obťažnosť položiek MAT15 – 1203/1104 podľa pohlavia a vecná významnosť rozdielov

Položka	Obťažnosť %		Vecná významnosť
	chlapci	dievčatá	
14.	63,6	52,3	-0,107
22.	60,5	71,2	0,103
8.	68,6	62,3	-0,062
21.	51,8	58,4	0,062
6.	32,7	38,7	0,059
25.	62,9	69,0	0,059
27.	41,1	46,7	0,052
29.	42,2	37,5	-0,044
10.	45,6	41,1	-0,042
7.	68,2	65,3	-0,028
19.	14,1	16,2	0,028
4.	68,8	71,3	0,025
15.	36,7	34,3	-0,023
16.	32,0	34,3	0,023
17.	47,0	49,3	0,022

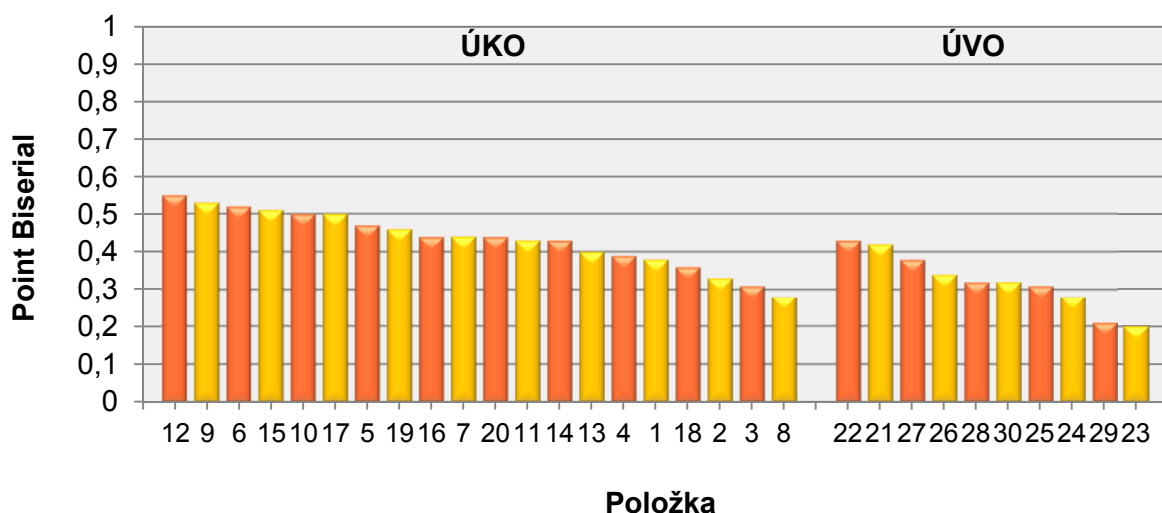
Položka	Obťažnosť %		Vecná významnosť
	chlapci	dievčatá	
1.	85,0	83,4	-0,020
26.	44,3	42,4	-0,018
3.	29,3	27,6	-0,017
12.	51,5	53,2	0,015
24.	55,0	53,3	-0,015
9.	54,9	56,4	0,014
18.	10,0	10,8	0,013
20.	18,5	19,5	0,013
2.	74,2	75,1	0,010
5.	43,6	44,7	0,010
13.	33,3	34,1	0,008
30.	40,1	39,3	-0,008
11.	30,9	31,2	0,003
28.	35,4	35,2	-0,003
23.	29,5	29,4	-0,001

Najväčší rozdiel v úspešnosti riešenia úloh podľa pohlavia v prospech chlapcov bol v úlohách, v ktorých bolo možné zistiť správny výsledok okrem cieleného výpočtu aj vypisovaním alebo pokusným hľadaním a overovaním možných výsledkov, aj s pomocou kalkulačky (č. 7, 8 a 29) a v úlohách využívajúcich priestorovú predstavivosť a tvorbu stratégie riešenia (č. 14).

Dievčatá boli úspešnejšie v úlohách vyžadujúcich prácu s výrazmi (č. 6, 21 a 27).

3.3 Korelácia položiek so zvyškom testu

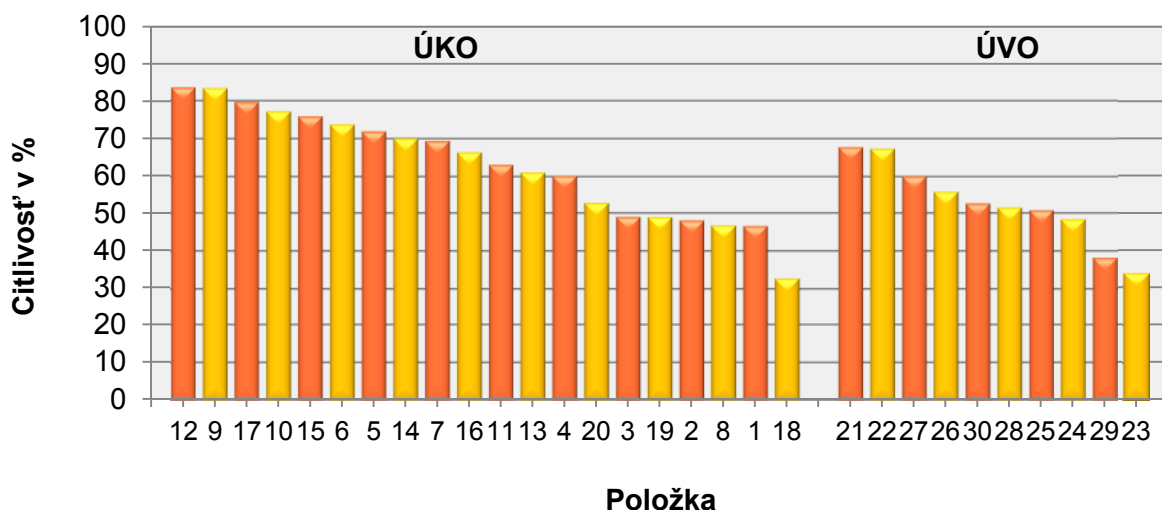
Jedna položka testu MAT15 (č. 23) dosiahla kladnú hodnotu medzipoložkovej korelácie *P. Bis.* rovnú hodnote 0,20, tri položky (č. 8, 24 a 29) hodnotu medzi 0,21 a 0,30, zvyšných dvadsaťšesť položiek vyhovujúcu hodnotu *P. Bis.* vyššiu ako 0,30. Z nich osem položiek dosiahlo hodnotu *P. Bis.* vyššiu alebo rovnú 0,40. Najvyššia dosiahnutá hodnota *P. Bis.* bola 0,55 (položka č. 12). Znamená to, že test bol reliabilný a vnútorne konzistentný, položky medzi sebou korelovali a merali rovnakú vlastnosť. Správne odpovede na položky s najvyššou hodnotou *P. Bis.* uvádzali väčšinou žiaci v teste celkove úspešní a naopak, úspešnosť žiaka v týchto položkách podmieňovala celkovú úspešnosť žiaka v teste.



Obr. 17 Point Biserial položiek v jednotlivých častiach testu MAT15 – 1203/1104 (položky sú usporiadané zostupne podľa hodnoty *P. Bis.*)

3.4 Distribúcia úspešností a citlivosť položiek

Grafy distribúcie úspešností žiackych odpovedí jednotlivých položiek podľa výkonnostných skupín sú zobrazené v časti 5.1 Vyhodnotenie položiek.



Obr. 18 Citlivosť položiek v jednotlivých častiach testu MAT15 – 1203/1104 (položky sú usporiadané zostupne podľa hodnoty citlivosti)

Citlivosť všetkých položiek bola vyhovujúca. Deväť položiek (č. 1, 2, 3, 8, 18, 19, 23, 24 a 29) malo citlivosť od 30 % do 50 %, z toho iba tri položky mali citlivosť nižšiu ako 45 %. Dvadsaťjeden ostatných položiek malo citlivosť vyššiu ako 50 %. Najcitlivejšími boli položky č. 9 a 12 s citlivosťou vyššou ako 80 %.

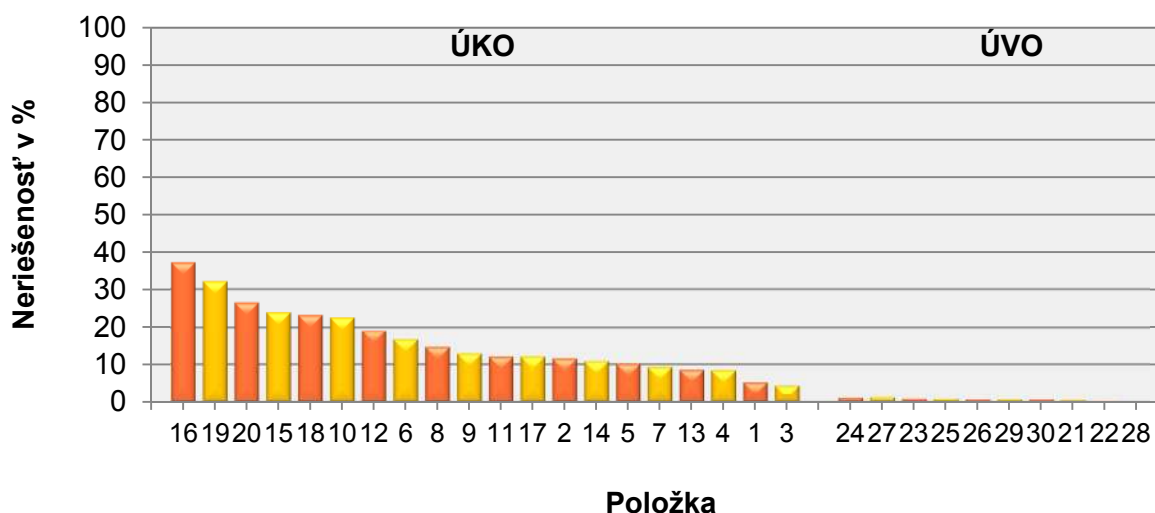
Položka č. 1 výrazne oddelila poslednú výkonnostnú skupinu, na celkovú výkonnosť žiakov však bola málo citlivá, pretože pre ostatné skupiny žiakov bola takmer rovnako ľahká. Položky č. 4 a 7 tiež výrazne oddelili poslednú výkonnostnú skupinu, ostatné výkonnostné skupiny už ale výrazne nerozlíšili.

Položka č. 22 výrazne oddelila posledné dve výkonnostné skupiny.

Položky č. 18, 19, 20 a 23 naopak rozlíšili iba prvú výkonnostnú skupinu. Zvyšné skupiny žiakov dosiahli približne rovnakú úspešnosť bez ohľadu na celkovú úspešnosť v teste.

Ostatné položky plynule rozlíšili všetky výkonnostné skupiny žiakov v závislosti od hodnoty citlivosti. Ideálnymi boli napríklad položky č. 9, 10, 12 a 17.

3.5 Neriešenosť položiek



Obr. 19 Neriešenosť položiek v jednotlivých častiach testu MAT15 – 1203/1104 (položky sú usporiadané zostupne podľa neriešenosti)

Neriešenosť položiek bola spôsobená takmer výlučne vynechanosťou. Najvyššiu, ale zanedbateľnú hodnotu nedosiahnutosti 0,1 % sme zaznamenali len pri posledných troch položkách testu.

Nízke hodnoty neriešenosti (vynechanosti a nedosiahnutosti) posledných položiek testu MAT15 naznačujú, že žiaci mali dostatok času na riešenie a zodpovedanie všetkých položiek testu. Pri interpretácii uvedených hodnôt neriešenosti však musíme byť opatrní, čo naznačujú aj viaceré reakcie žiakov, ich učiteľov a rodičov poukazujúce na nedostatok času na pokojné vyriešenie všetkých úloh testu, záverečnú kontrolu vypočítaných výsledkov a správnosti vyplnenia odpovedového hárka.

Ku skresleniu uvedených hodnôt neriešenosti prispieva najmä štruktúra testu, kde posledných desať položiek sú ÚVO. Žiak v časovej tiesni mohol uviesť odpoveď, či už správnu alebo nesprávnu, aj bez výpočtu alebo hlbšieho rozanalyzovania úlohy, len na základe vylúčenia niektorých menej pravdepodobných odpovedí a následnej voľbe najvyhovujúcejšej zo zvyšných odpovedí, prípadne úplne náhodným výberom niektorej odpovede. NÚCEM však nemá možnosť overiť si takéto konanie žiakov kontrolou papierov s pomocnými výpočtami a zároveň nechce diskriminovať žiakov, ktorí k riešeniu úloh nepotrebnú napísať veľa výpočtov na papier.

Po niekoľkoročnej snahe NÚCEM platí od 1. septembra 2015 legislatívna úprava predlžujúca čas riešenia úloh testu EČ MS z matematiky o 30 minút, na celkových 150 minút. Veríme, že zvýšená časová dotácia pri súčasnom zachovaní doterajšieho počtu úloh a ich náročnosti poskytne žiakom dostatok času a patričný pokoj pri riešení jednotlivých úloh testu a kontrole vypočítaných výsledkov. Zároveň dúfame, že predĺženie času žiaci nezneužijú na opisovanie a iné nečestné konanie.

Tab. 34 Neriešenosť položiek testu MAT15 – 1203/1104 podľa druhu školy a vecná významnosť rozdielov

Položka	Neriešenosť %		Vecná významnosť
	GYM	SOŠ	
17.	7,5	24,6	0,233
12.	14,2	32,1	0,203
6.	12,6	27,1	0,173
11.	9,6	19,0	0,129
10.	19,4	31,1	0,125
9.	11,1	17,6	0,087
7.	8,0	12,8	0,075
8.	16,3	10,5	-0,072
20.	24,6	31,7	0,072
16.	35,3	41,6	0,058
19.	30,4	36,4	0,057
3.	5,0	2,6	-0,052
21.	0,3	1,1	0,050
13.	9,5	6,4	-0,049
1.	4,8	6,7	0,039
29.	0,9	0,2	-0,038
15.	23,0	26,4	0,035
25.	0,9	0,4	-0,025
27.	1,0	1,6	0,025
30.	0,5	1,0	0,025
2.	11,2	12,5	0,018
5.	9,8	11,1	0,018
24.	1,3	0,9	-0,018
23.	0,8	1,1	0,015
4.	8,2	8,9	0,012
28.	0,1	0,2	0,011
22.	0,2	0,2	0,006
14.	10,9	10,5	-0,005
18.	23,5	22,9	-0,005
26.	0,7	0,7	0,001

Mierne vecne významný rozdiel v neriešenosti úloh medzi žiakmi GYM a SOŠ dosiahla jedna položka č. 17. Bola to úloha o goniometrickej funkcii vyžadujúca krátky výpočet koreňov goniometrickej rovnice a znalosť periodickosti goniometrickej funkcie.

Vysoká neriešenosť položiek č. 6, 10, 11, 12 a 17 bola spôsobená vysokou neriešenosťou úloh žiakmi SOŠ. Naopak, najvýraznejší rozdiel v neriešenosti v prospech žiakov SOŠ v porovnaní so žiakmi GYM sme zaznamenali u položky č. 8.

Celkove najvyššiu neriešenosť sme zaznamenali u ÚKO, ktoré boli zároveň pre žiakov najobťažnejšie (č. 10, 15, 16, 18, 19 a 20). Riešenie týchto úloh vyžadovalo myšlienku, ako nájsť správnu odpoveď, alebo časovo dlhší náročnejší výpočet, prípadne kombináciu oboch dôvodov. Maturanti mali pri riešení týchto úloh preukázať zručnosti pri práci s premennými v algebraických výrazoch a schopnosť využiť obrázok a analyzovať údaje na ňom zobrazené. Predpokladáme, že žiaci, ktorí na tieto úlohy neuviedli odpoveď, buď nevedeli, ako príklad vypočítať, alebo uprednostnili úlohy, ktorých riešenie mohli určiť jednoduchšie a rýchlejšie.

3.6 Súhrnné charakteristiky položiek

Súhrnné charakteristiky jednotlivých položiek prinášame vo forme prehľadnej tabuľky. Pri každej položke uvádzame:

- P – číslo položky.
- Obťažnosť položky, aj pre rôzne skupiny žiakov:
 - Celková – percentuálny podiel všetkých žiakov, ktorí správne odpovedali na položku,
 - GYM – percentuálny podiel žiakov GYM, ktorí správne odpovedali na položku,
 - SOŠ – percentuálny podiel žiakov SOŠ, ktorí správne odpovedali na položku,
 - CH – percentuálny podiel chlapcov, ktorí správne odpovedali na položku,
 - D – percentuálny podiel dievčat, ktoré správne odpovedali na položku.

Veľmi ľahké položky sú zvýraznené hnedou farbou, veľmi obťažné položky žltou farbou.

- Neriešenosť položky:
 - Celková – percentuálny podiel všetkých žiakov, ktorí na položku neuviedli odpoveď,
 - GYM – percentuálny podiel žiakov GYM, ktorí na položku neuviedli odpoveď,
 - SOŠ – percentuálny podiel žiakov SOŠ, ktorí na položku neuviedli odpoveď.

Položky s vysokou neriešenosťou sú zvýraznené zelenou farbou.

- Citlivosť položky – rozlišovacia sila položky.
- Point Biserial $P. Bis$ – medzipoložková korelácia, korelácia medzi úspešnosťou žiaka v položke a celkovou úspešnosťou žiaka v teste.

Položky s nízkou hodnotou $P. Bis$ sú zvýraznené žltou farbou.

Tab. 35 Súhrnné charakteristiky položiek testu MAT15 – 1203/1104

P	Obťažnosť %					Neriešenosť %			Citlivosť %	P. Bis.
	Celková	GYM	SOŠ	CH	D	Celková	GYM	SOŠ		
1.	84,5	88,9	72,7	85,0	83,4	5,3	4,8	6,7	46,6	0,38
2.	74,5	78,6	63,5	74,2	75,1	11,6	11,2	12,5	48,1	0,33
3.	28,8	33,0	17,5	29,3	27,6	4,3	5,0	2,6	49,0	0,31
4.	69,6	75,6	53,7	68,8	71,3	8,4	8,2	8,9	60,3	0,39
5.	43,9	51,7	23,4	43,6	44,7	10,2	9,8	11,1	72,0	0,47
6.	34,6	43,1	12,1	32,7	38,7	16,6	12,6	27,1	73,8	0,52
7.	67,3	73,5	50,8	68,2	65,3	9,3	8,0	12,8	69,5	0,44
8.	66,6	66,4	67,3	68,6	62,3	14,7	16,3	10,5	46,7	0,28
9.	55,3	63,8	32,8	54,9	56,4	12,9	11,1	17,6	83,3	0,53
10.	44,2	52,4	22,4	45,6	41,1	22,6	19,4	31,1	77,2	0,50
11.	31,0	40,4	6,1	30,9	31,2	12,1	9,6	19,0	63,2	0,43
12.	52,0	62,3	24,9	51,5	53,2	19,1	14,2	32,1	83,6	0,55
13.	33,6	37,6	22,7	33,3	34,1	8,6	9,5	6,4	61,1	0,40
14.	60,0	64,9	47,3	63,6	52,3	10,8	10,9	10,5	70,1	0,43
15.	35,9	41,7	20,8	36,7	34,3	24,0	23,0	26,4	75,9	0,51
16.	32,7	39,2	15,7	32,0	34,3	37,1	35,3	41,6	66,5	0,44
17.	47,7	57,4	22,0	47,0	49,3	12,1	7,5	24,6	79,7	0,50
18.	10,3	12,8	3,5	10,0	10,8	23,3	23,5	22,9	32,8	0,36
19.	14,8	19,5	2,2	14,1	16,2	32,1	30,4	36,4	48,9	0,46
20.	18,8	24,1	4,8	18,5	19,5	26,6	24,6	31,7	52,6	0,44
21.	53,9	63,8	27,6	51,8	58,4	0,5	0,3	1,1	67,8	0,42
22.	63,9	77,9	26,5	60,5	71,2	0,2	0,2	0,2	67,4	0,43
23.	29,4	32,0	22,7	29,5	29,4	0,9	0,8	1,1	33,7	0,20
24.	54,5	59,5	41,1	55,0	53,3	1,2	1,3	0,9	48,3	0,28
25.	64,8	71,5	47,2	62,9	69,0	0,8	0,9	0,4	50,7	0,31
26.	43,7	50,1	26,7	44,3	42,4	0,7	0,7	0,8	55,5	0,34
27.	42,9	50,3	23,2	41,1	46,7	1,2	1,0	1,6	60,2	0,38
28.	35,3	40,8	20,9	35,4	35,2	0,1	0,1	0,2	51,4	0,32
29.	40,7	41,8	37,7	42,2	37,5	0,7	0,9	0,2	38,3	0,21
30.	39,9	44,1	28,6	40,1	39,3	0,7	0,5	1,0	52,5	0,32

4 Výsledky RT EČ MS z matematiky podľa vyhodnotenia IRT

V nasledujúcej tabuľke a grafoch uvádzame charakteristiky testu a testovaných žiakov.

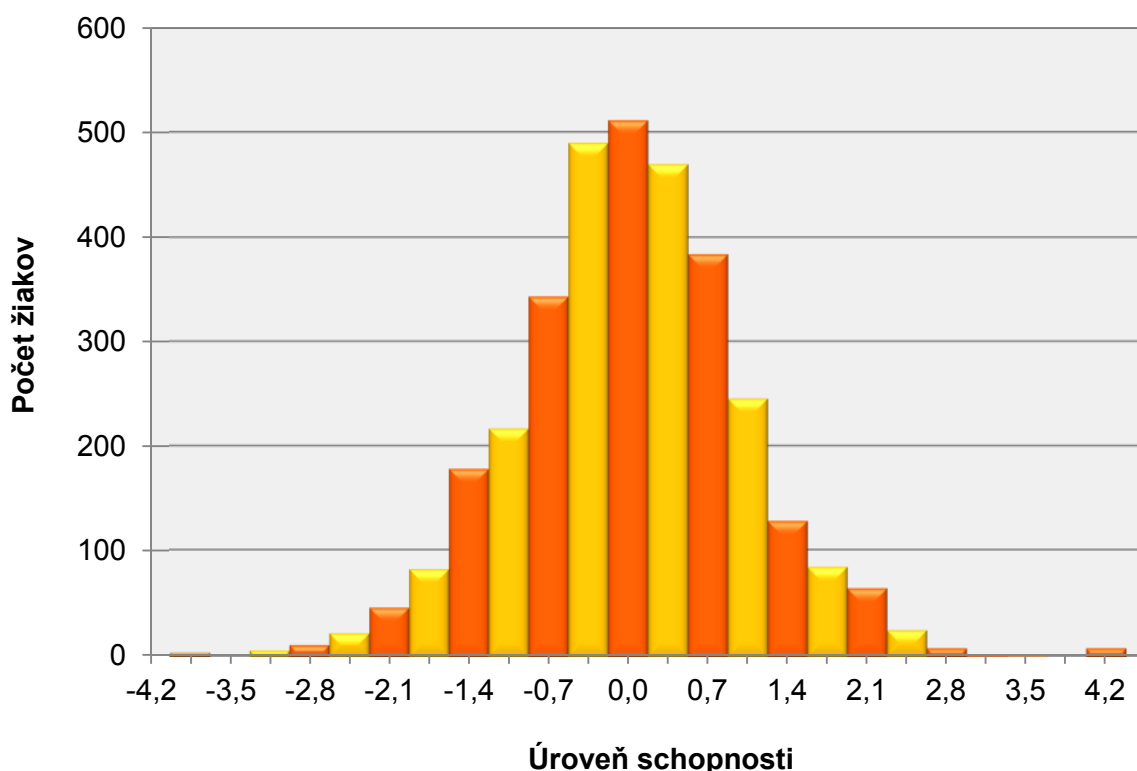
Analýzu prostredníctvom IRT sme vykonali na zástupnom variante testu 1203/1104, ktorému zodpovedá aj číslovanie položiek.

Tab. 36 Výsledné psychometrické charakteristiky položiek testu MAT15 (podľa IRT)

	Minimum	Maximum	Priemer	Smerodajná odchýlka
Obťažnosť položiek	- 1,436	1,818	0,204	0,853
Rozlišovacia schopnosť položiek	0,308	1,210	0,744	0,254

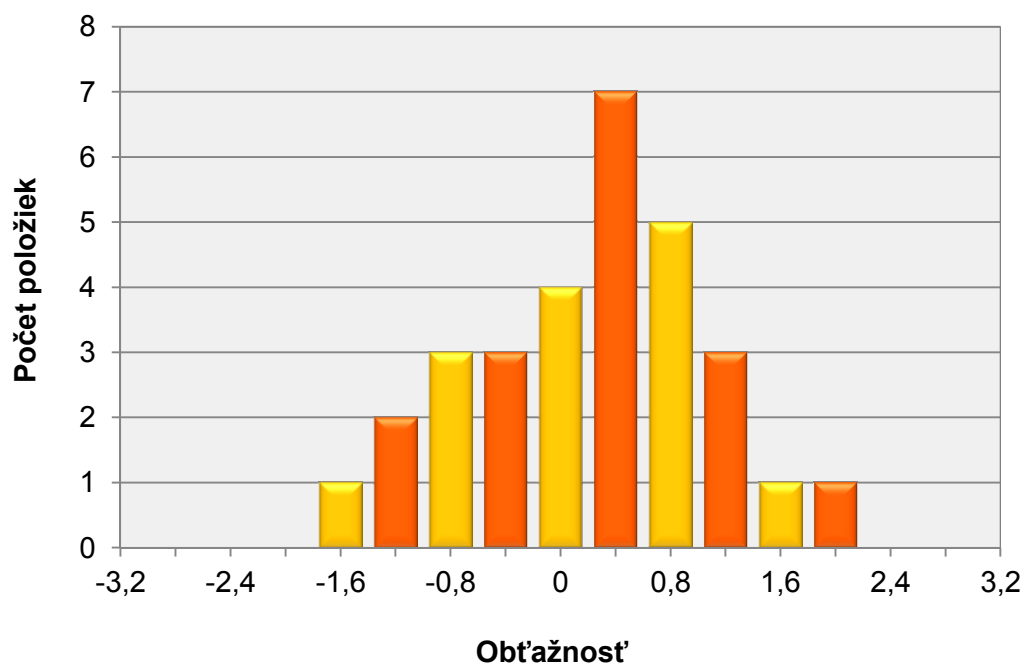
Pri analýze testu MAT15 metódou IRT sme pracovali s dvojparametrovým modelom (parametrami boli obťažnosť položky a rozlišovacia schopnosť položky). Výsledky analýz ukazujú primeranú zhodu dát s použitým modelom.

Položka č. 23 vykazovala mierne rozdielne fungovanie od predpokladu modelu.



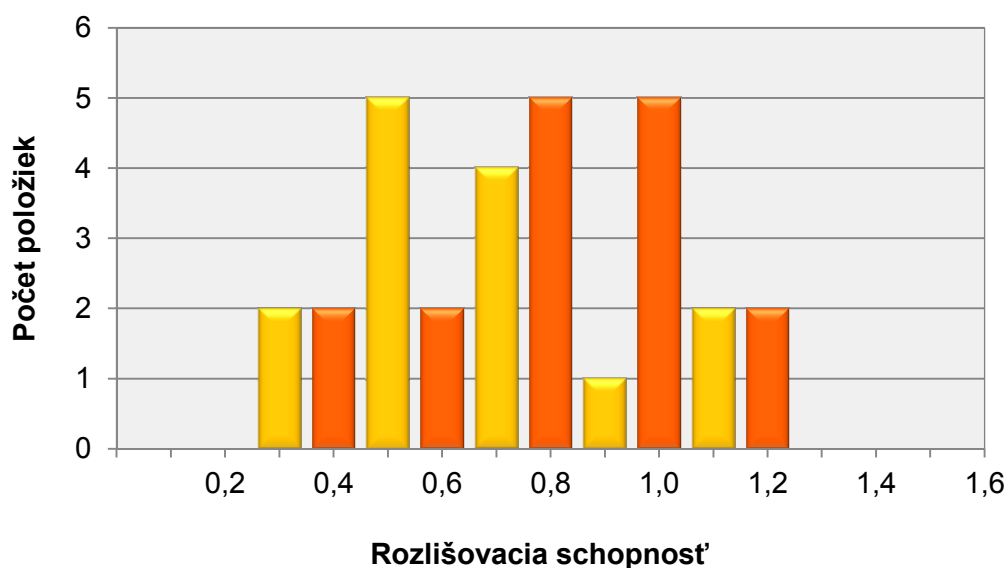
Obr. 20 Histogram rozloženia početností úrovne schopnosti žiakov v MAT15 – 1203/1104

Rozloženie úrovne schopnosti žiakov má tvar podobný normálnemu rozloženiu. Hodnoty úrovne schopnosti je možné interpretovať ako smerodajné odchýlky pri normálnom rozložení.



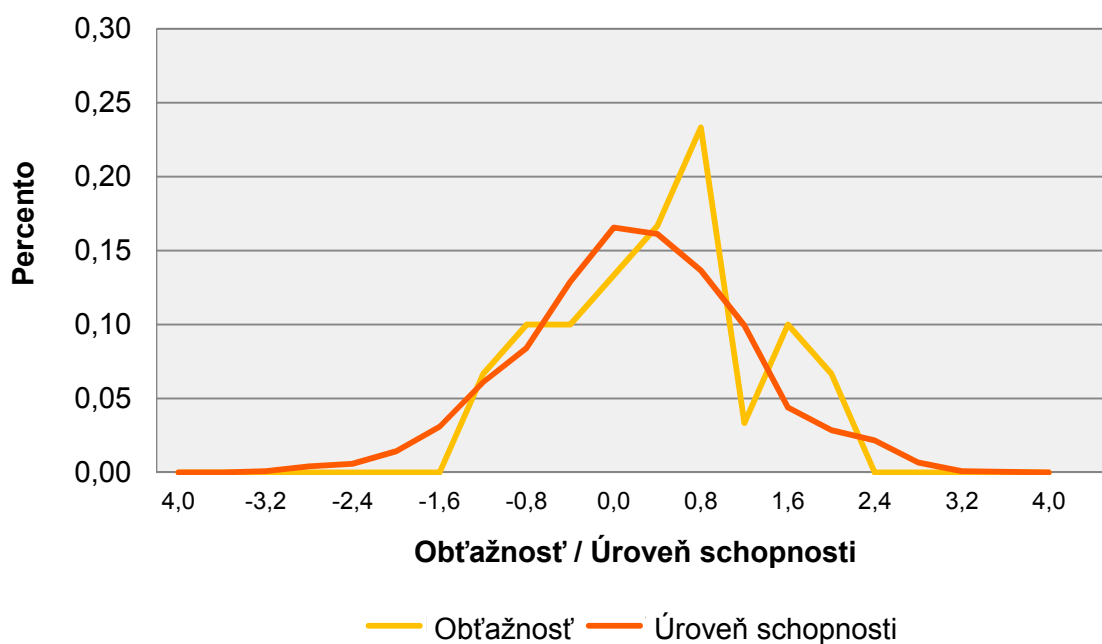
Obr. 21 Počet položiek v MAT15 podľa obťažnosti

Zastúpenie položiek testu MAT15 z hľadiska obťažnosti nebolo rovnomerné, zodpovedalo konštrukcii rozlišovacieho NR testu. Najľahšie boli položky č. 1, 2 a 8, najobťažnejšími boli položky č. 3, 18, 19, 20 a 23. Ostatné položky mali obťažnosť z intervalu $(-1,0; +1,0)$.



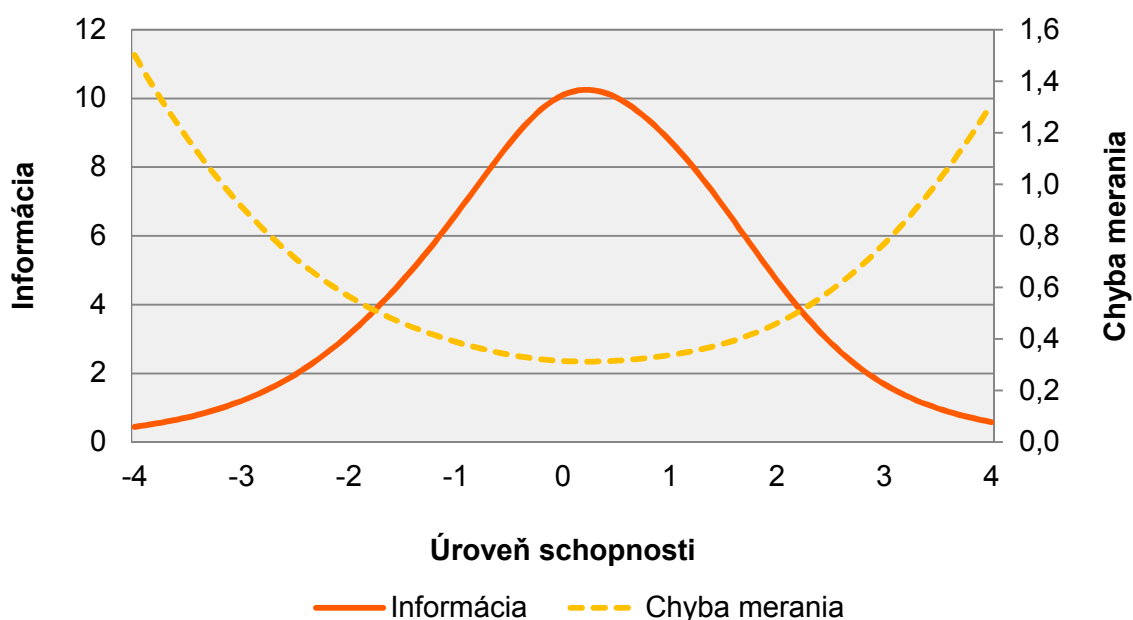
Obr. 22 Počet položiek v MAT15 podľa rozlišovacej schopnosti

Rozlišovacia schopnosť položiek bola dobrá. Najmenšiu rozlišovaciu schopnosť mali položky č. 8, 23, 24 a 29, najväčšiu rozlišovaciu schopnosť položky č. 6, 9, 12 a 19. Ostatné položky mali rozlišovaciu schopnosť z intervalu $(0,5; 1,0)$.



Obr. 23 Vzťah medzi úrovňou schopnosti žiakov a obťažnosťou MAT15

Test MAT15 obsahoval viacero ťažších položiek, dôsledkom čoho žiaci v teste dosiahli mierne nižšiu priemernú úspešnosť ako 50,0 %. Celkove boli v teste zastúpené položky všetkých úrovní obťažnosti.



Obr. 24 Informačná funkcia a chyba merania MAT15 podľa úrovne schopnosti žiakov

Test priniesol najviac informácií o priemerných žiakoch. Test meral najpresnejšie na úrovni schopnosti na intervale $(-0,5; +1,0)$.

5 Vyhodnotenie položiek testu RT EČ MS z matematiky

V tejto kapitole prinášame komplexné vyhodnotenie jednotlivých položiek. Hodnotenie každej položky, označenej číslom podľa testu MAT15 – 1203/1104, sme rozčlenili na nasledovné časti:

Téma – Uvádzame číslo a názov tematického celku podľa Cieľových požiadaviek na vedomosti a zručnosti maturantov z matematiky. Ak niektorá úloha svojim obsahom zasahovala do viacerých tematických celkov, úlohu sme zaradili do celku, ktorého poznatky boli rozhodujúce pre úspešné vyriešenie úlohy.

Zadanie – Uvádzame presné znenie zadania úlohy podľa testu MAT15 – 1203.

Pojmy, vlastnosti a vzťahy

Žiak vie – Uvádzame pojmy, vlastnosti, vzťahy a zručnosti potrebné k vyriešeniu úlohy, uvedené v Cieľových požiadavkách na vedomosti a zručnosti maturantov z matematiky. Pojmy, vlastnosti, vzťahy a zručnosti, ktoré nie sú súčasťou štátneho vzdelávacieho programu pre GYM a ostatné druhy stredných škôl, sú v texte zapísané *kurzívou*.

Myšlienkové operácie – Uvádzame kognitívnu náročnosť myšlienkovej operácie potrebnej na vyriešenie úlohy žiakom.

Predpokladaná obťažnosť – Uvádzame predpokladanú náročnosť riešenia úlohy (čas, rozsah, algebraická náročnosť výpočtov atď.) podľa autorov úlohy.

Štatistické vyhodnotenie CTT – Uvádzame štatistické vyhodnotenie výsledkov žiakov v položke podľa vyhodnotenia CTT metódou, a to úspešnosť žiakov (celkovú, žiakov GYM a SOŠ, chlapcov a dievčat), neriešenosť úlohy (celkovú, žiakov GYM a SOŠ), citlivosť a medzipoložkovú koreláciu *Point Biserial*. Prikladáme aj graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí podľa výkonnostných skupín žiakov, rozdelených podľa celkovej výkonnosti žiakov v teste.

Štatistické vyhodnotenie IRT – Uvádzame obťažnosť a rozlišovaciu schopnosť položky podľa vyhodnotenia výsledkov žiakov IRT metódou.

K ÚKO prikladáme graf s charakteristickou krivkou položky. Výraznou čiernou farbou je na každom grafe znázornená očakávaná pravdepodobnosť voľby správnej odpovede podľa modelu (charakteristická krivka položky), menej výraznou červenou čiarou je zobrazená skutočná pravdepodobnosť voľby správnej odpovede žiakmi podľa úrovne schopnosti.

Obťažnosť položky môžeme približne určiť podľa polohy charakteristickej krivky položky v grafe. Čím vyššie a viac vľavo je krivka v grafe umiestnená, tým je položka ľahšia.

Rozlišovaciu schopnosť položky môžeme zistiť podľa priebehu a strmosti charakteristickej krivky položky v grafe. Čím rýchlejšie sa zvyšuje hodnota pravdepodobnosti voľby správnej odpovede so zvyšujúcou sa úrovňou schopnosti žiakov (charakteristická krivka je strmšia), tým lepšie položka žiakov rozlišuje.

K ÚVO prikladáme graf voľby odpovedí. Krivkami rôznej farby sú znázornené pravdepodobnosti voľby jednotlivých odpovedí každou výkonnostnou skupinou žiakov, od najlepších žiakov až po priemerných a najslabších. Podrobnejšie vysvetlenie pojmov použitých pri spracovaní výsledkov žiakov CTT a IRT metódou uvádzame v prílohe správy.

Najčastejšie odpovede a ich frekvencia – Uvádzame najčastejšie odpovede žiakov na ÚKO a ich percentuálny podiel medzi všetkými uvedenými odpoveďami.

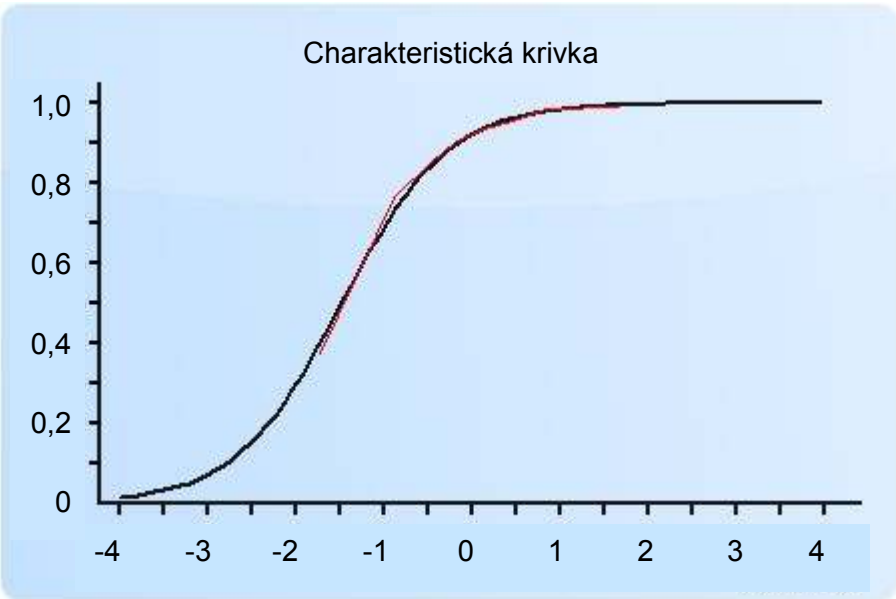
Odpovede, ich frekvencia a Point Biserial – Uvádzame percentuálny podiel voľby jednotlivých ponúknutých odpovedí na ÚVO a ich medzipoložkovú koreláciu *Point Biserial*. Správna odpoveď je zapísaná tučným písmom a podfarbená žltou farbou.

Riešenie – Uvádzame úplné riešenie úlohy jedným z možných postupov riešenia úlohy, o ktorom predpokladáme, že ho žiaci najčastejšie použili pri určení výsledku úlohy.

Hodnotenie – Opisujeme zameranie, podstatu, cieľ úlohy a činnosti žiakov potrebné k úspešnému vyriešeniu úlohy. Uvádzame súvis úlohy so štátnym vzdelávacím programom pre GYM, s Cieľovými požiadavkami na vedomosti a zručnosti maturantov z matematiky a s aktuálnymi učebnicami matematiky pre GYM. Komentujeme úspešnosť jednotlivých skupín žiakov pri riešení úlohy a mieru neriešenosti úlohy. Analyzujeme možné príčiny uvedenia nesprávnych odpovedí. Hodnotíme aj citlivosť a rozlišovaciu schopnosť jednotlivých položiek.

Podobné úlohy – Uvádzame zadanie jedného alebo viacerých príkladov, ktorých obsah a predpokladané riešenie sú podobné jednotlivým úlohám testu MAT15. Snažíme sa takto preukázať skutočnosť, že úlohy testu MAT15 neboli ojedinelými, špeciálnej skupine žiakov určenými úlohami z matematických súťaží a olympiád, ale úlohy známe a ľahko dostupné všetkým budúcim maturantom z matematiky. V súčasnosti predmet matematika podľa štátneho vzdelávacieho programu pre GYM a aj pre ostatné stredné školy nepripravuje žiakov na maturitnú skúšku z matematiky. Zodpovedá tomu aj obsah aktuálnych učebníc matematiky pre GYM, ku ktorým momentálne ešte zbierky úloh neexistujú (s výnimkou 1. časti učebnice pre 1. ročník). Preto sme príklady podobné úlohám v teste MAT15 hľadali najmä v predchádzajúcich radoch učebníc matematiky a k nim príslušných zbierkach úloh, v ktorých obsah a rozsah učiva ešte zodpovedal požiadavkám na MS z matematiky. Tieto knihy sú stále dostupné v skladoch učebníc GYM a SOŠ a pravdepodobne sa používajú na voliteľných hodinách zameraných na matematiku a prípravu na MS z matematiky.

Príklad č. 01		Téma: 5.2 Štatistika													
Zadanie:															
Priemerná výška všetkých žiakov triedy je 162 cm. Výška triednej učiteľky je 178 cm. Priemerná výška všetkých žiakov triedy a triednej učiteľky je 163 cm. Vypočítajte počet žiakov triedy.															
Pojmy, vlastnosti a vzťahy: základný súbor, aritmetický priemer															
Žiak vie: vypočítať aritmetický priemer daných čísel															
Myšlienkové operácie: zložitejšie		Predpokladaná obťažnosť: stredne obťažná úloha													
Riešenie:															
Zapíšeme v centimetroch aritmetický priemer výšky x žiakov, každého s výškou 162 cm a 1 učiteľky s výškou 178 cm a položíme ho rovný výške 163 cm. Z rovnice vypočítame počet žiakov triedy x :															
$\frac{162 \cdot x + 178 \cdot 1}{x + 1} = 163$															
$162x + 178 = 163x + 163$															
$x = 15$															
Štatistické vyhodnotenie CTT:															
úspešnosť	celková	84,5 %													
	žiaci GYM	88,9 %													
	žiaci SOŠ	72,7 %													
	chlapci	85,0 %													
	dievčatá	83,4 %													
neriešenosť	celková	5,3 %													
	žiaci GYM	4,8 %													
	žiaci SOŠ	6,7 %													
citlivosť		46,6 %													
P. Bis.		0,38													
Graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí:															
<table><thead><tr><th>Výkonnostná skupina</th><th>Priemerná úspešnosť v %</th></tr></thead><tbody><tr><td>5</td><td>52</td></tr><tr><td>4</td><td>82</td></tr><tr><td>3</td><td>90</td></tr><tr><td>2</td><td>95</td></tr><tr><td>1</td><td>98</td></tr></tbody></table>				Výkonnostná skupina	Priemerná úspešnosť v %	5	52	4	82	3	90	2	95	1	98
Výkonnostná skupina	Priemerná úspešnosť v %														
5	52														
4	82														
3	90														
2	95														
1	98														

Štatistické vyhodnotenie IRT:		obťažnosť	– 1,436	rozlišovacia schopnosť:	0,967
Najčastejšie odpovede		Charakteristická krivka 			
a ich frekvencia:					
15	84,7 %				
–	5,3 %				
14	1,0 %				
16	1,0 %				
18	0,6 %				
20	0,6 %				
10	0,6 %				
Hodnotenie:					
Úloha overovala správne pochopenie pojmu aritmetický priemer testovanými žiakmi. Žiaci mali zapísať aritmetický priemer neznámeho počtu žiakov triedy a jednej pani učiteľky a tento lomený výraz mali dať do rovnosti so známym výškovým priemerom. Všetky pojmy, vlastnosti, vzťahy a zručnosti potrebné k vyriešeniu úlohy sú obsahom štátneho vzdelávacieho programu pre GYM. Nájdeme ich aj v prvej časti aktuálnej učebnice matematiky pre 3. ročník GYM. Pojem aritmetického priemeru je známy už aj žiakom základných škôl, napríklad z výpočtu výslednej priemernej polročnej alebo koncoročnej známky zo známok získaných počas polroka. Žiaci preto nemali problém s riešením úlohy. Správnu odpoveď uviedlo 84,5 % žiakov. Žiaci GYM boli mierne úspešnejší ako žiaci SOŠ. Úspešnosť chlapcov a dievčat bola porovnateľná. Odpoveď neuviedol približne každý dvadsiaty žiak. Nesprávne odpovede žiaci zrejme získali nie výpočtom, ale pokusným určovaním možného počtu žiakov triedy a následného overovania priemeru výšok žiakov spolu s výškou triednej učiteľky, pri ktorom sa zrejme dopustili numerickej chyby. Úloha žiakov dostatočne nerozlíšila, až na celkove v teste najmenej úspešnú skupinu žiakov, čo pozorujeme na grafe distribúcie úspešností žiakov podľa výkonnostných skupín. Úloha bola pre všetkých žiakov ľahká, jej kontext dostatočne známy z každodenného života a pravdepodobne úlohu ako prvú v teste žiaci riešili dovedy, kým sa nedopracovali ku správne výsledku, ktorý si mohli overiť aj skúškou správnosti.					

Štatistická analýza odpovedí žiakov metódou IRT vyhodnotila úlohu ako jednoduchú položku s dobrou rozlišovacou schopnosťou.

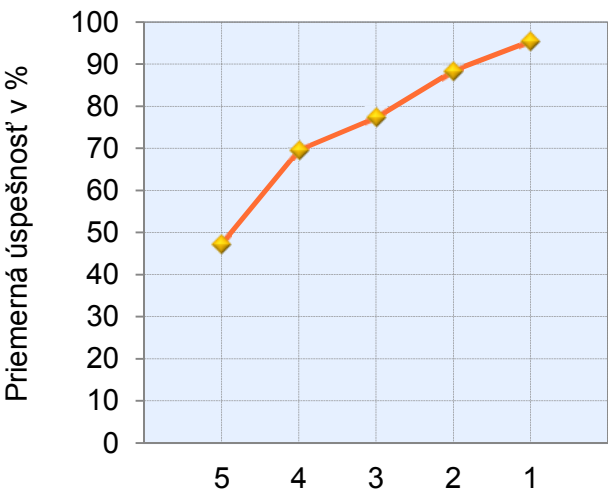
Podobné úlohy:

- Pätnásť žiakov malo vekový priemer 12 rokov. Keď sa k nim pridala triedna učiteľka, ich priemer vzrástol presne o rok. Koľko rokov mala učiteľka?

(Hrdina, L. – Maxian, M.: Príklady z matematiky pre osemročné gymnáziá. Príma – Sekunda – Tercia – Kvarta. SPN: Bratislava 1997, s. 81)

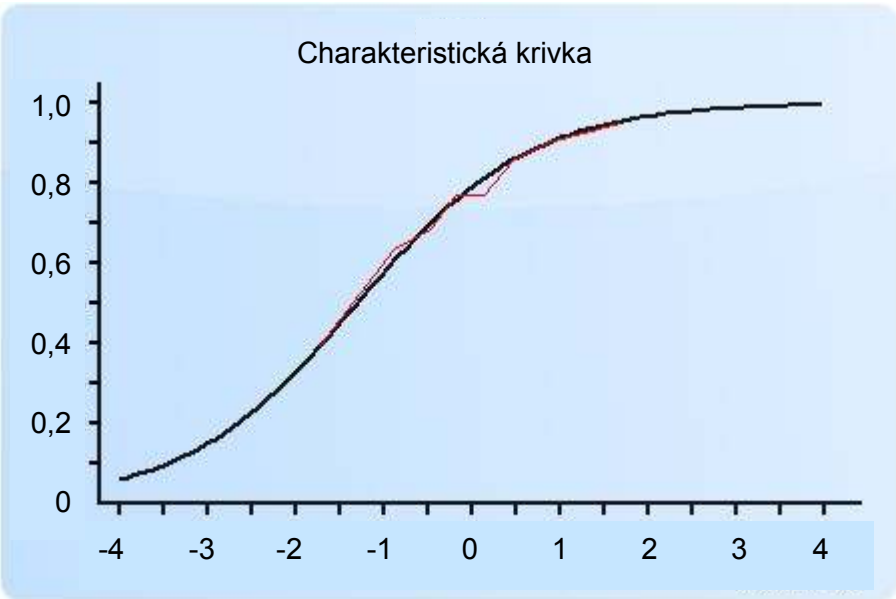
Príklad č. 02	Téma: 1.3 Teória čísel	
Zadanie:		
V dvojčífernóm čísle AB je $A > B$. Z čísla AB sme pridaním ďalšej cifry A alebo B vytvorili niekoľko trojčíferných čísel. Trojčíferné číslo ABB je deliteľné číslom 7, číslo BAB je deliteľné číslom 4 a číslo ABA je deliteľné číslom 3. Nájdite pôvodné dvojčíferné číslo AB .		
Pojmy, vlastnosti a vzťahy: deliteľ, deliteľnosť, znaky deliteľnosti číslom 3 a 4		
Žiak vie: zistiť bez delenia, či je dané číslo deliteľné niektorým z čísel uvedených v znakoch deliteľnosti, pri riešení jednoduchých úloh využiť pravidelnosť rozloženia násobkov celých čísel na číselnej osi, nájsť celočíselné riešenia úloh, v ktorých možno jednoduchou úvahou určiť vhodnú konečnú množinu, ktorá hľadané riešenia musí obsahovať (riešenia úlohy potom nájde preverení jednotlivých prvkov získanej konečnej množiny)		
Myšlienkové operácie: tvorivé		Predpokladaná obťažnosť: stredne obťažná úloha
Štatistické vyhodnotenie CTT:		
úspešnosť	celková	74,5 %
	žiaci GYM	78,6 %
	žiaci SOŠ	63,5 %
	chlapci	74,2 %
	dievčatá	75,1 %
neriešenosť	celková	11,6 %
	žiaci GYM	11,2 %
	žiaci SOŠ	12,5 %
citlivosť		48,1 %
P. Bis.		0,33

Graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí:



Výkonnostná skupina	Priemerná úspešnosť v %
5	48,1
4	74,2
3	78,6
2	63,5
1	74,5

Výkonnostná skupina

Štatistické vyhodnotenie IRT:		obťažnosť	– 1,258	rozlišovacia schopnosť:	0,590
Najčastejšie odpovede a ich frekvencia:		Charakteristická krivka 			
96	74,5 %				
–	11,6 %				
32	1,6 %				
52	1,2 %				
64	0,9 %				
84	0,9 %				
36	0,6 %				

Riešenie:

Úlohu vyriešime vypisovaním možností a overením, ktorá z možností vyhovuje. Začneme číslom BAB , ktoré má byť deliteľné číslom 4. Podľa znaku deliteľnosti, posledné dvojčísle, teda pôvodné číslo AB , má byť deliteľné číslom 4. Vypíšeme takéto čísla, pričom dodržíme podmienku $A > B$. Prečiarkneme tie, z ktorých sa pridaním cifry B nedá vytvoriť číslo BAB :

20, 40, 60, 80, 32, 52, 72, 92, 64, 84, 76, 96

Z vyhovujúcich čísel vytvoríme číslo ABA pridaním číslice A a overíme deliteľnosť číslom 3:

323, 525, 727, 929, 646, 848, 767, 969

Zvyšné dve čísla zmeníme na tvar ABB (522, 966), vydáme na kalkulačke číslom 7 a zistíme, že deliteľné je iba číslo 966. Hľadané pôvodné dvojčiferné číslo AB je teda 96.

Hodnotenie:	
Podstatou úlohy bola deliteľnosť prirodzených čísel. Žiaci mali pomocou vypisovania možností a ich postupného overovania zistiť správne riešenie úlohy. Takýto postup riešenia úlohy je opísaný aj v Cieľových požiadavkách na vedomosti a zručnosti maturantov z matematiky a je veľmi častý práve pri riešení úloh zameraných na deliteľnosť prirodzených alebo celých čísel a delenie so zvyškom.	
Žiaci sa s deliteľnosťou prirodzených čísel stretávajú už počas štúdia základnej školy. Objavia a aplikujú znaky deliteľnosti, dokážu rozhodnúť, či je číslo prvočíslo alebo číslom zloženým, vedia nájsť najväčší spoločný deliteľ a najmenší spoločný násobok čísel.	

Štátny vzdelávací program pre GYM teóriu čísel a s ňou spojenú deliteľnosť neobsahuje. Teóriu čísel však obsahujú Cieľové požiadavky na vedomosti a zručnosti maturantov z matematiky, takmer v takom rozsahu, ako boli prezentované v učebniciach matematiky pre GYM a SOŠ, ktoré predchádzali súčasne platným učebniciam. Zostáva teda na učiteľoch matematiky, či a v akom rozsahu zaradia teóriu čísel do vyučovania. Môžu tak urobiť rozšírením školského vzdelávacieho programu predmetu matematika so súčasným zvýšením hodinovej dotácie predmetu alebo zaradiť teóriu čísel do obsahu niektorého voliteľného predmetu s matematickým zameraním. V opačnom prípade zostáva žiakovi samostatné štúdium staršej literatúry, obsahujúcej kapitoly z teórie čísel.

Úloha bola zaradená medzi úvodné úlohy testu napriek tomu, že s úlohami z teórie čísel sa žiaci počas štúdia stretávajú zriedkavo. Dôvodom bola vysoká úspešnosť žiakov pri riešení úlohy počas pilotných testovaní a fakt, že správne riešenie úlohy sa dá získať aj pokusným overovaním možností, bez konkrétneho cieleného postupu výpočtu výsledku.

Správny výsledok uviedli tri štvrtiny žiakov. Žiaci GYM boli mierne úspešnejší než žiaci SOŠ. Úspešnosť chlapcov a dievčat bola takmer rovnaká. Odpoveď neuviedla asi desatina žiakov GYM aj SOŠ.

Najčastejšími chybnými odpoveďami boli čísla, ktoré po doplnení na trojciferné číslo podľa zadania vyhovovali dvom, ale nie všetkým trom uvedeným podmienkam v zadaní úlohy. Podiel týchto odpovedí bol však takmer zanedbateľný.

Úloha bola menej citlivá, pretože väčšina žiakov všetkých výkonnostných skupín vyriešila úlohu správne. Žiaci zrejme riešili úlohu a hľadali správne dvojčiferné číslo dovtedy, kým nenašli riešenie vyhovujúce všetkým trom podmienkam zadania úlohy. Žiaci, ktorí si nezvolili vhodnú stratégiu, však riešením úlohy mohli stratiť viac času, než predpokladali.

Štatistická analýza odpovedí žiakov metódou IRT vyhodnotila úlohu ako jednoduchú položku s dobrou rozlišovacou schopnosťou.

Podobné úlohy:

- Určte všetky štvorciferné čísla deliteľné 4, ktoré majú tieto 3 vlastnosti:

Ak v ňom vymeníme prvé dve číslice, dostaneme číslo deliteľné 7.

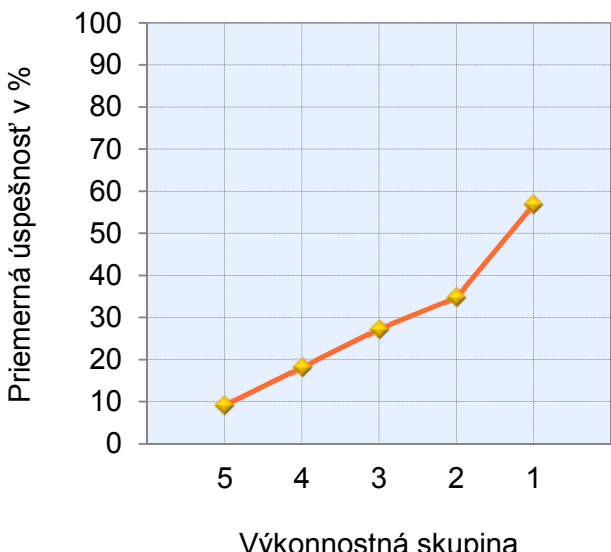
Ak v ňom vymeníme prostredné dve číslice, dostaneme číslo deliteľné 5.

Ak v ňom vymeníme posledné dve číslice, dostaneme číslo deliteľné 9.

(Hecht, T. – Černek, P.: Matematika pre 1. ročník gymnázií a SOŠ. Zošit 5 Zbierka úloh. Orbis Pictus Istropolitana: Bratislava 2001, s. 6)

Príklad č. 03		Téma: 5.1 Kombinatorika a pravdepodobnosť	
Zadanie:			
Traja chlapci a tri dievčatá si chcú urobiť spoločnú fotku. Koľkými rôznymi spôsobmi sa môžu posadiť vedľa seba na jednu lavicu tak, aby sa navzájom striedali chlapci s dievčatami a vždy vznikla iná fotka?			
Pojmy, vlastnosti a vzťahy: faktoriál, $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n - 1) \cdot n$, permutácie, $P_n = n!$, kombinatorické pravidlo súčinu			
Žiak vie: riešiť jednoduché kombinatorické úlohy použitím pravidla súčinu, využitím vzťahov pre počet permutácií			
Myšlienkové operácie: zložitejšie		Predpokladaná obťažnosť: ľahká úloha	
Riešenie:			
Podľa zadania môžu nastať dve situácie na lavici zľava doprava: CHDCHDCHD alebo DCHDCHDCH. Počet všetkých rôznych poradí všetkých troch chlapcov vypočítame $3!$, podobne počet všetkých poradí dievčat $3!$. Ku každej z možností poradia chlapcov na lavici je každé z poradí posadenia dievčat novou možnosťou poradia všetkých osôb, preto využijeme pravidlo súčinu. Všetky takto vzniknuté poradia môžu vzniknúť dvoma spôsobmi, a to, či je prvý chlapec alebo dievča. Všetkých možností je teda:			
$3! \cdot 3! \cdot 2 = 72$			
Štatistické vyhodnotenie CTT:			
úspešnosť	celková	28,8 %	
	žiaci GYM	33,0 %	
	žiaci SOŠ	17,5 %	
	chlapci	29,3 %	
	dievčatá	27,6 %	
neriešenosť	celková	4,3 %	
	žiaci GYM	5,0 %	
	žiaci SOŠ	2,6 %	
citlivosť		49,0 %	
P. Bis.		0,31	

Graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí:



Výkonnostná skupina	Priemerná úspešnosť v %
5	8,8
4	17,5
3	27,6
2	35,0
1	57,1

Štatistické vyhodnotenie IRT:		obťažnosť	1,233	rozlišovacia schopnosť:	0,490
Najčastejšie odpovede a ich frekvencia:		Charakteristická krivka			
72	28,8 %				
36	27,9 %				
–	4,3 %				
720	4,3 %				
12	4,0 %				
24	3,6 %				
18	3,3 %				

Hodnotenie:

Kombinatorická úloha bola zameraná na určenie počtu poradí – permutácií medzi tromi chlapcami a tromi dievčatami. Žiaci si mali uvedomiť, že nemôžu zlúčiť chlapcov s dievčatami a že podľa zadania na kraji lavice môže sedieť aj chlapec, aj dievča.

Úloha testovala aj čítanie s porozumením. Z textu „...si chcú urobiť spoločnú fotku...“ mali žiaci usúdiť, že na fotografii majú byť všetci šiesti účastníci deja a ani jeden z nich nebude fotografom. Z textu „...striedali chlapci s dievčatami...“ mali žiaci pochopiť, že na jednom kraji lavice môže sedieť chlapec a vtedy na druhom konci lavice bude sedieť dievča, ale môže to byť aj naopak. Uvedená časť textu zadania neindikovala, že poradia môžu začať len chlapcom a musia končiť dievčaťom.

Pojmy, vlastnosti, vzťahy a zručnosti potrebné k vyriešeniu úlohy sú súčasťou štátneho vzdelávacieho programu pre GYM. Kapitolu venovanú kombinatorike nájdeme aj v druhej časti aktuálnej učebnice matematiky pre 1. ročník GYM.

Úlohu správne vyriešilo iba 28,8 % žiakov. Žiaci GYM boli takmer dvojnásobne úspešnejší ako žiaci SOŠ. Priemerná úspešnosť chlapcov a dievčat bola takmer rovnaká. Odpoveď neuviedli 4,3 % žiakov.

27,9 % žiakov, teda približne rovnaký počet ako žiakov, ktorí odpovedali správne, uviedlo nesprávnu odpoveď 36. Žiaci nezapočítali možnosti, v ktorých poradia na lavičke začínajú opačným pohlavím. Nevieme zistiť, či žiaci na takéto možnosti nemysleli alebo ich vedome vylúčili na základe formulácie zadania úlohy.

Nesprávnu odpoveď 720, čo je hodnota výrazu $6!$, uviedli 4,3 % žiakov. Žiaci všetkých troch chlapcov a tri dievčatá zlúčili do jednej skupiny a vypočítali počet poradí, koľkými si môže šesť ľudí sadnúť vedľa seba na šesť miest, bez akejkoľvek obmedzujúcej podmienky.

3,6 % žiakov, ktorí uviedli nesprávnu odpoveď 24, použilo k riešeniu úlohy kombinatorické pravidlo súčtu $(3! + 3!) \cdot 2$ namiesto pravidla súčinu.

4,0 % žiakov, ktorí uviedli nesprávnu odpoveď 12, okrem chybného použitia pravidla súčtu nedomysleli skutočnosť, že poradie na lavičke sa môže začínať chlapcom aj dievčaťom.

Nesprávna odpoveď 18 u 3,3 % žiakov bola výsledkom výpočtu $3 \cdot 3 \cdot 2$. Žiaci teda zabudli použiť faktoriál pri zápise počtu poradí troch objektov alebo faktoriál zapísali, ale ho nesprávne vypočítali alebo prehliadli.

Citlivosť položky nebola vysoká. Z grafu distribúcie úspešností žiackych odpovedí podľa výkonnostných skupín je zrejmé, že priemerná úspešnosť posledných štyroch výkonnostných skupín bola nižšia ako 35,0 % a až v teste celkove najúspešnejšia skupina žiakov dosiahla výrazne vyššiu priemernú úspešnosť.

Pre vysoký podiel žiakov, ktorí uviedli odpoveď 36, bola úloha metódou IRT vyhodnotená ako obťažnejšia položka s priemernou rozlišovacou schopnosťou.

Podobné úlohy:

- Koľkorakým spôsobom môžeme posadiť vedľa seba 2 Angličanov, 2 Francúzov a 1 Turka, ak príslušníci rovnakej národnosti nemôžu sedieť vedľa seba?

(Hrdina, L. – Maxian, M.: Príklady z matematiky pre osemročné gymnáziá. Príma – Sekunda – Tercia – Kvarta. SPN: Bratislava 1997, s. 93)

- Koľkými spôsobmi možno usporiadať množinu prirodzených čísel 1, 2, 3, ..., $2n$ tak, aby každé párne číslo bolo v poradí na párnom mieste?

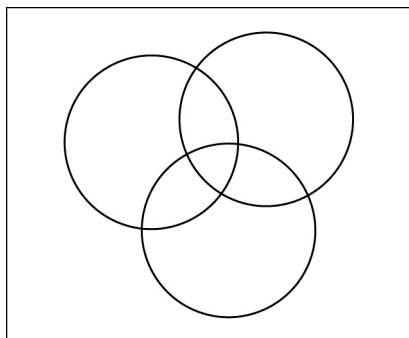
(Smida, J. – Božek, M. – Odvárko, O.: Zbierka úloh z matematiky pre 2. ročník gymnázia. SPN: Bratislava 1985, s. 18.)

- Na lavici sedí vedľa seba 5 obžalovaných – 3 ženy a 2 muži. Koľkými spôsobmi si môžu vedľa seba sadnúť, ak muži nesmú sedieť vedľa seba?
- Koľkými spôsobmi sa dajú vedľa seba uložiť 3 rovnaké pomaranče, 5 rovnakých jablák a 6 rovnakých banánov? Koľko je takých uložení, že dva pomaranče nie sú vedľa seba?

(Hecht, T. – Černek, P.: Matematika pre 1. ročník gymnázií a SOŠ. Zošit 5 Zbierka úloh. Orbis Pictus Istropolitana: Bratislava 2001, s. 52)

Príklad č. 04 **Téma:** 1.1 Logika a množiny**Zadanie:**

Trieda má 30 žiakov. Na konci školského roka mali piati žiaci triedy jednotku z matematiky a nikto z tohto predmetu neprepadol. 18 žiakov triedy malo z matematiky od jednotky horšiu, ale od štvorky lepšiu známku. 16 žiakov triedy malo z matematiky horšiu známku ako dvojku. Koľko žiakov triedy malo na konci školského roka z matematiky trojku? Pri riešení môžete využiť Vennov diagram.



Pojmy, vlastnosti a vzťahy: množina, prvky množiny, prienik, zjednotenie a rozdiel množín, doplnok množiny, Vennove diagramy

Žiak vie: určiť prienik, zjednotenie a rozdiel množín a doplnok množiny

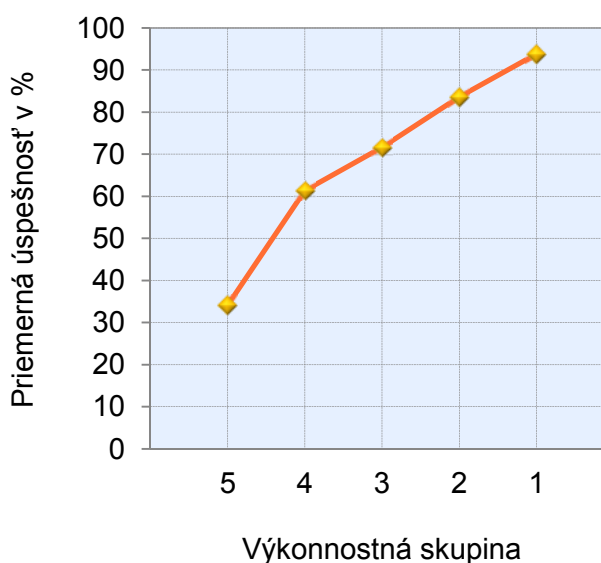
Myšlienkové operácie: zložitejšie

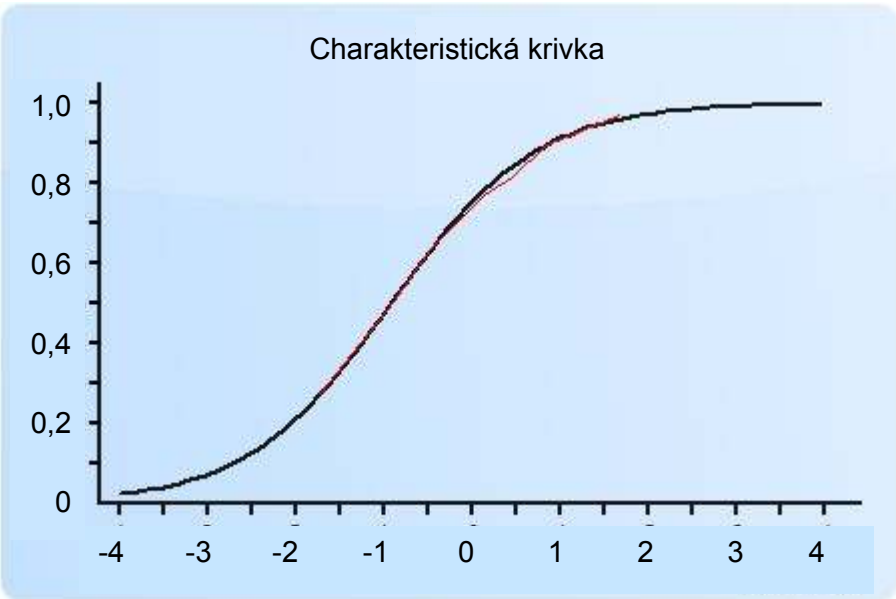
Predpokladaná obťažnosť: stredne obťažná úloha

Štatistické vyhodnotenie CTT:

úspešnosť	celková	69,6 %
	žiaci GYM	75,6 %
	žiaci SOŠ	53,7 %
	chlapci	68,8 %
	dievčatá	71,3 %
neriešenosť	celková	8,4 %
	žiaci GYM	8,2 %
	žiaci SOŠ	8,9 %
citlivosť		60,3 %
P. Bis.		0,39

Graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí:



Štatistické vyhodnotenie IRT:		obťažnosť	– 0,865	rozlišovacia schopnosť:	0,704
Najčastejšie odpovede		Charakteristická krivka 			
a ich frekvencia:					
9	69,6 %				
–	8,4 %				
16	3,9 %				
7	2,6 %				
2	1,9 %				
8	1,8 %				
12	1,3 %				

Riešenie:

Prepíšeme informácie zo zadania do exaktného jazyka matematiky: 25 žiakov malo z matematiky dvojku, trojku alebo štvorku, 18 žiakov malo dvojku alebo trojku, 16 žiakov malo trojku alebo štvorku.

Uvažujeme: Ak 25 žiakov malo hodnotenie 2, 3, 4 a 18 žiakov malo hodnotenie 2 a 3, tak chýbajúce hodnotenie 4 malo $25 - 18 = 7$ žiakov. Podobne, ak 25 žiakov malo hodnotenie 2, 3, 4 a 16 žiakov malo hodnotenie 3 a 4, tak hodnotenie 2 malo $25 - 16 = 9$ žiakov.

Potom hodnotenie 3 malo $25 - 7 - 9 = 9$ žiakov.

Ak by sme použili Vennov diagram, tak si stačí uvedomiť, že všetky oblasti prienikov sú prázdne, pretože žiadny žiak nemôže mať zároveň dve alebo tri rôzne známky.

Úlohu bolo možné riešiť aj sústavou troch lineárnych rovníc s tromi neznámymi.

Hodnotenie:

Úloha bola venovaná množinám. Nebolo však nevyhnutné poznať pojmy a zručnosti množinovej matematiky k úspešnému vyriešeniu úlohy. Základom úlohy bolo správne pochopiť zadanie úlohy a pretransformovať ho tak, aby bolo možné či už pomocou Vennovho diagramu, úvahou alebo sústavou rovníc vypočítať výsledok úlohy.

Pojmy, vlastnosti, vzťahy a zručnosti z oblasti množinovej matematiky nie sú súčasťou štátneho vzdelávacieho programu pre GYM. Veľmi stručne sa však vyskytujú v prvej časti učebnice matematiky pre 1. ročník GYM v kapitole venovanej výrokom.

Úlohu správne vyriešilo 69,6 % žiakov. Žiaci GYM boli mierne úspešnejší než žiaci SOŠ. Úspešnosť chlapcov a dievčat bola porovnateľná. Neriešenosť úlohy bola 8,4 %.

Nesprávne odpovede zrejme vyplývali z nesprávneho pochopenia a interpretovania zadania. 3,9 % žiakov asi na základe analýzy zadania rozhodlo, že dvojári boli dvaja a trojkárov bolo šesťnásť.

2,6 % žiakov ako počet trojkárov určilo správny počet štvorkárov.

1,9 % žiakov určilo nesprávnu odpoveď 2 ako výsledok rozdielu čísel 18 a 16 zo zadania úlohy, opäť na základe nesprávneho pochopenia textu zadania.

Úloha najlepšie odlišila v teste celkove najslabšiu výkonnostnú skupinu. Vďaka vysokej priemernej úspešnosti všetkých výkonnostných skupín bola úloha metódou IRT vyhodnotená ako jednoduchšia položka s priemernou rozlišovacou schopnosťou.

Podobné úlohy:

- Milan sa začal vážiť. Hneď k nemu sa postavil na váhu Tomáš. Zistili, že majú spolu 56 kg. Potom sa odvážil Juro s Milanom. Spolu mali 69 kg. Nakoniec, keď sa vážil Tomáš s Jurom, ručička váhy ukazovala 71 kg. Koľko ktorý chlapec vážil?

(Hrdina, Ľ. – Maxian, M.: Príklady z matematiky pre osemročné gymnáziá. Príma – Sekunda – Tercia – Kvarta. SPN: Bratislava 1997, s. 80)

- Medzinárodnej konferencie sa zúčastnilo 88 účastníkov, z ktorých každý ovládal aspoň jeden z jazykov: angličtina, nemčina, ruština. Zistilo sa, že angličtinu ovláda celkom 59 účastníkov, nemčinu 52 účastníkov a ruštinu 31 účastníkov. Práve jeden jazyk ovláda 17 Angličanov, 14 Nemcov a 8 Rusov. Zaujímavé bolo, že angličtinu a zároveň nemčinu ovládalo 31 účastníkov. Zistíte, koľkí účastníci ovládajú všetky tri jazyky.

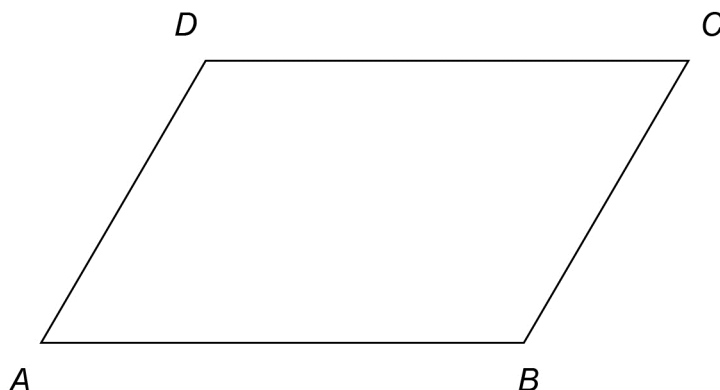
(Burjan, V. – Hrdina, Ľ. – Maxian, M.: Prehľad matematiky, 1. časť. SPN: Bratislava 1997, s. 19)

- Na štvrtročnej písomke z matematiky boli tri príklady. Tretí príklad vyriešilo 21 žiakov a každý zo zostávajúcich príkladov 23 žiakov. Dvaja žiaci triedy nevyriešili ani jeden príklad, všetky tri príklady vyriešili 7 žiaci. Prvý a druhý príklad vyriešilo 15 žiakov, prvý a tretí príklad 12 žiakov. Druhý alebo tretí príklad vyriešilo 31 žiakov.
 - a) Koľko žiakov vyriešilo druhý a tretí príklad?
 - b) Koľko žiakov vyriešilo prvý alebo druhý príklad?
 - c) Koľko žiakov písalo štvrtročnú prácu?

(Bušek, I.: Řešené maturitní úlohy z matematiky. SPN: Praha 1985, s. 261)

Príklad č. 05 **Téma:** 3.1 Základné rovinné útvary**Zadanie:**

Rovnobezník $ABCD$ (pozrite obrázok) má dĺžky strán 6 cm a 4 cm. Veľkosť jedného z vnútorných uhlov rovnobežníka je 45° . Vypočítajte v centimetroch dĺžku dlhšej uhlopriečky rovnobežníka $ABCD$.



Pojmy, vlastnosti a vzťahy: kosínusová veta, súčet susedných uhlov rovnobežníka, oproti väčšej strane trojuholníka leží väčší uhol

Žiak vie: vypočítať v trojuholníku, jednoznačne určenom stranami a uhlami, zvyšné strany a uhly

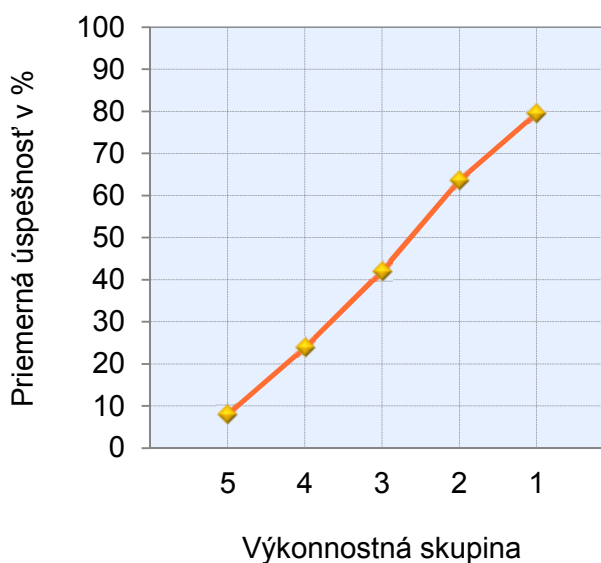
Myšlienkové operácie: jednoduchšie

Predpokladaná obťažnosť: stredne obťažná úloha

Štatistické vyhodnotenie CTT:

úspešnosť	celková	43,9 %
	žiaci GYM	51,7 %
	žiaci SOŠ	23,4 %
	chlapci	43,6 %
	dievčatá	44,7 %
neriešenosť	celková	10,2 %
	žiaci GYM	9,8 %
	žiaci SOŠ	11,1 %
citlivosť		72,0 %
P. Bis.		0,47

Graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí:



Štatistické vyhodnotenie IRT:		obťažnosť	0,231	rozlišovacia schopnosť:	0,843
Najčastejšie odpovede a ich frekvencia:		Charakteristická krivka			
9,27	43,9 %				
–	10,2 %				
7,39	4,6 %				
11,09	3,2 %				
4,25	3,1 %				
7,21	3,1 %				
8	2,6 %				

Riešenie:

Ak jeden z dvojice vnútorných uhlov rovnobežníka má veľkosť 45° , tak druhý bude mať veľkosť $180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$. Dlhšia uhlopriečka leží oproti väčšiemu z vnútorných uhlov rovnobežníka, preto vypočítame dĺžku uhlopriečky ležiacej oproti vnútornému uhlu s veľkosťou 135° (podľa obrázka to bude úsečka AC). Vo všeobecnom trojuholníku ABC poznáme dĺžky dvoch strán a veľkosť uhla nimi určeného, preto dĺžku úsečky AC vypočítame pomocou kosínusovej vety pre protiľahlý uhol veľkosti 135° :

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |BC| \cdot \cos 135^\circ = 6^2 + 4^2 - 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 52 + 24\sqrt{2}$$

Odtiaľ $|AC| \doteq 9,27$ cm.

Hodnotenie:

Podstatou úlohy bolo vypočítať dĺžku strany vo všeobecnom trojuholníku pomocou kosínusovej vety. Žiaci potrebovali k vyriešeniu úlohy určiť aj veľkosť susedného vnútorného uhla k danému vnútornému uhlu rovnobežníka a rozhodnúť, ktorá z uhlopriečok v rovnobežníku je dlhšia. Následný výpočet kosínusovou vetou (uvedenou aj na zadnom liste testu v prehľade vzťahov) už nebol zložitý, zostavenú rovnicu nebolo potrebné ani upraviť, neznáma bola osamostatnená na jednej strane rovnice.

Kosínusová veta a výpočet prvkov vo všeobecnom trojuholníku nie sú súčasťou štátneho vzdelávacieho programu z matematiky pre GYM, napriek tomu ich autori v súčasnosti platných učebníc matematiky GYM zaradili na záver 1. časti učebnice pre 3. ročník.

Žiaci sa teda s podobnou úlohou a stratégiou jej riešenia mohli stretnúť na hodinách matematiky asi rok pred konaním RT EČ MS z matematiky. Do obrázka v zadaní žiakom stačilo dokresliť dlhšiu uhlopriečku a vo vzniknutom všeobecnom trojuholníku ABC správne zapísať kosínusovú vetu, ktorej znenie bolo uvedené v prehľade vzťahov na zadnom liste testu.

Úlohu teda môžeme považovať za základnú planimetrickú výpočtovú úlohu, v ktorej nebolo potrebné objavovať a hľadať, čo a ako počítať. Preto prekvapila pomerne nízka priemerná úspešnosť 43,9 % riešenia úlohy žiakmi. Úlohu úspešne vyriešila iba približne polovica žiakov GYM a asi štvrtina žiakov SOŠ. Desatina maturantov odpoveď neuviedla.

3,1 % žiakov vypočítalo správne dĺžku kratšej z uhlopriečok rovnobežníka. K výpočtu použili veľkosť uhla daného v zadaní, ale neanalyzovali alebo nesprávne analyzovali dĺžkové pomery uhlopriečok v súvislosti s veľkosťou vnútorných uhlov rovnobežníka.

Iná časť žiakov dopočítala nesprávny výsledok, pretože predpokladala, že uhlopriečky rozpoľujú vnútorné uhly rovnobežníka. Napríklad 4,6 % žiakov riešilo úlohu v trojuholníku ABC sínusovou vetou s využitím uhlov s veľkosťou $22,5^\circ$ a 135° .

Ďalšou chybou žiakov bol predpoklad, že uhlopriečky rovnobežníka sa pretínajú pod pravým uhlom. 3,2 % žiakov počítalo dĺžku polovice dlhšej uhlopriečky AC v predpokladanom pravouhlom trojuholníku ABS (S je priesečník uhlopriečok) pomocou základných goniometrických funkcií sínus alebo kosínus chybné určených uhlov s veľkosťou $22,5^\circ$ alebo $67,5^\circ$. Takto vypočítali dĺžku uhlopriečky AC rovnú 11,09 cm. Úsečka s uvedenou dĺžkou by však vôbec nemohla tvoriť trojuholník ABC so stranami rovnobežníka dlhými 6 cm a 4 cm.

Najviac prekvapilo riešenie 3,1 % žiakov, ktorí dĺžku uhlopriečky $|AC| = 7,21$ cm vypočítali Pytagorovou vetou ako dĺžku prepony v podľa nich pravouhlom trojuholníku ABC s pravým uhlom pri vrchole B .

Preukázala sa vhodnosť zaradenia položky do rozlišovacieho testu. Položka veľmi dobre rozlíšila žiakov, čo dokazujú aj hodnoty citlivosti a $P. Bis.$ a graf distribúcie úspešností žiakov podľa výkonnostných skupín.

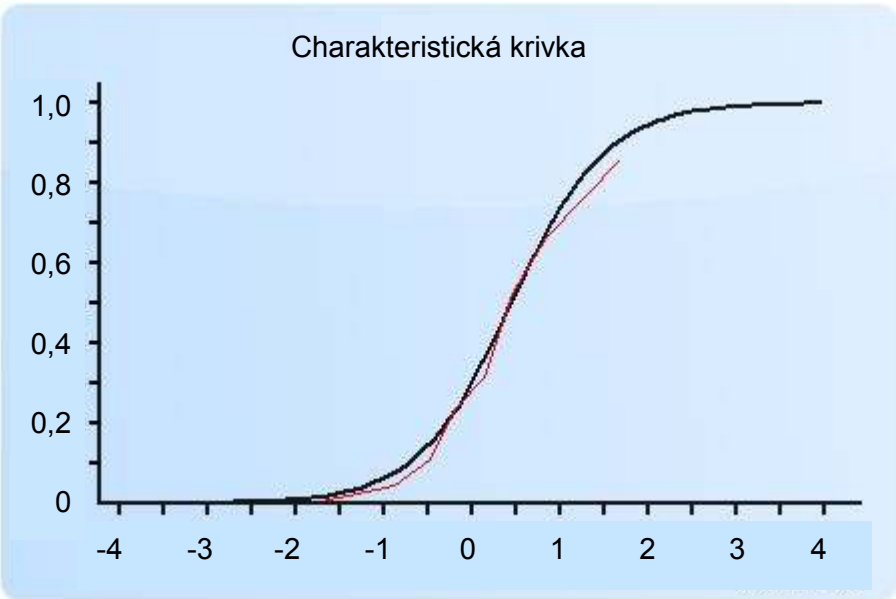
Taktiež z charakteristickej krivky položky vyplýva, že položka veľmi dobre rozlišovala žiakov, najmä v skupine priemerných žiakov, s úrovňou schopnosti okolo hodnoty 0,2.

Podobné úlohy:

- V kosodĺžniku $a = 2$ cm, $b = 3$ cm, $\beta = 120^\circ$. Vypočítajte dĺžku jeho uhlopriečok.

(Vocelka, J.: Maturujeme inak. EDITOR: Bratislava 2003, s. 14)

Príklad č. 06		Téma: 1.2 Čísla, premenné a výrazy
Zadanie:		
Výraz $\left(\frac{\sqrt{2}}{2^{3n} \cdot 2^{n-1}}\right)^2$ sa pre všetky $n \in N$ dá upraviť a zjednodušiť na tvar 2^{an+b} , kde a, b sú celé čísla. Určte súčet $a + b$.		
Pojmy, vlastnosti a vzťahy: výraz, zlomky, druhá odmocnina, mocnina s prirodzeným, celočíselným exponentom, exponent a základ mocniny, $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$, $(a^x)^y = a^{xy}$, $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$, $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$		
Žiak vie: použiť pri úpravách výrazov (číselných alebo výrazov s premennou) rovnosti uvedené v časti Pojmy, vlastnosti a vzťahy		
Myšlienkové operácie: jednoduché		Predpokladaná obťažnosť: ľahká úloha
Riešenie:		
Výraz upravíme na požadovaný tvar využitím pravidiel pre počítanie s mocninami:		
$\left(\frac{\sqrt{2}}{2^{3n} \cdot 2^{n-1}}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2^{4n-1}}\right)^2 = \frac{2^1}{2^{8n-2}} = 2^{1-8n+2} = 2^{-8n+3} = 2^{an+b}$		
Porovnaním posledných výrazov získame $a = -8$, $b = 3$. Potom $a + b = -8 + 3 = -5$.		
Štatistické vyhodnotenie CTT:		
úspešnosť	celková	34,6 %
	žiaci GYM	43,1 %
	žiaci SOŠ	12,1 %
	chlapci	32,7 %
	dievčatá	38,7 %
neriešenosť	celková	16,6 %
	žiaci GYM	12,6 %
	žiaci SOŠ	27,1 %
citlivosť		73,8 %
P. Bis.		0,52
Graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí:		
		

Štatistické vyhodnotenie IRT:		obťažnosť	0,527	rozlišovacia schopnosť:	1,072
Najčastejšie odpovede a ich frekvencia:		Charakteristická krivka 			
- 5	34,6 %				
-	16,6 %				
- 6	5,3 %				
6	5,3 %				
5	3,8 %				
- 9	3,1 %				
7	3,0 %				

Hodnotenie:

Úloha bola zameraná na využitie pravidiel pre počítanie s mocninami, ktoré sú uvedené aj v prehľade vzťahov na zadnej strane testu. Žiaci mali umocniť druhú odmocninu čísla, vykonať násobenie a delenie mocnín s rovnakým základom a umocnenie mocniny. Zadané príklady neobsahovali veľa mocnín (v zbierkach úloh nájdeme aj niekoľkonásobne „dlhšie“ lomené výrazy s mocninami), od žiakov však vyžadovalo dôslednosť pri uplatňovaní pravidiel pre počítanie s mocninami a vysokú sústredenosť, aby sa nedopustili chyby z nepozornosti.

Žiaci v súčasnosti počas štúdia matematiky na základnej škole absolvujú iba propedeutiku pre počítanie s mocninami a odmocninami vo forme vytvorenia pojmu druhej a tretej mocniny a odmocniny a ich použitia v konkrétnych situáciách a vo vedeckom zápise čísel. Podľa platných štátnych vzdelávacích programov sa žiaci oboznamujú s pravidlami pre počítanie s mocninami a odmocninami až na úrovni ISCED 3.

V aktuálnych učebniciach matematiky pre 2. ročník GYM sa však nenachádzajú príklady na získanie dostatočných zručností pre úpravu výrazov s mocninami a odmocninami. Zbierky úloh k učebniciam, ani po šiestich rokoch od vydania učebnice, zatiaľ nie sú k dispozícii. Zostáva teda len na učiteľoch matematiky, či uznajú za potrebné okrem objavenia, sprístupnenia, prípadne odvodenia pravidiel pre počítanie s mocninami a odmocninami zaradiť do vyučovania matematiky pre svojich žiakov aj príklady a úlohy rozvíjajúce zručnosti pri počítaní s mocninami a odmocninami, z akého zdroja budú čerpať príslušné úlohy a v akej forme ich žiakom sprostredkujú.

Preto, aj na základe podnetov vyučujúcich stredných a vysokých škôl o nízkej úrovni zručnosti žiakov pri práci s formálnymi zápsmi v matematike, ako sú výrazy, mocniny alebo nerovnice a o neochote žiakov zdokonaľiť sa v týchto činnostiach, sme do testu zaradili úlohu na úpravu výrazu s mocninami. Paradoxne sme následne zaznamenali od rovnakých skupín aj kritiku na zaradenie úlohy, ktorá vraj testuje iba naučené formálne zručnosti a nie matematické myslenie žiakov.

Zdanlivo jednoduchú úlohu úpravy výrazu s mocninami úspešne zvládla iba asi tretina maturantov z matematiky. Oveľa úspešnejší boli žiaci GYM v porovnaní so žiakmi SOŠ, ktorí riešili úlohu s úspešnosťou iba 12,1 %. Dievčatá boli mierne úspešnejšie ako chlapci.

Šestina maturantov neuviedla odpoveď na položku. Približne každý štvrtý žiak SOŠ neodpovedal na položku. Nie je možné určiť, či žiaci nevedeli, ako výraz upraviť a zjednodušiť, či sa im nechcelo pustiť sa do úpravy a zjednodušenia výrazu alebo či nepochopili zadanie úlohy.

Polovica žiakov uviedla na položku správnu odpoveď alebo neuviedla žiadnu odpoveď. Druhá polovica žiakov sa pri riešení úlohy dopustila numerickej chyby, myšlienkovvej chyby alebo chyby z nepozornosti. 5,3 % žiakov, ktorí uviedli odpoveď – 6, po umocnení čitateľa $\sqrt{2}$ na druhú počítali pri vzniknutom čísle 2 s exponentom 0 a nie 1 alebo neumocnili celý dvojčlen v exponente menovateľa, iba člen $4n$. Žiaci, ktorí uviedli odpoveď – 9, nesprávne odčítali záporné číslo v exponente menovateľa pri uplatnení pravidla o delení mocnín s rovnakým základom. Žiaci, ktorí uviedli kladné súčty, nebrali do úvahy číslo 2 a jeho exponent v čitateli zlomku a úlohu v závere riešili iba s mocninou v menovateli, aj s prípadnými už vymenovanými chybami.

Položka patrila medzi najlepšie rozlišujúce položky, o čom svedčí vysoká hodnota citlivosti, *P. Bis.*, rozlišovacej schopnosti, graf distribúcie úspešností a charakteristická krivka položky.

Podobné úlohy:

- Všetky mocniny výrazu $C = \left(\frac{0,25^{-2} \cdot 4^{\frac{1}{4}}}{2^{-0,75}} \right)^{0,4}$ vyjadrite ako mocniny so základom 2.

Výraz zjednodušte a zapíšte ako odmocninu.

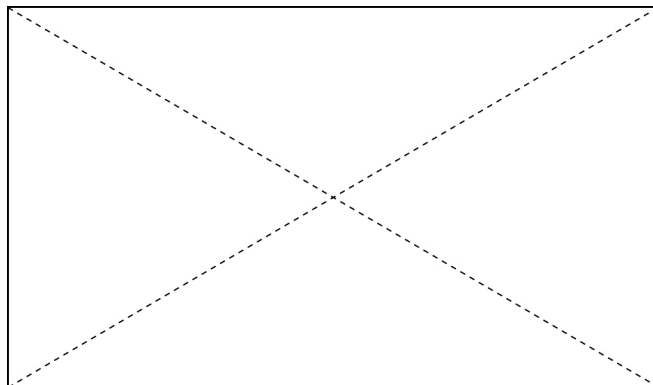
(Vocelka, J.: Maturujeme inak. EDITOR: Bratislava 2003, s. 35)

- Upravte na jednu mocninu: $\frac{4^{2x} \cdot 4^4}{4^{x+3}}$.

(Hecht, T. – Černek, P.: Matematika pre 1. ročník gymnázií a SOŠ. Zošit 5 Zbierka úloh. Orbis Pictus Istropolitana: Bratislava 2001, s. 10)

Príklad č. 07 **Téma:** 2.2 Lineárna a kvadratická funkcia, aritmetická postupnosť
Zadanie:

Dĺžky strán a dĺžka uhlopriečky obdĺžnika (pozrite obrázok) sú tri po sebe idúce členy aritmetickej postupnosti. Dĺžka dlhšej strany obdĺžnika je 12 cm. Určte v centimetroch štvorcových obsah tohto obdĺžnika.



Pojmy, vlastnosti a vzťahy: aritmetická postupnosť, diferenciacia aritmetickej postupnosti, pravouhlý trojuholník, Pytagorova veta, plošný obsah rovnobežníka

Žiak vie: určiť hodnotu ľubovoľného člena aritmetickej postupnosti, ak pozná jeden člen postupnosti a diferenciu, vypočítať plošný obsah rovnobežníka

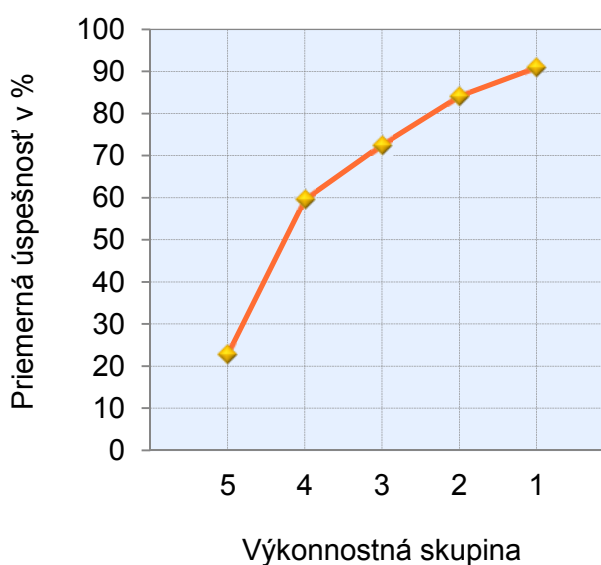
Myšlienkové operácie: zložitejšie

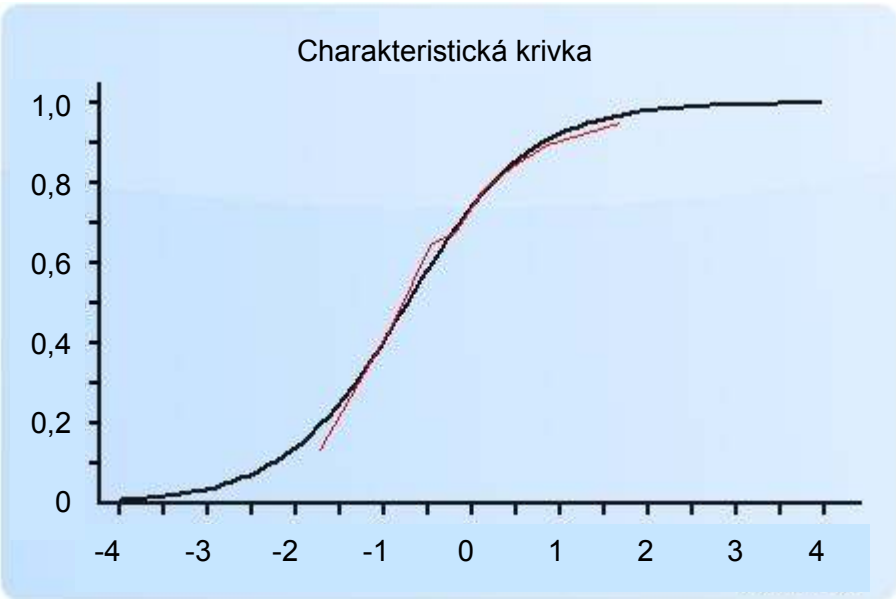
Predpokladaná obťažnosť: stredne ťažká úloha

Štatistické vyhodnotenie CTT:

úspešnosť	celková	67,3 %
	žiaci GYM	73,5 %
	žiaci SOŠ	50,8 %
	chlapci	68,2 %
	dievčatá	65,3 %
neriešenosť	celková	9,3 %
	žiaci GYM	8,0 %
	žiaci SOŠ	12,8 %
citlivosť		69,5 %
P. Bis.		0,44

Graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí:



Štatistické vyhodnotenie IRT:		obťažnosť	– 0,683	rozlišovacia schopnosť:	0,829
Najčastejšie odpovede a ich frekvencia:		Charakteristická krivka 			
108	67,3 %				
–	9,3 %				
72	3,1 %				
96	2,5 %				
132	2,1 %				
192	1,4 %				
54	1,2 %				

Riešenie:

Dĺžky všetkých úsečiek, ktoré sú členmi postupnosti (najdlhšia je uhlopriečka), vyjadríme pomocou známej dĺžky 12 a diferencie d : kratšia strana obdĺžnika bude $(12 - d)$, dlhšia strana obdĺžnika bude 12, uhlopriečka bude $(12 + d)$. Uvedené úsečky tvoria pravouhlý trojuholník, preto neznámu diferenciu d vypočítame pomocou Pytagorovej vety:

$$(12 + d)^2 = (12 - d)^2 + 12^2$$
$$144 + 24d + d^2 = 144 - 24d + d^2 + 144$$
$$d = 3$$

Potom kratšia strana obdĺžnika bude dlhá $(12 - d)$ cm = $(12 - 3)$ cm = 9 cm. Následne obsah obdĺžnika bude 12 cm · 9 cm = 108 cm².

Hodnotenie:

Postupnosti nie sú súčasťou štátneho vzdelávacieho programu pre GYM a SOŠ. Nevenuje sa im ani aktuálna učebnica matematiky pre GYM. Problematika postupností ako špeciálnych funkcií a následne aritmetická a geometrická postupnosť sú však dobre rozpracované v starších učebniciach matematiky, aj s dostatočným počtom príkladov.

Základom úlohy bola aritmetická postupnosť. Žiaci mali pri riešení úlohy preukázať znalosť pojmov súvisiacich s aritmetickou postupnosťou, vyjadriť členy aritmetickej postupnosti pomocou konkrétneho člena a diferencie, použiť Pytagorovu vetu na výpočet dĺžky v pravouhlom trojuholníku a vypočítavať obsah obdĺžnika pomocou dĺžok jeho strán.

Žiaci mali pri vyjadrovaní členov postupnosti uľahčenú úlohu pri rozhodovaní, ktorým členom vyjadriť pomocou diferencie ostatné členy postupnosti, keďže v zadaní bolo exaktne napísané, že je daná dlhšia strana obdĺžnika.

Môžeme sa tiež domnievať, že nie všetci žiaci riešili úlohu cielene pomocou vyjadrenia dĺžky kratšej strany a uhlopriečky obdĺžnika pomocou diferencie a následným výpočtom diferencie použitím Pytagorovej vety. Dĺžka kratšej strany obdĺžnika a dĺžka uhlopriečky sa dali pomerne rýchlo nájsť aj pokusným overovaním platnosti Pytagorovej vety pomocou kalkulačky, postupne pre čísla najprv o jedno väčšie a menšie ako 12, potom o dve väčšie a menšie atď., čo sa na tretí pokus žiakom aj malo podariť, samozrejme za predpokladu, že hľadané dĺžky budú vyjadrené prirodzenými číslami.

Uvedenej rôznorodosti možností zistenia správneho riešenia úlohy zodpovedala aj úspešnosť žiakov. Úlohu Správne vypočítali viac ako dve tretiny žiakov. Úspešnejší boli žiaci GYM. Odpoveď neuviedol len asi každý desiaty žiak.

Chybné odpovede žiakov boli spôsobené nesprávnym určením diferencie a následne dĺžky kratšej strany obdĺžnika. Žiaci si zrejme neoverili, či vypočítané dĺžky strán pravouhlého trojuholníka skutočne vyhovujú Pytagorovej vete.

Výsledok 192 cm určili žiaci ako súčin danej dĺžky 12 cm a vypočítanej dĺžky 16 cm, pričom si neuvedomili, že hľadaná dĺžka kratšej strany obdĺžnika malo byť číslo menšie ako 12. Počet odpovedí, ktoré by naznačovali zámenu pojmov obsah a obvod, bol zanedbateľný.

Rozlišovacia schopnosť položky bola veľmi dobrá. Úloha najlepšie rozlíšila poslednú výkonnostnú skupinu žiakov. Dokladuje to aj charakteristická krivka položky, ktorá je najstrmšia pre úroveň schopnosti žiakov v intervale $(-1,5; 0)$.

Podobné úlohy:

- Dĺžky strán pravouhlého trojuholníka tvoria tri za sebou idúce členy aritmetickej postupnosti. Vypočítajte dĺžku strán, ak
 - dlhšia odvesna má dĺžku 24 cm,
 - polomer vpísanej kružnice je 7 cm.

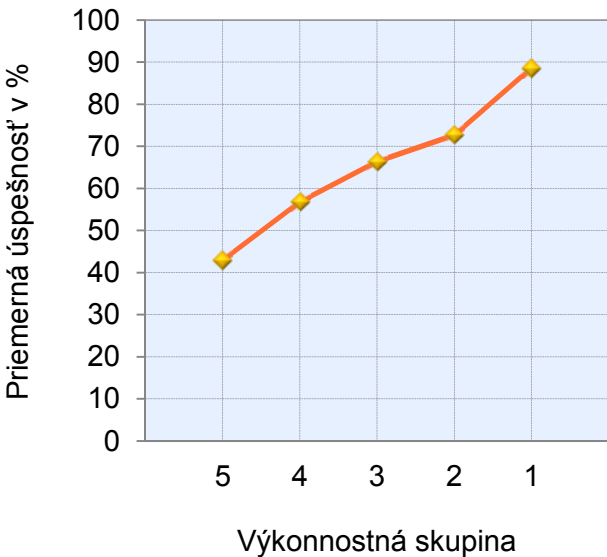
(Smida, J. – Božek, M. – Odvárko, O.: Zbierka úloh z matematiky pre 2. ročník gymnázia. SPN: Bratislava 1985, s. 120)

- Rozmery kvádra tvoria tri za sebou idúce členy aritmetickej postupnosti. Aké sú veľké, ak ich súčet meria 24 cm a objem kvádra je 312 cm^3 ?

(Vejsada, F. – Talafous, F.: Zbierka úloh z matematiky pre SVŠ a gymnáziá. SPN: Bratislava 1972, s. 279)

Príklad č. 08	Téma: 1.4 Rovnice, nerovnice a ich sústavy	
Zadanie:		
Cena jedného kalerábu vzrástla o 0,40 eura. Počet kalerábov, ktoré môže zákazník kúpiť za 4 eurá, tak klesol o 5. Zistíte v eurách novú cenu jedného kalerábu.		
Pojmy, vlastnosti a vzťahy: rovnica, sústava rovníc, diskriminant kvadratickej rovnice, riešenie kvadratickej rovnice pomocou diskriminantu alebo doplnením do štvorca		
Žiak vie: riešiť kontextové (slovné) úlohy vedúce k rovniciam a interpretovať získané riešenia v jazyku pôvodného zadania, upravovať sústavu rovníc použitím úprav jednotlivých strán rovnice, využívajúcich úpravy výrazov a základné vlastnosti elementárnych funkcií, pripočítania, odpočítania, vynásobenia a vydelenia obidvoch strán rovnice výrazom, nájsť všetky riešenia kvadratickej rovnice		
Myšlienkové operácie: zložitejšie		Predpokladaná obťažnosť: náročná úloha
Štatistické vyhodnotenie CTT:		
úspešnosť	celková	66,6 %
	žiaci GYM	66,4 %
	žiaci SOŠ	67,3 %
	chlapci	68,6 %
	dievčatá	62,3 %
neriešenosť	celková	14,7 %
	žiaci GYM	16,3 %
	žiaci SOŠ	10,5 %
citlivosť		46,7 %
P. Bis.		0,28

Graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí:



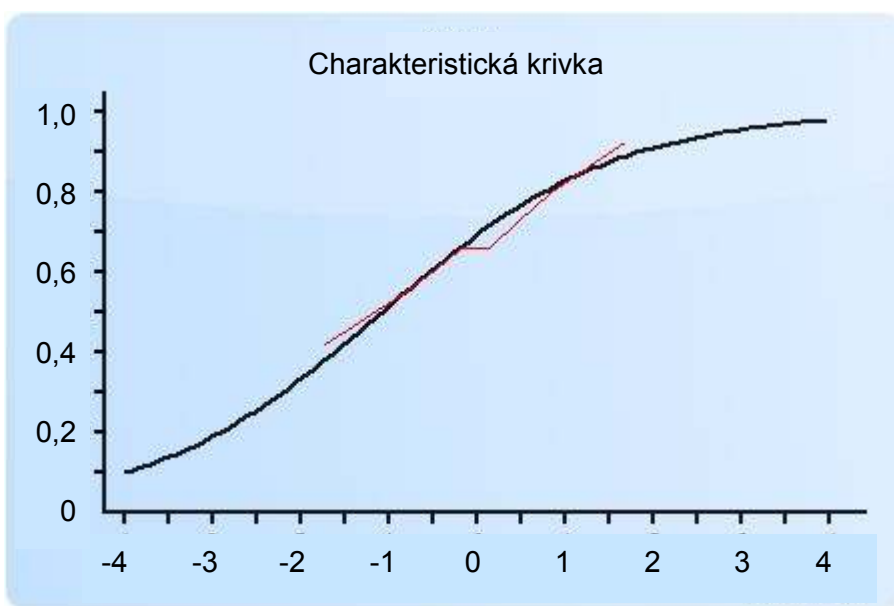
Výkonnostná skupina	Priemerná úspešnosť v %
5	43
4	58
3	67
2	73
1	89

Štatistické vyhodnotenie IRT:	obťažnosť	– 1,030	rozlišovacia schopnosť:	0,436
--------------------------------------	-----------	---------	-------------------------	-------

**Najčastejšie
odpovede**

a ich frekvencia:

0,80	66,6 %
–	14,7 %
0,40	3,4 %
0,60	1,4 %
1,20	1,1 %
0,90	0,8 %
0,50	0,7 %

**Riešenie:**

Pôvodný počet kalerábov označíme p , pôvodnú cenu jedného kalerábu v eurách označíme x . Zapišeme rovnicami cenu nakúpených kalerábov pred a po zdražení kalerábov a vypočítame riešenie sústavy rovníc:

$$p \cdot x = 4, \text{ odkiaľ } p = \frac{4}{x}$$

$(p - 5) \cdot (x + 0,4) = 4$, odkiaľ po dosadení za p z prvej rovnice získame

$$\left(\frac{4}{x} - 5\right) \cdot (x + 0,4) = 4$$

$$25x^2 + 10x - 8 = 0$$

$$D = 10^2 - 4 \cdot 25 \cdot (-8) = 100 + 800 = 900 \rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{900} = 30$$

Riešením kvadratickej rovnice sú $x_1 = -0,8$ a $x_2 = 0,4$. Riešenie x_1 ako záporná cena kalerábu nevyhovuje. Nová cena kalerábu bude v eurách $x + 0,4 = 0,4 + 0,4 = 0,8$.

Hodnotenie:

Podstatou úlohy bolo zistiť cenu jedného kalerábu pred alebo po zdražení pomocou vhodne zvolenej neznámej (prípadne neznámych) a správneho dopočítania zostavenej rovnice alebo sústavy rovníc. Žiaci mali preukázať schopnosť správne zapísať informácie a vzťahy uvedené v zadní úlohy pomocou výrazov s premennými, vedieť vypočítať korene kvadratickej rovnice a rozhodnúť, ktorý z vypočítaných koreňov môže byť a ktorý nemôže byť skutočným riešením úlohy.

Úloha patrila k časovo náročnejším úlohám testu, najmä pre žiakov, ktorí nemali dostatok skúseností a zručností pri riešení kvadratických rovníc. Úlohu bolo možné vyriešiť aj bez použitia premenných a rovníc. Jednou z možností bolo zistiť výsledok úvahou na základe vzťahu medzi počtom kalerábov, zmeny ceny jedného kalerábu a ceny nákupu. Predpokladáme však, že týmto postupom riešil úlohu málokto.

Oveľa viac žiakov mohlo vyriešiť úlohu pokusným tipovaním pôvodnej ceny jedného kalerábu za predpokladu, že riešením úlohy bude cena vyjadrená v eurách desatinným číslom s desiatkami centov (0,10 €, 0,20 € atď.) a následným overovaním vhodnosti alebo nevhodnosti určenej ceny podľa údajov v zadaní úlohy.

Rôznorodosti možností vyriešenia úlohy zodpovedala aj úspešnosť žiakov. Úlohu správne vyriešili asi dve tretiny žiakov, čo bola piata najvyššia dosiahnutá úspešnosť žiakov pri riešení úloh testu. Všetky skupiny žiakov riešili úlohu s približne rovnakou úspešnosťou. Odpoveď neuviedlo 14,7 % žiakov, pričom väčšie zastúpenie mali žiaci GYM.

Z grafu distribúcie úspešností žiackych odpovedí podľa výkonnostných skupín a z charakteristickej krivky položky vyplýva, že rozlišovacia schopnosť úlohy bola iba priemerná.

Podobné úlohy:

- Jeden meter látky zdražiel o 42 korún. Za rovnakú sumu peňazí si namiesto jedenástich metrov látky pred zdražením môžem teraz kúpiť iba 9 metrov. Koľko korún stojí teraz meter látky?

(Repáš, V. – Černek, P. – Pytlová, Z. – Vojtela, I.: Matematika pre 5. ročník základných škôl. Prirodzené čísla. Orbis Pictus Istropolitana: Bratislava 1997, s. 62)

- Na trase 9 000 km premávajú dva rôzne typy lietadiel. Jedno z nich dosahuje rýchlosť o 100 km/h vyššiu ako druhé a jeho letový čas je preto o hodinu kratší. Vypočítajte rýchlosť týchto lietadiel.
- Družstevníci mali osiať 200 ha poľa. Dobrou organizáciou práce skrátili plánovaný čas sejby o 2 dni, pričom každý deň osiali o 5 ha viac, ako plánovali. Koľko dní trvala sejba?

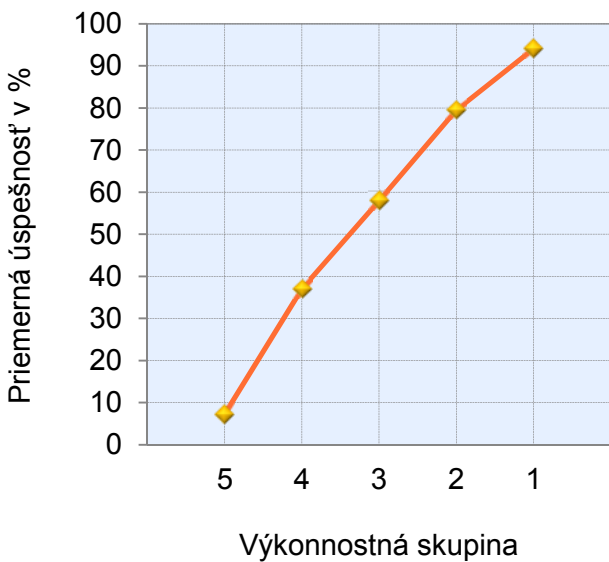
(Smida, J. – Šedivý, J.: Zbierka úloh z matematiky pre 1. ročník gymnázia. SPN: Bratislava 1985, s. 120)

- Ak zväčším priemernú rýchlosť o 10 km/h, prejdem vzdialenosť 315 km o 2 hodiny skôr. Akou priemernou rýchlosťou idem?

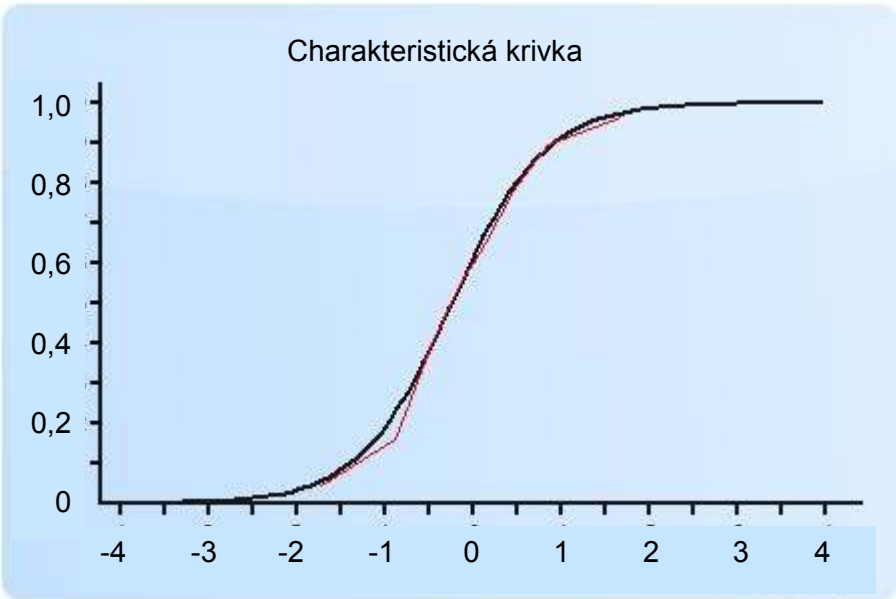
(Hecht, T.: Matematika pre 1. ročník gymnázií a SOŠ. Zošit 5 Zbierka úloh. Orbis Pictus Istropolitana: Bratislava 1997, s. 27)

Príklad č. 09		Téma: 1.2 Čísla, premenné a výrazy
Zadanie:		
Zistíte, koľkokrát väčšie je číslo $x = 103!$ ako číslo $y = 101! + 102!$.		
Pojmy, vlastnosti a vzťahy: faktoriál, $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ pre prirodzené čísla n		
Žiak vie: použiť pri úpravách výrazov (číselných alebo s premennými) rovnosti uvedené v časti Pojmy, vlastnosti a vzťahy, roznásobovanie, vynímanie pred zátvorku, krátenie		
Myšlienkové operácie: zložitejšie		Predpokladaná obťažnosť: stredne obťažná úloha
Riešenie:		
Odpoveď na otázku v zadaní úlohy je vlastne pomer čísel x a y , preto zapíšeme čísla x a y v tvare zlomku, zlomok upravíme a zjednodušíme:		
$\frac{x}{y} = \frac{103!}{101! + 102!} = \frac{103!}{101! + 102 \cdot 101!} = \frac{103!}{101! \cdot (1 + 102)} = \frac{103 \cdot 102 \cdot \cancel{101!}}{\cancel{101!} \cdot 103} = \frac{102}{1} = 102$		
Číslo x je teda 102-krát väčšie ako číslo y .		
Štatistické vyhodnotenie CTT:		
úspešnosť	celková	55,3 %
	žiaci GYM	63,8 %
	žiaci SOŠ	32,8 %
	chlapci	54,9 %
	dievčatá	56,4 %
neriešenosť	celková	12,9 %
	žiaci GYM	11,1 %
	žiaci SOŠ	17,6 %
citlivosť		83,3 %
P. Bis.		0,53

Graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí:



Výkonnostná skupina	Priemerná úspešnosť v %
5	8
4	38
3	58
2	80
1	95

Štatistické vyhodnotenie IRT:		obťažnosť	– 0,177	rozlišovacia schopnosť:	1,098
Najčastejšie odpovede a ich frekvencia:		Charakteristická krivka 			
102	55,3 %				
–	12,9 %				
2	5,8 %				
103	5,2 %				
3	3,1 %				
51,5	1,2 %				
4	1,0 %				

Hodnotenie:

Úloha bola zameraná na pojem faktoriál čísla a zručnosti pri úprave a zjednodušovaní lomeného výrazu. Základom úspešného vyriešenia úlohy bolo zapísať čísla s faktoriálmi zo zadania úlohy do čitateľa a menovateľa zlomku a následne pomocou úpravy čitateľa a menovateľa zlomku na súčin zlomok správne vykrátiť.

Pojem faktoriálu prirodzeného čísla je súčasťou štátneho vzdelávacieho programu ISCED 3A pre GYM. Obsahuje ho aj deviata kapitola prvej časti súčasne platnej učebnice matematiky pre 1. ročník GYM. Príkladov na prácu s faktoriálom je však v učebnici málo. Aby žiaci mali možnosť nacvičiť si počítanie s faktoriálom čísla, musia učitelia siahnuť po starších učebniciach a zbierkach úloh z matematiky alebo si potrebné príklady vytvoriť svojpomocne.

Úlohu správne vyriešil asi každý druhý maturant z matematiky. Žiaci GYM riešili úlohu s približne dvojnásobne vyššou úspešnosťou ako žiaci SOŠ. Odpoveď neuviedla o niečo viac ako desatina žiakov.

5,8 % žiakov, ktorí uviedli odpoveď 2, nemala správne osvojený pojem faktoriálu. Číslo 103! rozložili na $100! \cdot 3!$, podobne v menovateli získali $100! \cdot 1! + 100! \cdot 2! = 100! \cdot (1! + 2!)$. Po vykrátení $100!$ získali výsledok $\frac{3!}{1!+2!} = \frac{6}{1+2} = 2$.

3,1 % žiakov postupovalo podobne, ale urobili chybu aj pri vynímaní $100!$ v menovateli zlomku, keď výraz upravili na tvar $100! \cdot (1! \cdot 2!)$.

5,8 % žiakov, ktorí uviedli odpoveď 103, správne rozložili faktoriály čísel na súčin, ale boli nepozorní pri vynímaní $101!$ pred zátvorku v menovateli zlomku:

$$\frac{103!}{101! + 102 \cdot 101!} = \frac{103!}{101! \cdot (102)} = \frac{103 \cdot \cancel{102} \cdot \cancel{101!}}{\cancel{101!} \cdot 103} = \frac{103}{1} = 103$$

K výsledku 51,5 sa 1,2% žiakov dopočítalo kombináciou nie úplne správneho pochopenia podstaty faktoriálu čísla a nezvládnutého vynímania pred zátvorku:

$$\frac{103!}{101! + 102 \cdot 101!} = \frac{103!}{2 \cdot 101! \cdot 102} = \frac{103 \cdot \cancel{102} \cdot \cancel{101!}}{2 \cdot \cancel{101!} \cdot 102} = \frac{103}{2} = 51,5$$

Úloha napriek vyššej obťažnosti výborne rozlišovala žiakov. Hodnoty citlivosti a medzipoložkovej korelácie P . Bis. úlohy dosiahli druhú najvyššiu hodnotu spomedzi všetkých úloh testu. Žiaci piatej výkonnostnej skupiny riešili úlohu s veľmi nízkou priemernou úspešnosťou. Priemerná úspešnosť ďalších výkonnostných skupín sa rovnomerne a rýchlo zvyšovala, až po hodnotu vyššiu ako 90,0 % u najúspešnejšej skupiny žiakov, ako to vidíme na grafe distribúcie úspešností žiakov podľa výkonnostných skupín..

Z charakteristickej krivky položky tiež vyčítame, že priemerne obťažná položka výborne rozlišovala žiakov podľa úrovne matematickej schopnosti.

Podobné úlohy:

- Vypočítajte: $\frac{12! + 11!}{10!}$.
- Ktoré z čísel $85! + 86!$ alebo $84! + 87!$ je väčšie?

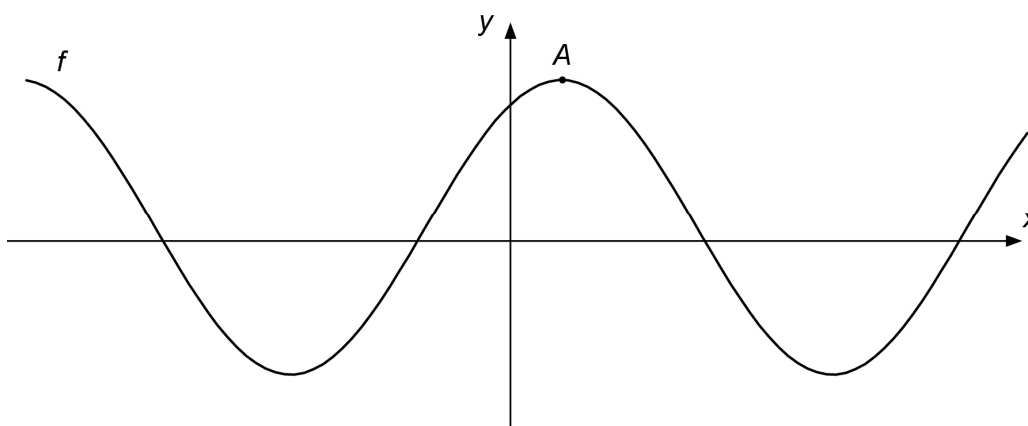
(Hecht, T. – Černek, P.: Matematika pre 1. ročník gymnázií a SOŠ. Zošit 5 Zbierka úloh. Orbis Pictus Istropolitana: Bratislava 2001, s. 55)

- Ktoré z čísel $A = 83! - 80!$ a $B = 81! + 82!$ je väčšie? O koľko?

(Vocelka, J.: Maturujeme inak. EDITOR: Bratislava 2003, s. 26)

Príklad č. 10 **Téma:** 2.5 Goniometrické funkcie**Zadanie:**

Na obrázku je zobrazená časť grafu funkcie $f: y = 3 \cdot \sin(x + 65^\circ)$ a bod A , v ktorom graf funkcie f prvýkrát nadobúda maximum na množine kladných reálnych čísel. Určte v stupňoch x -ovú súradnicu bodu A .



Pojmy, vlastnosti a vzťahy: goniometrická funkcia, sínus, hodnoty goniometrických funkcií pre uhly $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$, maximum funkcie

Žiak vie: riešiť goniometrické rovnice

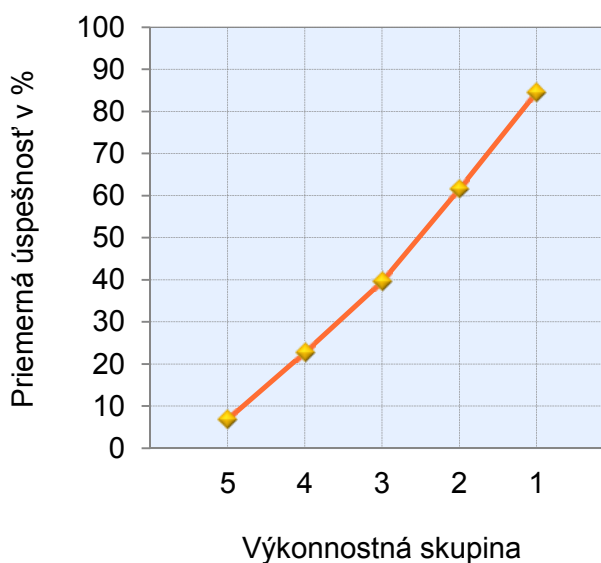
Myšlienkové operácie: zložitejšie

Predpokladaná obťažnosť: stredne obťažná úloha

Štatistické vyhodnotenie CTT:

úspešnosť	celková	44,2 %
	žiaci GYM	52,4 %
	žiaci SOŠ	22,4 %
	chlapci	45,6 %
	dievčatá	41,1 %
neriešenosť	celková	22,6 %
	žiaci GYM	19,4 %
	žiaci SOŠ	31,1 %
citlivosť		77,2 %
P. Bis.		0,50

Graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí:



Štatistické vyhodnotenie IRT:		obťažnosť	0,204	rozlišovacia schopnosť:	0,980
Najčastejšie odpovede a ich frekvencia:		Charakteristická krivka			
25	44,2 %				
–	22,6 %				
65	2,1 %				
35	1,8 %				
90	1,5 %				
45	1,4 %				
115	1,2 %				
Riešenie:					
Funkcia sínus nadobúda na množine kladných reálnych čísel prvýkrát maximum pre číslo (veľkosť uhla) 90. Argument (veľkosť uhla) uvedenej funkcie f sa preto musí rovnať 90: $x + 65 = 90$ Riešením rovnice získame v stupňoch výsledok $x = 25$.					
Hodnotenie:					
Podstatou úlohy bolo správne analyzovanie grafu goniometrickej funkcie na obrázku a predpisu zloženej goniometrickej funkcie v zadaní úlohy. Žiaci k úspešnému vyriešeniu úlohy potrebovali identifikovať posun základnej sínusoidy o 65° doľava a ovládať fakt, že periodická funkcia sínus nadobúda na množine kladných reálnych čísel prvé maximum v čísle 90°. Úloha nebola časovo ani myšlienkovu veľmi náročná. Žiakov však mohla prekvapiť netradičnosťou, prípadne niektorí žiaci mohli mať problém s pochopením zadania, čo vlastne má byť riešením úlohy a čo majú vypočítať. Goniometrické funkcie, ich grafy a určovanie hodnôt goniometrických funkcií sú súčasťou štátneho vzdelávacieho programu pre GYM. Kapitola o goniometrických funkciách je zaradená na záver 1. časti v súčasnosti platnej učebnice matematiky pre 3. ročník GYM. Uvedená kapitola však neobsahuje poznatky o zložených goniometrických funkciách a ich grafoch, ani o princípe a spôsobe riešenia základných goniometrických rovníc.					

Úspešnejší pri riešení úlohy boli žiaci GYM, ktorí dosiahli viac ako dvojnásobne vyššiu priemernú úspešnosť ako žiaci SOŠ. Úlohu správne vyriešil približne každý druhý žiak GYM a každý štvrtý žiak SOŠ. Odpoveď na položku neuviedla necelá štvrtina žiakov.

2,1 % žiakov ako správnu odpoveď uviedla veľkosť posunu grafu danej zloženej funkcie sínus voči grafu základnej goniometrickej funkcie sínus.

1,8 % žiakov zrejme správne postupovalo pri riešení úlohy, ale pri dopočítavaní hodnoty, ktorá chýba číslu 65 do 90, sa pomýlili a urobili numerickú chybu alebo dopočítali hodnotu až do hodnoty 100.

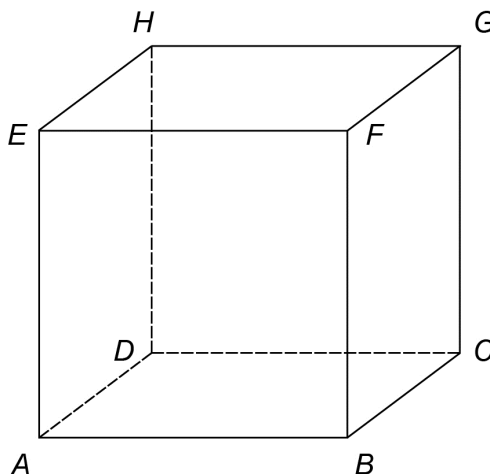
1,5 % žiakov ako odpoveď uviedlo číslo (veľkosť uhla), v ktorom základná goniometrická funkcia sínus prvýkrát nadobúda maximum na množine kladných reálnych čísel.

Úloha patrila medzi najlepšie rozlišujúce úlohy testu MAT15. Hodnoty citlivosti a medzipoložkovej korelácie *P. Bis.* boli vysoké. Krivka grafu distribúcie úspešností žiackych odpovedí podľa výkonnostných skupín takmer kopíruje časť priamky a rovnomerne prudko rastie.

Na základe hodnôt štatistických parametrov podľa vyhodnotenia IRT môžeme položku charakterizovať ako priemerne obťažnú, s veľmi dobrou rozlišovacou schopnosťou.

Príklad č. 11 **Téma:** 4.3 Lineárne útvary v priestore – polohové úlohy**Zadanie:**

Kocka $ABCDEFGH$ má hranu dlhú 4 cm. Bod M je stred hrany EH . Vypočítajte v centimetroch obvod rezu kocky $ABCDEFGH$ rovinou ACM .



Pojmy, vlastnosti a vzťahy: rez telesa rovinou, priesečnice roviny s dvoma rovnobežnými rovinami sú rovnobežné, Pytagorova veta, goniometria pravouhlého trojuholníka

Žiak vie: zostrojiť rez kocky rovinou určenou tromi bodmi ležiacimi v rovinách stien kocky, vypočítať v trojuholníku jednoznačne určenom stranami a uhlami zvyšné strany a uhly

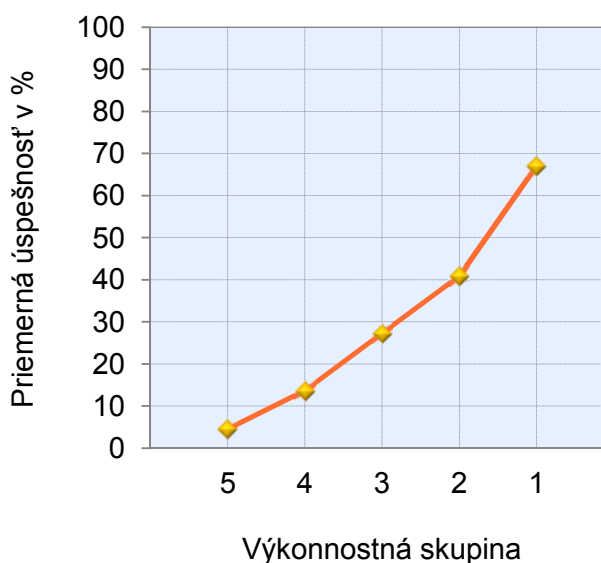
Myšlienkové operácie: zložitejšie

Predpokladaná obťažnosť: stredne obťažná úloha

Štatistické vyhodnotenie CTT:

úspešnosť	celková	31,0 %
	žiaci GYM	40,4 %
	žiaci SOŠ	6,1 %
	chlapci	30,9 %
	dievčatá	31,2 %
neriešenosť	celková	12,1 %
	žiaci GYM	9,6 %
	žiaci SOŠ	19,0 %
citlivosť		63,2 %
P. Bis.		0,43

Graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí:



Štatistické vyhodnotenie IRT:

obťažnosť

0,781

rozlišovacia schopnosť:

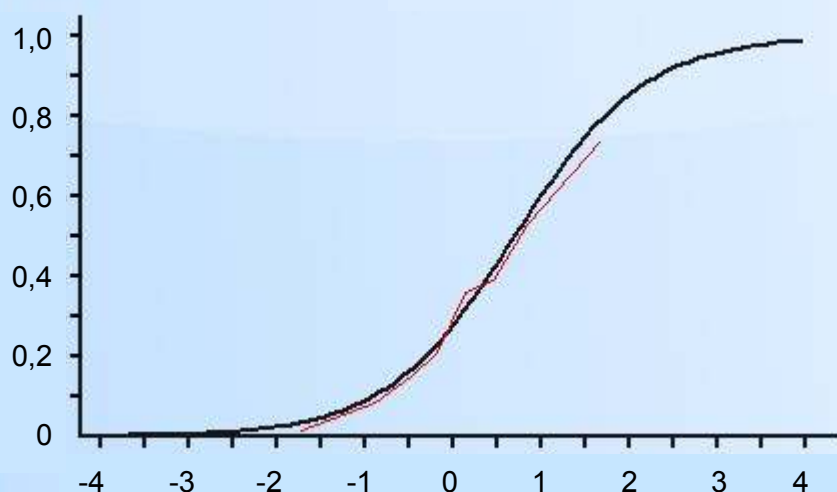
0,786

Najčastejšie
odpovede

a ich frekvencia:

17,43	31,0 %
16,13	16,3 %
–	12,1 %
17,34	3,7 %
18,60	3,4 %
20,26	0,8 %
16,12	0,7 %

Charakteristická krivka



Riešenie:

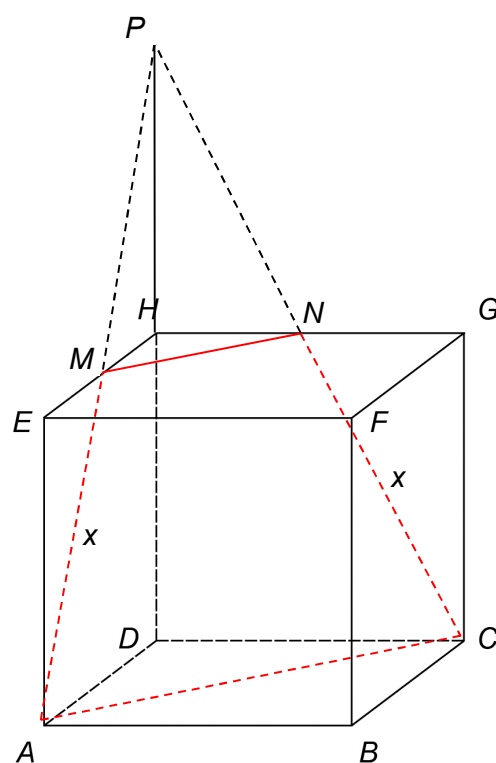
Rez kocky rovinou ACM v hornej stene môžeme dokončiť na základe rovnobežnosti priesečníc roviny rezu s dvomi rovnobežnými stenami kocky. Bodom M vedieme rovnobežku s AC a zostrojíme bod N na hrane GH . Ak nechceme využiť rovnobežnosť, môžeme zostrojiť pomocný bod P na predĺžení hrany DH , ktorý bude ležať v rovine rezu (leží na AM), aj v zadnej stene, v ktorej leží bod C . Body C a P ležia v zadnej stene kocky a v rovine rezu, preto rez dokončíme v zadnej stene úsečkou CN , kde $N \in GH$. Rezom kocky danou rovinou je rovnoramenný lichobežník $ACNM$.

Pokračujeme výpočtom obvodu lichobežníka:

AC je uhlopriečka vo štvorci so stranou dlhou 4 cm, preto $|AC| = 4\sqrt{2}$ cm. MN je stredná priečka trojuholníka EGH , jej dĺžka je polovica EG , teda $2\sqrt{2}$ cm. Úsečky AM a CN sú zhodné, ich dĺžku vypočítame napríklad Pytagorovou vetou v pravouhlom trojuholníku CGN :

$$|CN|^2 = |AM|^2 = x^2 = |CG|^2 + |GN|^2 = 4^2 + 2^2 = 20, \text{ odkiaľ } |CN| = |AM| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \text{ cm}$$

Potom obvod lichobežníka v centimetroch bude $4\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 2 \cdot 2\sqrt{5} \approx 17,43$.



Hodnotenie:

Úloha pozostávala z viacerých častí. Žiaci mali najskôr zostrojiť rez kocky danou rovinou. Pri konštrukcii rezu mohli využiť rovnobežnosť priesečníc roviny rezu s dvomi rovnobežnými stenami kocky. Následne mali žiaci dopočítať dĺžky strán vzniknutého lichobežníka. Na výpočet dĺžok mohli využiť goniometrické funkcie v pravouhlom trojuholníku alebo Pytagorovu vetu. Počet výpočtov dĺžok strán lichobežníka závisel od schopnosti žiaka „vidieť“ vzájomné vzťahy útvarov na obrázku a od miery skúseností pri planimetrických výpočtových úlohách.

Zostrojovanie rezov telies rovinou i výpočty dĺžok v pravouhlom trojuholníku sú zahrnuté v štátnom vzdelávacom programe pre GYM. Napriek tomu sa iba necelá tretina žiakov dopracovala k správne výsledku. Úloha bola takmer nevládnuteľná pre žiakov SOŠ, ktorí ju riešili s priemernou úspešnosťou len 6,1 %. Nevieme, či úlohu nevedeli vyriešiť, či ju riešili, ale počas riešenia sa dopustili chýb alebo či úlohu vôbec neriešili, ak identifikovali viacero činností, ktoré by mali vykonať na ceste k výsledku. Približne každý desiaty žiak GYM a každý piaty žiak SOŠ na úlohu neuviedol odpoveď.

Úloha bola podľa IRT obťažnejšou položkou s dobrou rozlišovacou schopnosťou.

Podobné úlohy:

- Zostrojte rez kocky $ABCDEFGH$ rovinou BMN , kde M je stred hrany AE , N stred CG , dĺžka hrany je 6 cm. Určte druh n -uholníka, ktorý je rezom a vypočítajte obvod rezu.

(Vocelka, J.: Maturujeme inak. EDITOR: Bratislava 2003, s. 24)

- Zostrojte rez kvádra $ABCDEFGH$ rovinou, ktorá obsahuje stredy stien $ABFE$, $BCGF$ a je rovnobežná s hranou DH . Vypočítajte obvod rezu, ak $|AB| = a$, $|BC| = b$, $|AE| = c$.

(Hecht, T. – Černek, P. – Božek, M.: Matematika pre 2. ročník gymnázií a SOŠ. Zošit 4 Zbierka úloh. Orbis Pictus Istropolitana: Bratislava 1998, s. 49)

- Daná je kocka $ABCDEFGH$ s hranou $a = 6$ cm. Zostrojte rez kocky rovinou, ktorá prechádza priamkou EG a je rovnobežná s priamkou CH . Vypočítajte obsah rezu.

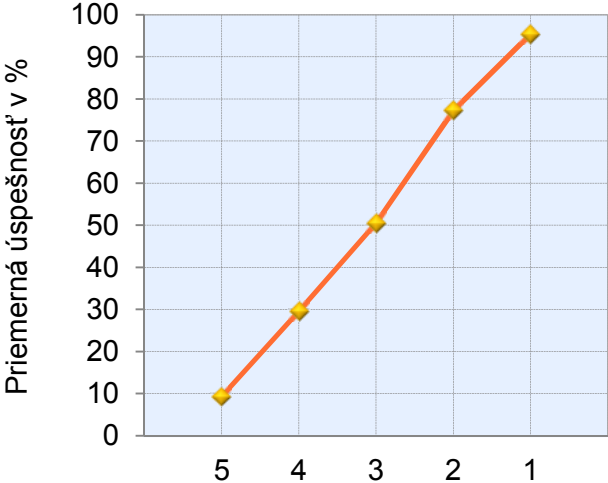
(Bušek, I. – Bero, P. – Calda, E. – Riečan, B. – Smida, J.: Zbierka úloh z matematiky pre 4. ročník gymnázia. SPN: Bratislava 1991, s. 91)

- Zostrojte rez pravidelného štvorbokého ihlana $ABCDV$ rovinou KLM , kde K je stred AD , L je stred AB a M je stred CV . Každá hrana ihlana má dĺžku 8 cm. Vypočítajte obvod rezu.

(Burjan, V. – Hrdina, L. – Maxian, M.: Prehľad matematiky, 1. časť. SPN: Bratislava 1997, s. 189)

Príklad č. 12	Téma: 2.4 Logaritmické a exponenciálne funkcie, geometrická postupnosť	
Zadanie:		
Určte x -ovú súradnicu bodu, v ktorom graf funkcie $f: y = -7 \cdot \log(x + 3)$ pretína os x .		
Pojmy, vlastnosti a vzťahy: logaritmická funkcia, logaritmus		
Žiak vie: určiť priesečníky grafu funkcie so súradnicovými osami, riešiť logaritmické rovnice		
Myšlienkové operácie: zložitejšie	Predpokladaná obťažnosť: stredne obťažná úloha	
Riešenie:		
Priesečníkom grafu funkcie s osou x je bod so súradnicami $[x; 0]$. Preto do predpisu funkcie f dosadíme za y číslo 0 a dopočítame súradnicu x :		
$0 = -7 \cdot \log(x + 3)$		
$\log_{10}(x + 3) = 0$		
Podľa definície logaritmu:	$10^0 = x + 3$	
	$x = 1 - 3 = -2$	
Graf funkcie f pretína os x v bode $[-2; 0]$, preto riešením úlohy je číslo -2 .		
Štatistické vyhodnotenie CTT:		
úspešnosť	celková	52,0 %
	žiaci GYM	62,3 %
	žiaci SOŠ	24,9 %
	chlapci	51,5 %
	dievčatá	53,2 %
neriešenosť	celková	19,1 %
	žiaci GYM	14,2 %
	žiaci SOŠ	32,1 %
citlivosť		83,6 %
P. Bis.		0,55

Graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí:



Výkonnostná skupina	Priemerná úspešnosť v %
5	10
4	30
3	50
2	78
1	95

Štatistické vyhodnotenie IRT:		obťažnosť	– 0,066	rozlišovacia schopnosť:	1,171
Najčastejšie odpovede a ich frekvencia:		Charakteristická krivka			
– 2	52,0 %				
–	19,1 %				
– 3	7,9 %				
4	2,7 %				
3	2,1 %				
– 4	1,2 %				
2	1,0 %				
Hodnotenie:					
Podstatou úlohy bolo určiť priesečník grafu funkcie so súradnicovou osou. Danou funkciou bola logaritmická funkcia s dekadickým logaritmom, hľadaným priesečníkom bol spoločný bod grafu funkcie s osou x. Žiaci mali v priebehu riešenia úlohy stanoviť, že súradnica y hľadaného priesečníka s osou x musí mať hodnotu 0 a hľadaná hodnota x sa dá zistiť vypočítaním vzniknutej anulovanej logaritmickovej rovnice. Žiaci si tiež potrebovali uvedomiť, že základ logaritmu v predpise funkcie je číslo 10. Vzniknutú rovnicu mohli vyriešiť využitím definície logaritmu alebo nahradením čísla 0 dekadickým logaritmom s vhodným argumentom. Štátny vzdelávací program pre GYM obsahuje zručnosť určovania súradníc priesečníkov grafu funkcie so súradnicovými osami a pojem logaritmu. Neobsahuje však logaritmickú funkciu, graf logaritmickovej funkcie a ani logaritmickú rovnicu (a rôzne postupy jej riešenia), pomocou ktorých mali žiaci najpravdepodobnejšie zistiť riešenie úlohy. Aktuálne platná učebnica matematiky pre 2. ročník GYM v závere druhej časti prináša odvodenie logaritmu ako hodnoty exponenciálneho rastu a ukážku dvoch grafov logaritmickovej funkcie, jedného so základom logaritmu 2, druhého so základom 0,5. Ako zaujímavosť sú uvedené základné pravidlá pre počítanie s logaritmi (logaritmus súčinu a logaritmus mocniny). Nenájdeme však príklady na využitie definície logaritmu, na určovanie hodnoty logaritmov, na zisťovanie argumentu alebo základu logaritmu. Taktiež sa učebnica nevenuje logaritmickému grafu a rôznym spôsobom jej riešenia.					

Napriek uvedenému úlohu úspešne vyriešila asi polovica žiakov. Oveľa úspešnejší boli žiaci GYM než žiaci SOŠ, z ktorých úlohu správne vyriešil iba každý štvrtý žiak. Pätina všetkých žiakov na úlohu neuviedla odpoveď. Kým zo žiakov GYM neodpovedalo na úlohu 14,2 % žiakov, zo žiakov SOŠ to bola až takmer tretina žiakov.

Najčastejšou chybnou odpoveďou bolo číslo -3 . Určilo ho 7,9 % žiakov ako nulovú hodnotu argumentu logaritmu v predpise funkcie, domnievajúc sa, že logaritmus sa rovná nule pre argument nula. Rovnaký výsledok mohli žiaci vypočítať správnym postupom, ale chybným určením hodnoty $10^0 = 0$ v rovnici $10^0 = x + 3$.

Ďalšou chybnou odpoveďou, ktorá vyplývala z nesprávneho osvojenia pojmu logaritmu, bolo číslo 4. 2,7 % žiakov sa domnievalo, že logaritmus v predpise funkcie v zadaní má neuvedený základ 7 a nulovú hodnotu súčinu v predpise funkcie získali z výrazu $\log_7(4 + 3) = \log_7 7 = 0$. Číslo 4 žiaci mohli vypočítať aj nepozorným riešením rovnice $10^0 = x + 3$ získanej správnym postupom.

Úloha bola najlepšie rozlišujúcou úlohou testu MAT15. Zaznamenali sme najvyššie hodnoty citlivosti a medzipoložkovej korelácie P . *Bis*. Krivka grafu distribúcie úspešností žiakov podľa výkonnostných skupín rovnomerne prudko rastie, takmer dosahuje tvar úsečky, pričom žiaci v teste celkove najmenej úspešní dosiahli priemernú úspešnosť nižšiu ako 10,0 %, ďalšie výkonnostné skupiny žiakov priemernú úspešnosť vždy vyššiu asi o 20,0 %, až po skupinu celkove v teste najúspešnejších žiakov s priemernou úspešnosťou takmer 100,0 %.

Z priebehu charakteristickej krivky položky vyčítame, že úloha bola priemerne obťažná, s výbornou rozlišovacou schopnosťou.

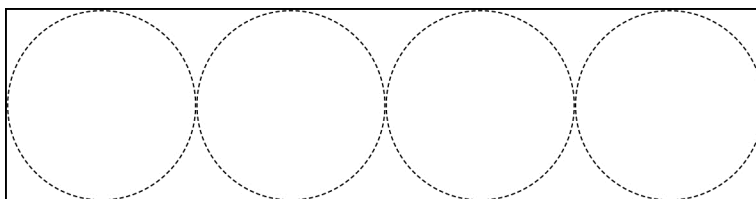
Podobné úlohy:

- Určte priesečníky funkcie f s osou x a y :
 - a) $f: y = \log(x + 2)$
 - b) $f: y = \log_3(2x - 1)$
 - c) $f: y = 4 - \log_2(x - 4)$
 - d) $f: y = 1 + 2 \cdot \log_{0,5}(2x - 3)$

(Božek, M. – Černek, P. – Bednářová, S.: Matematika pre 3. ročník gymnázií a SOŠ. Zošit 4 Zbierka úloh. Orbis Pictus Istropolitana: Bratislava 2001, s. 8)

Príklad č. 13 **Téma:** 4.5 Telesá**Zadanie:**

Štyri tenisové loptičky možno kúpiť v jednom balení v tvare valca (pozrite schému na obrázku). Každá loptička sa dotýka susednej loptičky a plášťa, prípadne podstavy valca. Koľko percent z celého vnútorného objemu valca tvorí prázdny priestor, ktorý nevyplňajú tenisové loptičky?



Pojmy, vlastnosti a vzťahy: guľa, valec, objem telies, vzťah pre výpočet objemu gule a valca, pomer, percento

Žiak vie: riešiť úlohy, ktorých súčasťou je výpočet objemu gule, valca a vie pri tom nájsť a aktívne použiť vzťahy pre výpočet objemov telies potrebné pre vyriešenie úlohy, používať percentá a úmeru

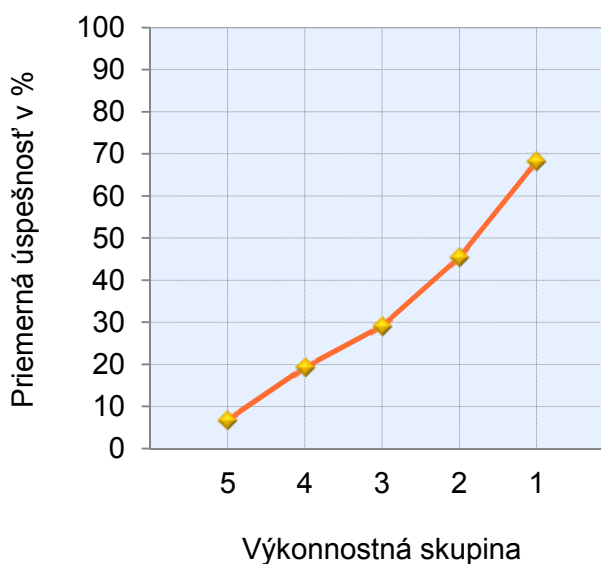
Myšlienkové operácie: zložitejšie

Predpokladaná obťažnosť: náročná úloha

Štatistické vyhodnotenie CTT:

úspešnosť	celková	33,6 %
	žiaci GYM	37,6 %
	žiaci SOŠ	22,7 %
	chlapci	33,3 %
	dievčatá	34,1 %
neriešenosť	celková	8,6 %
	žiaci GYM	9,5 %
	žiaci SOŠ	6,4 %
citlivosť		61,1 %
P. Bis.		0,40

Graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí:

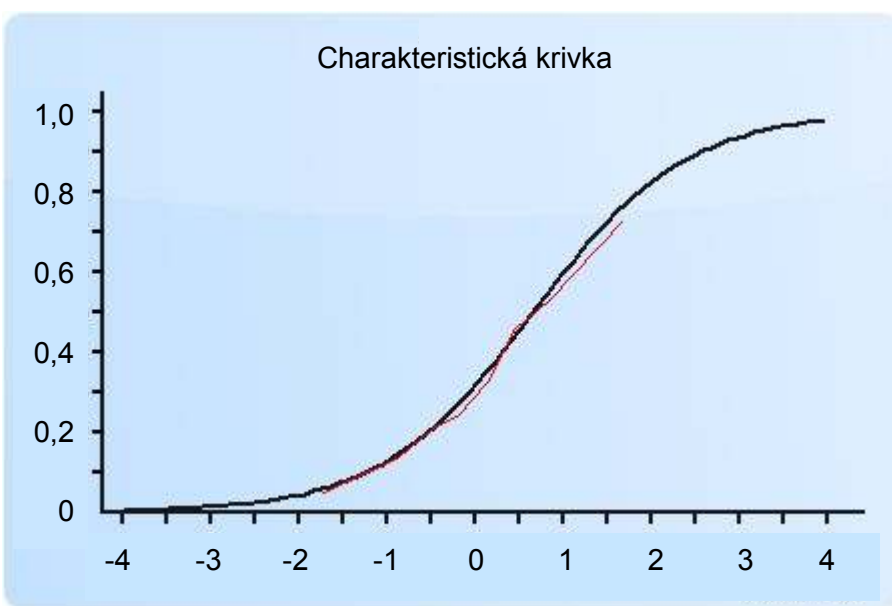
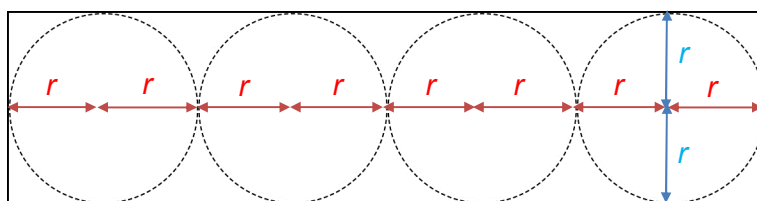


Štatistické vyhodnotenie IRT:	obťažnosť	0,742	rozlišovacia schopnosť:	0,669
--------------------------------------	-----------	-------	-------------------------	-------

Najčastejšie odpovede

a ich frekvencia:

33,33	33,6 %
–	8,6 %
33,34	6,9 %
21,46	5,0 %
25	4,4 %
21,5	3,0 %
47,64	2,9 %

**Riešenie:**

Ak označíme polomer jednej gule (loptičky) r , potom podľa obrázka polomer podstavy valca bude r a výška valca bude $8r$. Vyjadríme objemy loptičiek a balenia:

$$V(4 \text{ loptičiek}) = 4 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{16}{3}\pi r^3, \quad V(\text{valca}) = \pi r^2 \cdot 8r = 8\pi r^3$$

Zistíme, akú veľkú časť zaberajú loptičky: $\frac{V(4 \text{ loptičiek})}{V(\text{valca})} = \frac{\frac{16}{3}\pi r^3}{8\pi r^3} = \frac{\frac{16}{3}}{8} = \frac{2}{3}$

Zostatok, teda jednu tretinu, čo je 33,33 %, tvorí prázdny priestor v balení tvaru valca.

Hodnotenie:

Úloha bola zameraná na výpočet objemu valca a gule. Žiaci mali vypočítať objem štyroch rovnakých tenisových loptičiek tvaru gule, objem balenia tvaru valca a nakoniec vypočítať pomer objemu loptičiek a objemu balenia.

Zadanie úlohy neobsahovalo žiadny číselný údaj. Žiaci mali vyriešiť úlohu všeobecne, napríklad pomocou označenia polomeru jednej loptičky premennou a následne vyjadriť pomocou premennej výšku valca a polomer podstavy valca.

Všeobecné riešenie žiaci mohli nahradiť aj určením konkrétneho čísla ako dĺžky polomeru loptičky a následným výpočtom konkrétneho objemu loptičky a valca. Takémuto spôsobu riešenia však mala predchádzať úvaha, že pomer objemu voľného priestoru vo valci a objemu valca je rovnaký pre akúkoľvek veľkosť loptičky a balenia tvaru valca.

Všetky pojmy, vlastnosti, vzťahy a zručnosti potrebné k vyriešeniu úlohy sú zastúpené v štátnom vzdelávacom programe pre GYM. Kapitulu o objeme oblých telies nájdeme na začiatku druhej časti učebnice matematiky pre 2. ročník GYM.

Úlohu správne vyriešila asi tretina všetkých žiakov. Mierne úspešnejší boli žiaci GYM v porovnaní so žiakmi SOŠ. Rozdiel v úspešnosti chlapcov a dievčat bol zanedbateľný. Odpoveď neuviedla necelá desatina maturantov, medzi ktorými prevládali žiaci GYM.

6,9 % žiakov, ktorí uviedli odpoveď 33,34, zrejme počítali úlohu správne. Dopustili sa však chyby, keď vypočítaný podiel objemu loptičiek a objemu balenia dve tretiny vyjadrili nesprávnym desatinným číslom 66,66 %, bez zaokrúhlenia na správnu hodnotu 66,67 %. Následne dopočítali nesprávnu hodnotu výsledku $100 - 66,66 = 33,34$.

Nesprávny výsledok 21,46 u 5,0 % žiakov bol dôsledkom myšlienkového chyby. Žiaci, zrejme na základe „schémy“ na obrázku, ktorý bol súčasťou zadania, počítali namiesto objemu gule a valca obsah kruhu a obdĺžnika. Spôsob zobrazenia tenisových loptičiek a ich balenia v zadaní úlohy bol predmetom diskusie pri príprave grafickej podoby testu. Zvažovala sa možnosť nakreslenia obrázka skutočného valca a štyroch gúl alebo schémy s obdĺžnikom a štyrmi rovnakými kruhmi. Nakoniec sme zvolili druhú možnosť, pri ktorej sme predpokladali, že žiakom lepšie pomôže pri identifikovaní vzťahu medzi výškou balenia a veľkosťou polomeru jednej tenisovej loptičky. Do zadania úlohy sme namiesto obvyklého textu „pozrite obrázok“ uviedli „pozrite schému na obrázku“, čím sme sa snažili naznačiť, že obrázok je len zjednodušeným zobrazením telies zo zadania úlohy.

Výsledok 25 zrejme 4,4 % žiakov uviedlo ako výsledok úvahy, že loptičky tvoria tri štvrtiny objemu balenia. Žiaci celkove uviedli až 304 rôznych nesprávnych odpovedí na úlohu.

Položka bola pre žiakov obťažnejšia, s dobrou rozlišovacou schopnosťou.

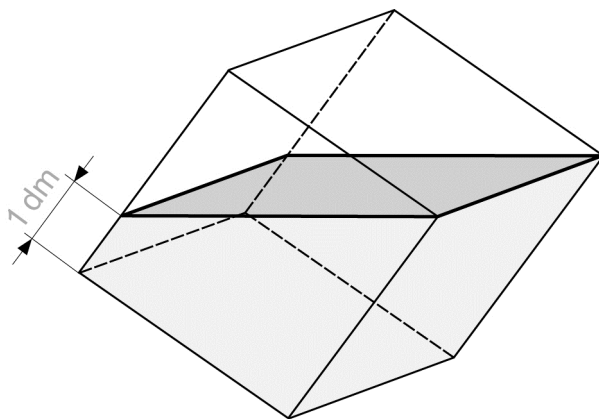
Podobné úlohy:

- Do gule G sú vložené dve gule s polovičným polomerom, ktoré sa dotýkajú v strede veľkej gule. Akú časť objemu gule G tvorí objem telesa, ktoré vznikne zjednotením oboch menších gúl?

(Božek, M. – Černek, P. – Bednářová, S.: Matematika pre 3. ročník gymnázií a SOŠ. Zošit 4 Zbierka úloh. Orbis Pictus Istropolitana: Bratislava 2001, s. 20)

Príklad č. 14 **Téma:** 4.5 Telesá**Zadanie:**

Akvárium má tvar kocky s dĺžkou hrany 6 dm. Ak akvárium otáčame okolo jeho podstavnej hrany, tak voda z akvária začne vytekať práve vtedy, keď voda na protiľahlej stene akvária dosiahne do výšky 1 dm (pozrite obrázok). Vypočítajte, koľko litrov vody bolo v akváriu.



Pojmy, vlastnosti a vzťahy: hranol, kolmý hranol, objem telesa, vzťah pre výpočet objemu hranola

Žiak vie: riešiť úlohy, ktorých súčasťou je výpočet objemu kolmého hranola a vie pri tom nájsť a aktívne použiť vzťahy pre výpočet objemov telies potrebné pre vyriešenie úlohy

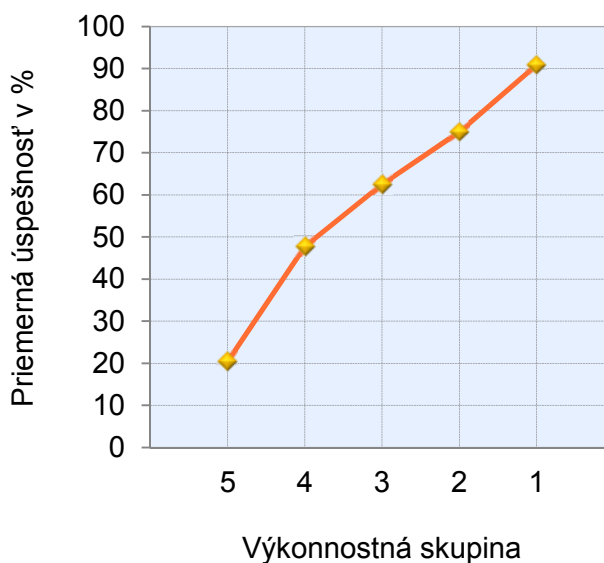
Myšlienkové operácie: zložitejšie

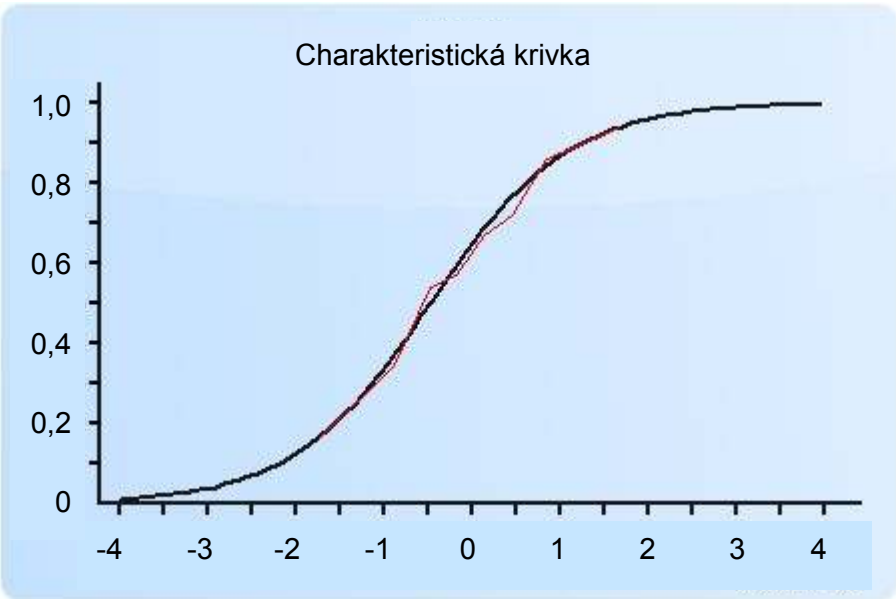
Predpokladaná obťažnosť: náročná úloha

Štatistické vyhodnotenie CTT:

úspešnosť	celková	60,0 %
	žiaci GYM	64,9 %
	žiaci SOŠ	47,3 %
	chlapci	63,6 %
	dievčatá	52,3 %
neriešenosť	celková	10,8 %
	žiaci GYM	10,9 %
	žiaci SOŠ	10,5 %
citlivosť		70,1 %
P. Bis.		0,43

Graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí:



Štatistické vyhodnotenie IRT:		obťažnosť	– 0,415	rozlišovacia schopnosť:	0,739
Najčastejšie odpovede a ich frekvencia:		Charakteristická krivka 			
126	60,0 %				
–	10,8 %				
144	2,0 %				
108	1,8 %				
180	1,6 %				
216	1,4 %				
36	1,0 %				

Hodnotenie:

Úloha bola zameraná na výpočet objemu hranatých telies. Žiaci mali nájsť spôsob, ako vypočítať objem vody v akváriu, či už ako objem štvorbokého kolmého hranola predstavujúceho vodu v akváriu alebo pomocou objemu kolmého trojbokého hranola predstavujúceho prázdne miesto v akváriu, bez vody.

Všetky pojmy, vlastnosti, vzťahy a zručnosti potrebné k vyriešeniu úlohy sú zastúpené v štátnom vzdelávacom programe pre GYM. Kapitulu o objeme hranatých telies nájdeme na konci druhej časti učebnice matematiky pre 1. ročník GYM.

Úloha napriek predpokladanej náročnosti nespôsobila žiakom veľké problémy. Správnu odpoveď uviedlo 60,0 % žiakov. Žiaci GYM boli úspešnejší ako žiaci SOŠ. Chlapci riešili úlohu úspešnejšie ako dievčatá, pričom v tejto úlohe sme zaznamenali najväčší vecne významný rozdiel v priemernej úspešnosti chlapcov a dievčat spomedzi všetkých úloh testu MAT15. Odpoveď neuviedol asi každý desiaty žiak.

Nesprávnu odpoveď 144 uviedli žiaci, ktorí určili objem vody v akváriu ako dve tretiny objemu celého akvária.

Nesprávnu odpoveď 108 mohli uviesť žiaci, ktorí objem vody v akváriu počítali ako súčet objemov dvoch telies. Prvým telesom bol kváder s rozmermi 6 dm, 6 dm a 1 dm a objemom 36 dm³ (dolná časť vody), druhým telesom hranol s výškou 6 dm a s podstavou pravouhlého trojuholníka s odvesnami 6 dm a chybné stanovenou dĺžkou druhej odvesny 4 dm namiesto 5 dm a nesprávnym objemom 72 dm³ (horná časť vody). Výsledný objem bol 108 dm³.

Nesprávna odpoveď 180 bola dôsledkom viacerých chýb. Jednak žiaci počítali objem prázdnej časti akvária a zároveň sa dopustili aj chyby pri výpočte obsahu podstavy trojbokého hranola, keď pri výpočte obsahu pravouhlého trojuholníka súčin dĺžok odvesien $6 \cdot 5$ nepredelili číslom 2. Vypočítali tak v litroch objem prázdnej časti akvária $6 \cdot 5 \cdot 6 = 180$.

Úloha bola priemerne obťažnou položkou s dobrou rozlišovacou schopnosťou.

Podobné úlohy:

- Z oceľovej tyče odrezali súčiastku tvaru „zrezaného hranola“ $ABCD A' B' C' D'$, pre ktorý platí: $ABCD$ je štvorec so stranou $|AB| = |BC| = 30$ mm, $|AA'| = |BB'| = 125$ mm, $|CC'| = |DD'| = 105$ mm, $AA' \perp ABC$. Vypočítajte hmotnosť súčiastky, ak hustota materiálu je $7,8 \text{ g/cm}^3$.

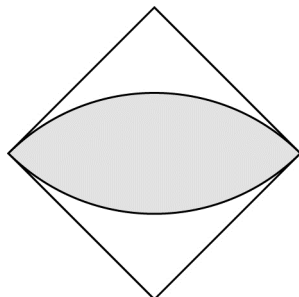
(Božek, M. – Černek, P. – Bednářová, S.: Matematika pre 3. ročník gymnázií a SOŠ. Zošit 4 Zbierka úloh. Orbis Pictus Istropolitana: Bratislava 2001, s. 16)

- V kocke $ABCD A' B' C' D'$ je vedená hranou CC' , ktorej dĺžka je a , rovina ρ tak, že rozdelí kocku na dva kolmé hranoly (štvorboký a trojboký), ktorých objemy sú v pomere $3 : 2$. V akom pomere je touto rovinou rozdelená hrana AB ?

(Vejsada, F. – Talafous, F.: Zbierka úloh z matematiky pre SVŠ a gymnáziá. SPN: Bratislava 1972, s. 544)

Príklad č. 15 **Téma:** 3.1 Základné rovinné útvary**Zadanie:**

Do štvorca so stranou dlhou 1 cm sú vpísané dve štvrtkružnice so stredmi v protiľahlých vrchoch štvorca (pozrite obrázok). Vypočítajte v centimetroch štvorcových obsah vyznačenej časti štvorca, ohraničenej dvoma štvrtkružnicami.



Pojmy, vlastnosti a vzťahy: trojuholník, plošný obsah trojuholníka, štvorec, kružnica, polomer kružnice, kruhový výsek, obsah kruhového výseku, vyjadrenie obsahu trojuholníka pomocou dĺžky strany a k nej prislúchajúcej výšky, vzťah pre výpočet obsahu kruhového výseku

Žiak vie: vypočítať obsah trojuholníka, vypočítať obsah štvorca a rovnobežníka, vypočítať obsah kruhového výseku

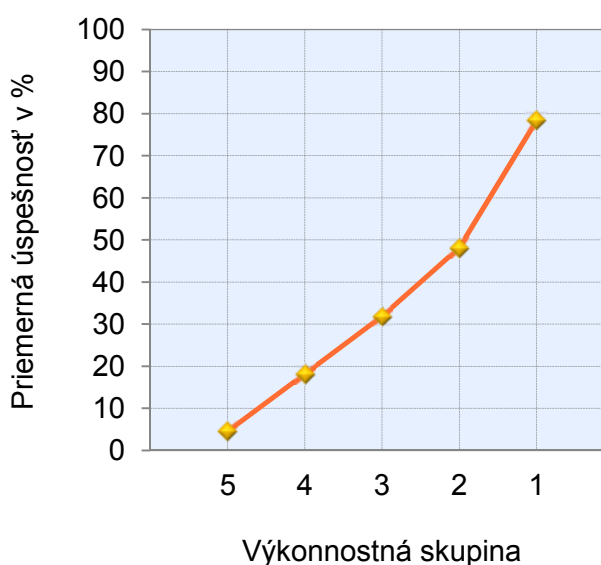
Myšlienkové operácie: zložitejšie

Predpokladaná obťažnosť: stredne obťažná úloha

Štatistické vyhodnotenie CTT:

úspešnosť	celková	35,9 %
	žiaci GYM	41,7 %
	žiaci SOŠ	20,8 %
	chlapci	36,7 %
	dievčatá	34,3 %
neriešenosť	celková	24,0 %
	žiaci GYM	23,0 %
	žiaci SOŠ	26,4 %
citlivosť		75,9 %
P. Bis.		0,51

Graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí:

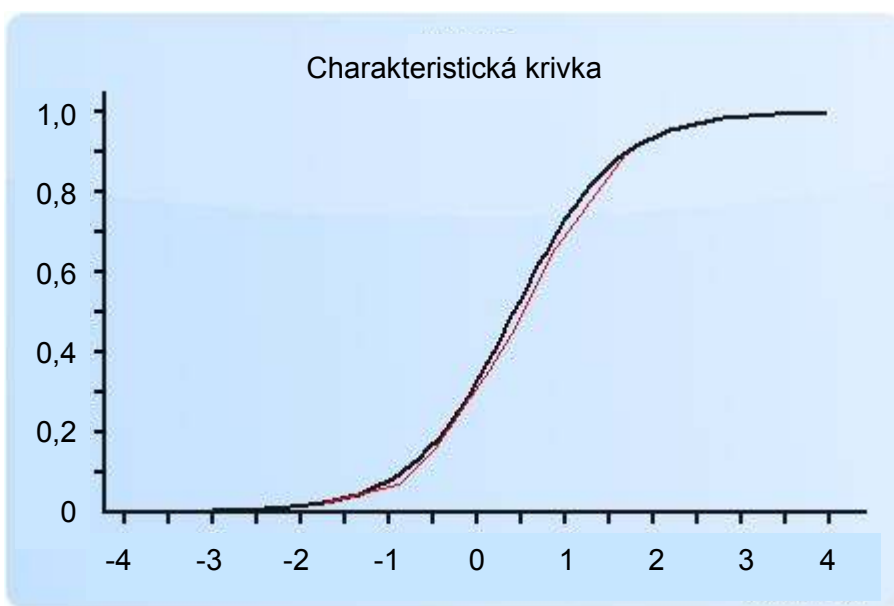


Štatistické vyhodnotenie IRT:	obťažnosť	0,499	rozlišovacia schopnosť:	0,987
--------------------------------------	-----------	-------	-------------------------	-------

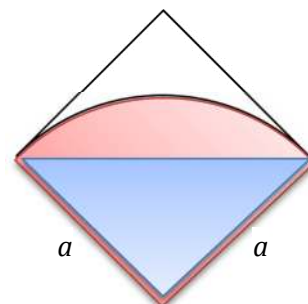
**Najčastejšie
odpovede**

a ich frekvencia:

0,57	35,9 %
–	24,0 %
0,50	6,0 %
0,79	5,5 %
1,57	2,6 %
0,39	2,3 %
3,14	1,3 %

**Riešenie:**

Vyznačenú časť štvorca rozdelíme uhlopriečkou na dve rovnaké časti. Obsah S_0 každej z týchto častí vypočítame ako rozdiel obsahu S_1 štvrtkruhu s polomerom dĺžky strany pôvodného štvorca a (na obrázku vyznačený červenou farbou) a obsahu S_2 pravouhlého trojuholníka s odvesnami totožnými so susednými stranami pôvodného štvorca (na obrázku zobrazený modrou farbou).



$$S = 2 \cdot S_0 = 2 \cdot (S_1 - S_2) = 2 \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot \pi a^2 - \frac{a^2}{2} \right) = 2 \cdot \frac{a^2 \cdot (\pi - 2)}{4} = \frac{1 \cdot (\pi - 2)}{2} \doteq 0,57$$

Dĺžky sú uvedené v centimetroch, obsahy sú v centimetroch štvorcových.

Hodnotenie:

Úloha bola zameraná na výpočet obsahu nepravidelného geometrického útvaru pomocou obsahu základných rovinných útvarov.

Žiaci mohli riešiť úlohu viacerými spôsobmi. Základom bolo nájsť spôsob, ako pomocou súčtu alebo rozdielu obsahu známych geometrických útvarov určiť obsah vyznačenej plochy na obrázku v zadaní. Vždy však museli vypočítavať obsah štvorca alebo jeho časti, napríklad pravouhlého trojuholníka, a obsah časti kruhu, či už štvrtiny kruhu alebo kruhového výseku s určitým stredovým uhlom. Zrejme sa našli aj žiaci, ktorí príklad počítali pomocou obsahu nevyznačenej časti obrázka.

Donedávna bol tento typ úlohy často zastúpený v učebniciach a zbierkach úloh posledných ročníkov základných škôl a obvykle sa vyskytoval aj medzi úlohami prijímacích skúšok na stredné školy. V súčasnosti sú všetky pojmy, vlastnosti, vzťahy a zručnosti potrebné na vyriešenie úlohy zastúpené v štátnom vzdelávacom programe pre GYM. Žiaci sa s výpočtom obsahu trojuholníka a kruhového výseku stretnú v druhej časti učebnice matematiky pre 1. ročník GYM.

Napriek tomu, že podobné príklady boli ešte pred niekoľkými rokmi súčasťou prijímacích skúšok na GYM aj SOŠ pre všetkých žiakov, nielen pre tých so záujmom o matematiku, iba o niečo viac ako tretina tohtoročných maturantov, ktorá si skúšku z matematiky vybrala ako voliteľný alebo dobrovoľný predmet, úlohu vyriešila správne. Žiaci GYM boli viac ako dvojnásobne úspešnejší ako žiaci SOŠ. Úspešnosť chlapcov a dievčat bola porovnateľná. Odpoveď neuviedol približne každý štvrtý žiak GYM aj SOŠ.

6,0 % žiakov sa domnievalo, že obsah vyšrafovej časti je polovica obsahu hraničného štvorca a ako odpoveď preto uviedlo polovicu obsahu štvorca so stranou dlhou 1 cm.

Ďalšia skupina 5,5 % žiakov ako odpoveď uviedla obsah jednej štvrtiny kruhu $0,79 \text{ cm}^2$. Predpokladáme, že nevedeli objaviť spôsob, ako vypočítať hľadaný obsah pomocou súčtu alebo rozdielu čiastkových obsahov útvarov. 2,3 % žiakov uviedlo ako odpoveď polovicu obsahu štvrtiny kruhu $0,39 \text{ cm}^2$, zrejme ako dôsledok symetrie obrázka v zadaní úlohy.

Odpoveď 1,57 uviedlo 2,6 % žiakov, ktorí zrejme počítali príklad správne, ale namiesto rozdielu čiastkových obsahov vypočítali súčet obsahov štvorca a štvrtiny kruhu.

Z grafu distribúcie úspešností žiackych odpovedí a hodnoty citlivosti vidíme, že položka veľmi dobre rozlíšila žiakov, najmä najlepšiu výkonnostnú skupinu. Položka dosiahla vysokú hodnotu medzipoložkovej korelácie *P. Bis*. Podľa štatistických vyhodnotení IRT metódou bola položka priemerne obťažná, s výbornou rozlišovacou schopnosťou.

Podobné úlohy:

- Daný je štvorec $ABCD$ so stranou a . Okolo jeho vrcholov A a C sú opísané štvrtkružnice s polomerom $r = a$ dovnútra štvorca. Určte obsah útvaru U medzi štvrtkružnicami.

(Vejsada, F. – Talafous, F.: Zbierka úloh z matematiky pre SVŠ a gymnáziá. SPN: Bratislava 1972, s. 400)

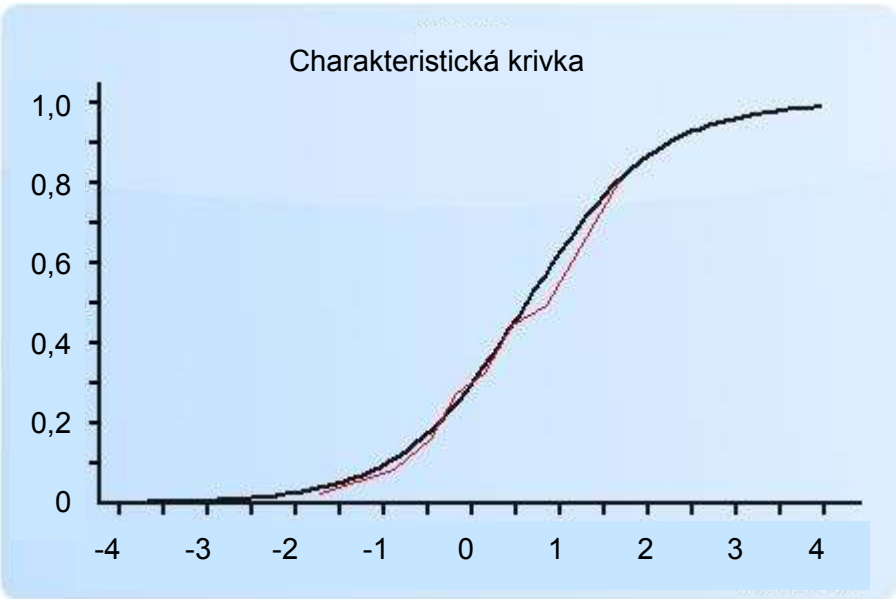
- Daný je štvorec $ABCD$, $a = 10 \text{ cm}$. Vrcholy B a D sú stredy oblúkov kružníc s polomerom $r = a$. Vypočítajte obsah útvaru medzi oblúkmi kružníc vo štvorci.

(Běloun, F. – Bušek, I. – Macháček, V. – Müllerová, J. – Sovíková, K. – Šůla, V.: Sbírkka úloh z matematiky pro základní školu. Prometheus: Praha 1998, s. 133)

Príklad č. 16	Téma: 2.4 Logaritmické a exponenciálne funkcie, geometrická postupnosť	
Zadanie:		
Súčet druhého a štvrtého člena geometrickej postupnosti je dvojnásobkom súčtu prvého a tretieho člena postupnosti. Súčet prvých desiatich členov postupnosti je 3 069. Určte prvý člen postupnosti.		
Pojmy, vlastnosti a vzťahy: geometrická postupnosť, kvocient geometrickej postupnosti		
Žiak vie: vyjadriť n-tý člen geometrickej postupnosti pomocou jej prvého alebo iného člena a kvocientu		
Myšlienkové operácie: zložitejšie	Predpokladaná obťažnosť: stredne obťažná úloha	
Riešenie:		
Prvé štyri členy geometrickej postupnosti vyjadríme pomocou prvého člena a a kvocientu q (a, aq, aq^2, aq^3) a zapíšeme rovnicami údaje zo zadania:		
$aq + aq^3 = 2 \cdot (a + aq^2)$		$s_{10} = a \cdot \frac{q^{10}-1}{q-1}$
$aq \cdot (1 + q^2) = 2a \cdot (1 + q^2)$		$3\,069 = a \cdot \frac{q^{10}-1}{q-1}$
$q = 2$		
Vypočítaný kvocient 2 dosadíme do druhej rovnice $3\,069 = a \cdot \frac{2^{10}-1}{2-1}$, odkiaľ $a = \frac{3069}{2^{10}-1} = 3$.		
Štatistické vyhodnotenie CTT:		
úspešnosť	celková	32,7 %
	žiaci GYM	39,2 %
	žiaci SOŠ	15,7 %
	chlapci	32,0 %
	dievčatá	34,3 %
neriešenosť	celková	37,1 %
	žiaci GYM	35,3 %
	žiaci SOŠ	41,6 %
citlivosť		66,5 %
P. Bis.		0,44

Graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí:

Výkonnostná skupina	Priemerná úspešnosť v %
5	5
4	18
3	30
2	42
1	72

Štatistické vyhodnotenie IRT:		obťažnosť	0,701	rozlišovacia schopnosť:	0,791
Najčastejšie odpovede a ich frekvencia:		Charakteristická krivka 			
–	37,1 %				
3	32,7 %				
2	2,4 %				
0	1,2 %				
4	1,1 %				
6	1,1 %				
7	0,9 %				
Hodnotenie:		Úloha bola zameraná na geometrickú postupnosť. Žiaci mali podľa zadania vyjadriť členy geometrickej postupnosti pomocou konkrétneho člena (najlepšie prvého člena, ktorý bol predmetom otázky úlohy) a kvocientu, zostaviť z nich rovnice a vypočítať hodnotu kvocientu a následne prvého člena geometrickej postupnosti. Postupnosti, ani špeciálne geometrická postupnosť, nie sú súčasťou štátneho vzdelávacieho programu pre GYM. Nevenuje sa im ani jedna z platných učebníc matematiky pre GYM. Problematiku postupností si žiaci môžu osvojiť napríklad na voliteľných hodinách zameraných na matematiku alebo samostatným štúdiom. Správnu odpoveď uviedla necelá tretina žiakov. Oveľa úspešnejší boli žiaci GYM než žiaci SOŠ, ktorí riešili úlohu s priemernou úspešnosťou len 15,7 %. Úspešnosť chlapcov a dievčat bola porovnateľná. Úloha dosiahla najvyššiu neriešenosť spomedzi všetkých úloh testu MAT15. Odpoveď neuviedla viac ako tretina všetkých žiakov, či už to boli žiaci GYM (35,3 %) alebo žiaci SOŠ (41,6 %). Hlavnú príčinu predpokladáme práve v absencii učiva o postupnostiach v štátnom vzdelávacom programe pre všetky druhy stredných škôl a z toho vyplývajúce nedostatočné osvojenie si pojmov a postupov potrebných pri riešení úloh o postupnostiach. Hoci oba vzťahy, potrebné k úspešnej matematizácii údajov zo zadania úlohy, boli uvedené v prehľade vzťahov na zadnom liste testu, zrejme ich mnoho žiakov nedokázalo využiť k zápisu potrebných rovníc alebo žiakov odradila od výpočtu náročnosť zostavených rovníc.			

Počet žiakov, ktorí na položku neuviedli odpoveď, bol vyšší ako počet žiakov, ktorí uviedli správnu odpoveď.

Nesprávnu odpoveď 2 uviedli 2,4 % žiakov, ktorí zrejme zamenili kvocient s prvým členom postupnosti.

Nesprávnu odpoveď 0 uviedlo 1,2 % žiakov, ktorí zrejme úlohu riešili ako aritmetickú postupnosť napriek tomu, že pojem geometrickej postupnosti bol uvedený aj v zadaní úlohy, aj v prehľade vzťahov na zadnom liste testu. Žiaci zostavili rovnicu prvého člena a diferencie, odkiaľ priamo dopočítali hodnotu prvého člena rovnú 0. Skúšku na súčet prvých desiatich členov postupnosti už zrejme nevykonali.

Žiaci celkove uviedli 205 rôznych chybných hodnôt prvého člena geometrickej postupnosti.

Nízka obťažnosť a vysoká neriešenosť úlohy mohli byť niektorými z príčin dosiahnutej citlivosti úlohy. Rozdiel v priemernej úspešnosti žiakov každej dvojice susedných výkonnostných skupín bol vždy iba asi 10,0 %, až na rozdiel medzi priemernou úspešnosťou prvej a druhej výkonnostnej skupiny, ktorý bol väčší (približne 30,0 %).

Podľa štatistických údajov získaných IRT metódou bola úloha o geometrickej postupnosti obťažnejšou položkou s dobrou rozlišovacou schopnosťou.

Podobné úlohy:

- Súčet štyroch za sebou idúcich členov geometrickej postupnosti je 80. Určte ich, ak viete, že posledný člen je deväťkrát väčší než druhý člen.

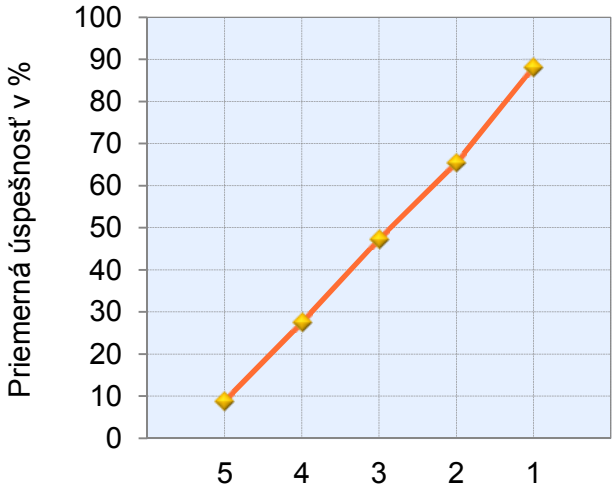
(Vejsada, F. – Talafous, F.: Zbierka úloh z matematiky pre SVŠ a gymnáziá. SPN: Bratislava 1972, s. 283)

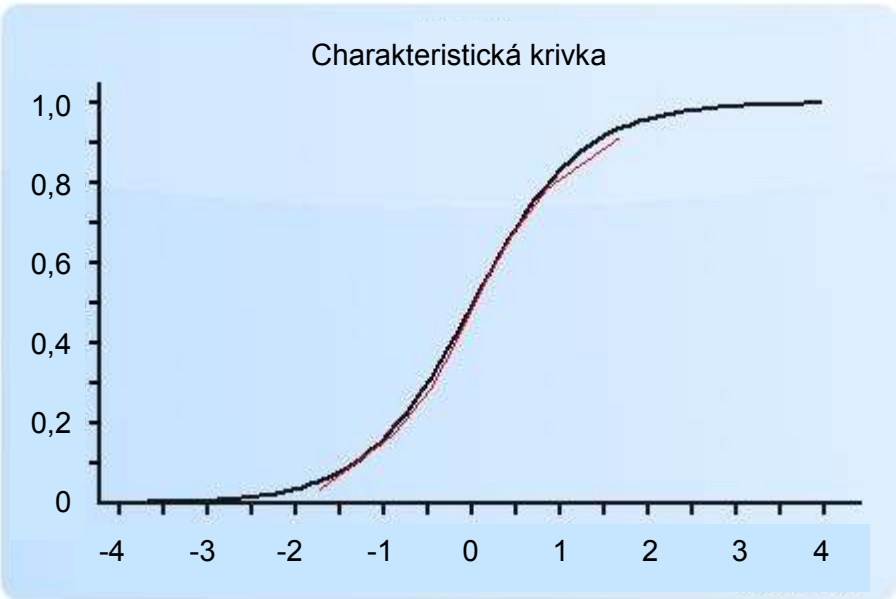
- Nájdite všetky štvorčlenné geometrické postupnosti, ktorých súčet „krajných“ členov je 112 a súčet „vnútorných“ je 48.

(Vocelka, J.: Maturujeme inak. EDITOR: Bratislava 2003, s. 53)

- Súčet prvých troch členov geometrickej postupnosti je 38, súčet nasledujúcich troch členov tejto postupnosti je $\frac{304}{27}$. Vypočítajte prvý člen postupnosti.

(Petáková, J.: Matematika – příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy. Prometheus: Praha 1998, s. 70)

Príklad č. 17		Téma: 1.4 Rovnice, nerovnice a ich sústavy	
Zadanie:			
Vypočítajte v stupňoch súčet všetkých koreňov rovnice $\cos x = \frac{1}{2}$ z intervalu $(0^\circ; 540^\circ)$.			
Pojmy, vlastnosti a vzťahy: rovnica, koreň, kosínus			
Žiak vie: riešiť goniometrické rovnice, vyjadriť (na základe súmernosti a periodickosti grafov goniometrických funkcií) $\cos \alpha$ pre $\alpha \in R$ ako kosínus vhodného uhla $x \in (0; 90^\circ)$			
Myšlienkové operácie: jednoduchšie		Predpokladaná obťažnosť: ľahká úloha	
Riešenie:			
Najprv hľadáme čísla (veľkosti uhlov) v intervale $(0^\circ; 360^\circ)$, ktorých kosínus je $\frac{1}{2}$. Sú to čísla 60° a 300°. Riešením rovnice v R sú na základe periodickosti funkcie kosínus aj ďalšie čísla tvaru $x_1 = 60^\circ + k \cdot 360^\circ$ a $x_2 = 300^\circ + k \cdot 360^\circ$, kde $k \in Z$. Pre $k \in Z^-$ budú riešením záporné čísla, ktoré nepatria do intervalu v zadaní. Pre $k = 1$ sú to čísla $60^\circ + 360^\circ = 420^\circ$ a $300^\circ + 360^\circ = 660^\circ$, z ktorých však do intervalu v zadaní patrí už iba prvé číslo 420°. Pre iné k už rovnica nebude mať riešenia z intervalu daného v zadaní. Súčet troch koreňov rovnice z daného intervalu v stupňoch je $60 + 300 + 420 = 780$.			
Štatistické vyhodnotenie CTT:			
úspešnosť	celková	47,7 %	Graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí: 
	žiaci GYM	57,4 %	
	žiaci SOŠ	22,0 %	
	chlapci	47,0 %	
	dievčatá	49,3 %	
neriešenosť	celková	12,1 %	
	žiaci GYM	7,5 %	
	žiaci SOŠ	24,6 %	
citlivosť		79,7 %	
P. Bis.		0,50	

Štatistické vyhodnotenie IRT:		obťažnosť	0,082	rozlišovacia schopnosť:	0,935
Najčastejšie odpovede a ich frekvencia:		Charakteristická krivka 			
780	47,7 %				
–	12,1 %				
420	5,0 %				
480	3,0 %				
720	2,8 %				
360	2,5 %				
3	1,6 %				
Hodnotenie:		Podstatou úlohy bolo vyriešiť základnú goniometrickú rovnicu. Žiaci mali určiť čísla, ktoré sú riešením rovnice a následne rozhodnúť, ktoré z nich patria do intervalu uvedeného v zadaní úlohy a vypočítať ich súčet. Prehľad vzťahov na zadnom liste testu obsahoval hodnoty funkcií sínus a kosínus pre základné veľkosti uhlov z intervalu $\langle 0^\circ; 90^\circ \rangle$, medzi nimi aj hodnotu $\frac{1}{2}$ zo zadania úlohy. Všetky pojmy, vlastnosti, vzťahy a zručnosti potrebné k vyriešeniu rovnice, s výnimkou pojmu riešenia goniometrickej rovnice, obsahuje štátny vzdelávací program pre GYM. Venuje sa im aj 1. časť platnej učebnice matematiky pre 3. ročník GYM. V učebnici síce nenájdeme postupy a riešenia rôznych typov goniometrických rovníc, žiaci sa však dozvedia, ako hľadať veľkosti uhlov z celej množiny reálnych čísel, ktoré vyhovujú zadanej hodnote niektorej goniometrickej funkcie, či už pomocou jednotkovej kružnice alebo využitím grafu goniometrickej funkcie. Cieľové požiadavky na vedomosti a zručnosti maturantov z matematiky obsahujú aj požiadavku ovládania riešenia zložitejších goniometrických rovníc, či už využitím substitúcie argumentu goniometrickej funkcie, substitúcie samotnej goniometrickej funkcie alebo úpravy zložitejšej goniometrickej rovnice pomocou rovností a vzťahov na jednoduchší tvar, prípadne na tvar súčinu rovného nule. Všetky postupy riešenia zložitejších goniometrických rovníc vedú k riešeniu niektorej zo základných goniometrických rovníc, podobných rovnici v tejto úlohe. Nízka úspešnosť žiakov pri riešení úlohy preto určite stojí za zamyslenie.			

Podľa stupňa obťažnosti a náročnosti myšlienkovej operácie potrebnej na vyriešenie úlohy by mala byť úloha zaradená medzi úvodné úlohy testu. Nižšia úspešnosť žiakov pri riešení úlohy v pilotných testovaniach však spôsobila zaradenie úlohy medzi posledné ÚKO v teste.

Správnou odpoveď uviedol ani nie každý druhý žiak. Priemerná úspešnosť žiakov GYM bola oveľa vyššia ako žiakov SOŠ, z ktorých správne odpovedal iba asi každý štvrtý maturant z matematiky. Úspešnosť chlapcov a dievčat bola porovnateľná. Odpoveď neuviedol približne každý desiaty žiak, pričom neriešenosť úlohy žiakmi SOŠ (24,6 %) bola značne vyššia ako neriešenosť žiakmi GYM (7,5 %).

Najčastejšie sa opakujúce chybné odpovede boli spôsobené pretrvávajúcimi chybami žiakov pri riešení základných goniometrických rovníc. Odpoveď 420 uviedlo 5,0 % žiakov, ktorí za odpoveď považovali iba najväčšie číslo, ktoré vyhovovalo rovnici a uvedenému intervalu.

Odpoveď 480 uviedli 3,0 % žiakov. Riešenia rovnice určili iba z prvého kvadrantu, či už pomocou kalkulačky alebo tabuľky v prehľade vzťahov na zadnom liste testu.

Odpoveď 720 uviedlo 2,8 % žiakov, ktorí sčítali všetky tri korene rovnice, ale namiesto koreňa 300° zo štvrtého kvadrantu, v jednotkovej kružnici osovo súmerného s koreňom 60° podľa osi x , určili koreň 240° , ktorý je s koreňom 60° stredovo súmerný podľa stredu jednotkovej kružnice.

2,5 % žiakov sčítalo iba korene rovnice z intervalu $\langle 0^\circ; 360^\circ \rangle$.

1,6 % žiakov pochopilo znenie otázky „...súčet všetkých koreňov rovnice...“ ako súčet počtu všetkých koreňov rovnice vyhovujúcich intervalu v zadaní a uviedlo odpoveď 3.

Z grafu distribúcie úspešností žiackych odpovedí podľa výkonnostných skupín, hodnoty citlivosti a medzipoložkovej korelácie P . *Bis.* je zrejmé, že položka veľmi dobre rozlíšila žiakov. Priemerná úspešnosť každej ďalšej výkonnostnej skupiny je asi o 20,0 % vyššia ako predchádzajúcej, krivka grafu rovnomerne prudko rastie.

Podľa štatistického vyhodnotenia výsledkov IRT metódou bola úloha priemerne obťažnou položkou s dobrou rozlišovacou schopnosťou.

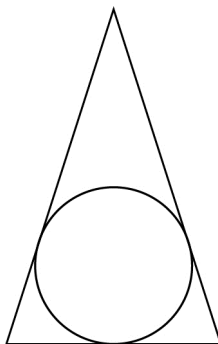
Podobné úlohy:

- Viete, že $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$. Nájdite všetky uhly α , pre ktoré platí $\cos \alpha = \frac{1}{2}$.
- Riešte rovnicu $\sin x = -\frac{1}{2}$ v intervale $\langle 0; 2\pi \rangle$.

(Černek, P. – Hecht, T. – Božek, M.: Matematika pre 2. ročník gymnázií a SOŠ. Zošit 4 Zbierka úloh. Orbis Pictus Istropolitana: Bratislava 1998, s. 19, s. 20)

Príklad č. 18 **Téma:** 3.1 Základné rovinné útvary**Zadanie:**

Do rovnoramenného trojuholníka so základňou dlhou 2 cm a výškou na základňu dlhou 6 cm je vpísaná kružnica (pozrite obrázok). Vypočítajte v centimetroch polomer vpísanej kružnice.



Pojmy, vlastnosti a vzťahy: rovnoramenný trojuholník, výška trojuholníka, kružnica do trojuholníka vpísaná, polomer kružnice, *os uhla, priesečník osí uhlov je stred vpísanej kružnice*

Žiak vie: vypočítať v trojuholníku jednoznačne určenom zvyšné strany a uhly, dĺžky ťažníc, výšok, obvod a obsah

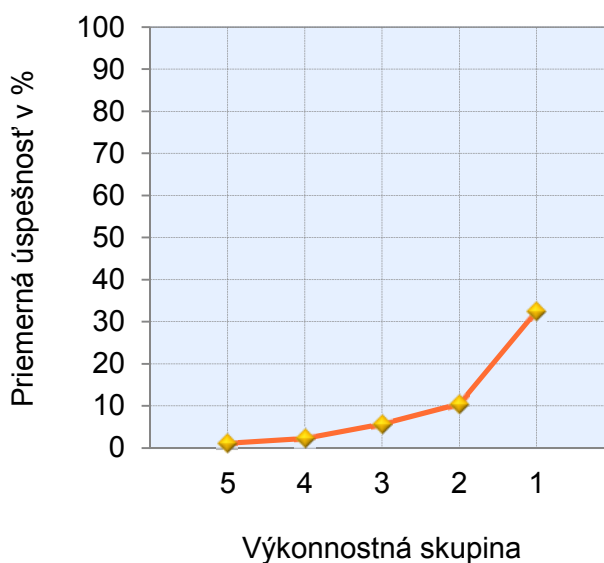
Myšlienkové operácie: tvorivé

Predpokladaná obťažnosť: stredne obťažná úloha

Štatistické vyhodnotenie CTT:

úspešnosť	celková	10,3 %
	žiaci GYM	12,8 %
	žiaci SOŠ	3,5 %
	chlapci	10,0 %
	dievčatá	10,8 %
neriešenosť	celková	23,3 %
	žiaci GYM	23,5 %
	žiaci SOŠ	22,9 %
citlivosť		32,8 %
P. Bis.		0,36

Graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí:

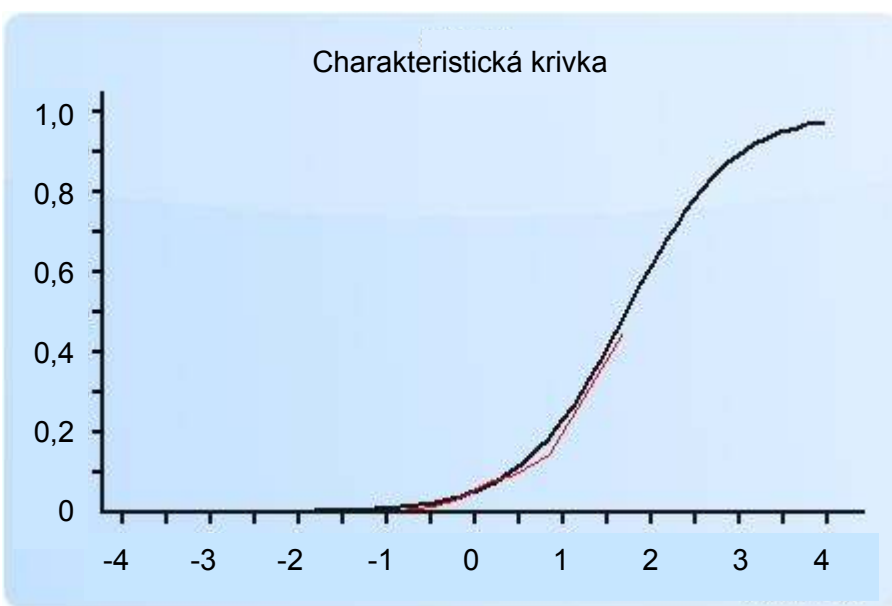


Štatistické vyhodnotenie IRT:	obťažnosť	1,818	rozlišovacia schopnosť:	0,961
--------------------------------------	-----------	-------	-------------------------	-------

Najčastejšie odpovede

a ich frekvencia:

–	23,3 %
1,5	11,6 %
2	10,9 %
0,85	10,3 %
1	6,1 %
0,75	4,4 %
0,80	2,0 %



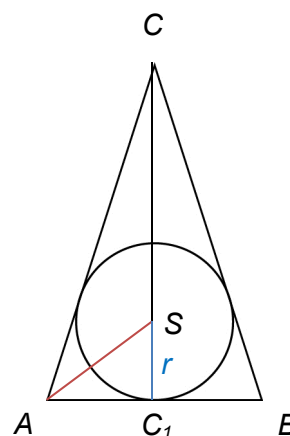
Riešenie:

Stred S vpísanej kružnice do trojuholníka leží na priesečníku osí vnútorných uhlov trojuholníka. Zakreslíme bod S . Hľadaný polomer kružnice r vypočítame v pravouhlom trojuholníku AC_1S ako dĺžku úsečky C_1S , pričom C_1 je stred strany AB .

Najprv potrebujeme dopočítať v trojuholníku AC_1S veľkosť niektorého uhla alebo dĺžku strany. Využijeme pravouhlý trojuholník AC_1C (poznáme dĺžky AC_1 a C_1C) a vypočítame veľkosť uhla CAC_1 , ktorý je dvojnásobkom veľkosti uhla SAC_1 :

$$\operatorname{tg}(\sphericalangle CAC_1) = \frac{|CC_1|}{|AC_1|} = \frac{6}{1} \Rightarrow |\sphericalangle CAC_1| \doteq 80,537\,678^\circ, \text{ odkiaľ } |\sphericalangle SAC_1| \doteq 40,268\,839^\circ$$

$$\text{Potom } \operatorname{tg}(\sphericalangle SAC_1) = \frac{|SC_1|}{|AC_1|} = \frac{r}{1}, \text{ odkiaľ } r = 1 \text{ cm} \cdot \operatorname{tg}(\sphericalangle SAC_1) \doteq 1 \text{ cm} \cdot 0,847\,127 \doteq 0,85 \text{ cm}.$$



Hodnotenie:

Podstatou úlohy bolo objaviť a zrealizovať spôsob, ako vypočítať polomer kružnice vpísanej do rovnoramenného trojuholníka. Žiaci mali najskôr nájsť vhodný pravouhlý trojuholník, v ktorom bude možné vypočítať dĺžku polomeru ako dĺžku niektorej strany a následne dopočítať v rovnoramennom trojuholníku potrebné veľkosti uhlov a dĺžok strán. Žiaci mohli využiť postup uvedený v riešení úlohy alebo mohli napríklad zakresliť iný trojuholník, podobný s trojuholníkom CC_1B , v ktorom by hľadaný polomer vpísanej kružnice bol jednou z odvesien (kolmica na stranu BC vedená cez bod S).

Niektoré z pojmov, vlastností, vzťahov a zručností potrebných k riešeniu úlohy sú obsiahnuté v štátnom vzdelávacom programe pre GYM. Nájdeme ich aj v 2. časti učebnice matematiky pre 1. ročník (podobnosť trojuholníkov a jej vlastnosti, výpočet dĺžok strán a veľkostí uhlov pomocou goniometrických funkcií v pravouhlom trojuholníku) a v 2. časti učebnice pre 3. ročník GYM (os vnútorného uhla trojuholníka, priesečník osí uhlov v trojuholníku, kružnica do trojuholníka vpísaná). Učebnice však neobsahujú takmer žiadne príklady na precvičenie postupov v nich opísaných alebo žiakmi objavených.

Náročnosť požiadavky samostatne objaviť trojuholník, v ktorom žiak mohol vypočítať hľadanú dĺžku polomeru vpísanej kružnice a zistenie, ako dopočítať chýbajúce dĺžky strán alebo veľkosti uhlov v inom trojuholníku, sa odzrkadlili na veľmi nízkej priemernej úspešnosti žiakov pri riešení úlohy. Úlohu správne vyriešila asi desatina žiakov. Úspešných bolo 12,8 % žiakov GYM a iba 3,5 % žiakov SOŠ. Úspešnosť chlapcov a dievčat pri riešení úlohy bola takmer rovnaká. Neriešenosť úlohy bola vysoká. Odpoveď na úlohu neuviedla takmer štvrtina žiakov GYM aj SOŠ.

Najpočetnejšou skupinou žiakov z hľadiska odpovede boli žiaci, ktorí neuviedli odpoveď. Približne o polovicu menej (11,6 %) bolo žiakov, ktorí uviedli odpoveď 1,5. Zrejme bez počítania, len na základe úvahy podľa obrázka usúdili, že priemer kružnice je polovicou výšky trojuholníka a teda polomer kružnice je štvrtinou výšky trojuholníka.

Podobne mohlo uvažovať ďalších 10,9 % žiakov, ktorí uviedli nesprávnu odpoveď 2. Zrejme predpokladali, že stred vpísanej kružnice je v ťažisku rovnoramenného trojuholníka, v ktorom výška na základňu je zároveň ťažnicou a preto dĺžka polomeru vpísanej kružnice bude tretina zadanej výšky a zároveň ťažnice trojuholníka, teda 2 cm.

6,1 % žiakov odmerala polomer kružnice na ilustračnom obrázku a uviedla odpoveď 1 cm.

Celkove žiaci uviedli 214 rôznych odpovedí. Približne 35,0 % odpovedí boli čísla väčšie ako 1. Znamenalo by to, že kružnica by sa nezmestila do trojuholníka, z ktorého by sa musel následne stať rovnoramenný lichobežník s vpísanou kružnicou.

Zaznamenali sme aj záporné čísla ako odpovede vyjadrujúce dĺžku polomeru kružnice.

Citlivosť položky bola slabá. IRT vyhodnotila úlohu ako ťažkú, dobre rozlišujúcu položku.

Podobné úlohy:

- Vypočítajte polomery opísanej a vpísanej kružnice trojuholníka so stranami 25 cm, 14 cm, 25 cm.

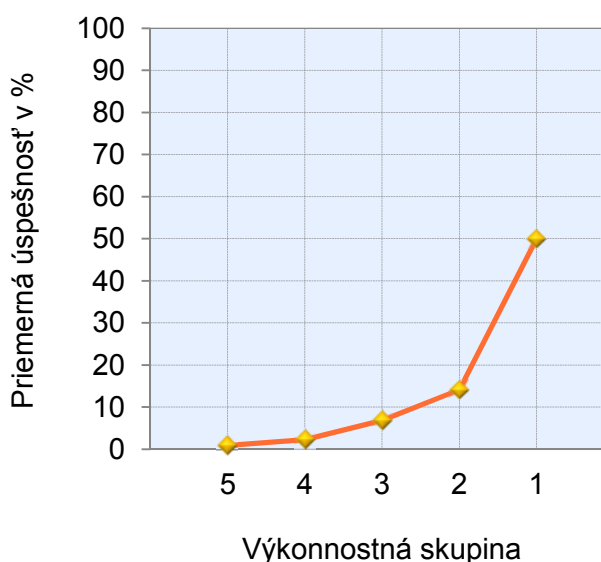
(Hecht, T. – Černek, P.: Matematika pre 1. ročník gymnázií a SOŠ. Zošit 5 Zbierka úloh. Orbis Pictus Istropolitana: Bratislava 2001, s. 43)

Príklad č. 19	Téma: 3.2 Analytická geometria v rovine	
Zadanie:		
Dané sú body $A [-1; 1]$ a $B [3; -2]$. Určte reálne číslo c v súradniciach bodu $C [c; c]$ tak, aby bod C bol vrcholom pravouhlého trojuholníka ABC s pravým uhlom pri vrchole B .		
Pojmy, vlastnosti a vzťahy: karteziánska súradnicová sústava v rovine, všeobecná rovnica priamky, vzťah medzi koeficientmi všeobecných rovníc dvoch kolmých priamok		
Žiak vie: zostrojiť v súradnicovej sústave obrazy bodov, ak pozná ich súradnice; napísať analytické vyjadrenie priamky prechádzajúcej daným bodom kolmo na danú priamku		
Myšlienkové operácie: zložitejšie		Predpokladaná obťažnosť: stredne obťažná úloha
Štatistické vyhodnotenie CTT:		
úspešnosť	celková	14,8 %
	žiaci GYM	19,5 %
	žiaci SOŠ	2,2 %
	chlapci	14,1 %
	dievčatá	16,2 %
neriešenosť	celková	32,1 %
	žiaci GYM	30,4 %
	žiaci SOŠ	36,4 %
citlivosť		48,9 %
P. Bis.		0,46

Graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí:

Výkonnostná skupina	Priemerná úspešnosť v %
5	1
4	2
3	6
2	14
1	50

Graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí:



Štatistické vyhodnotenie IRT:

obťažnosť

1,336

rozlišovacia schopnosť:

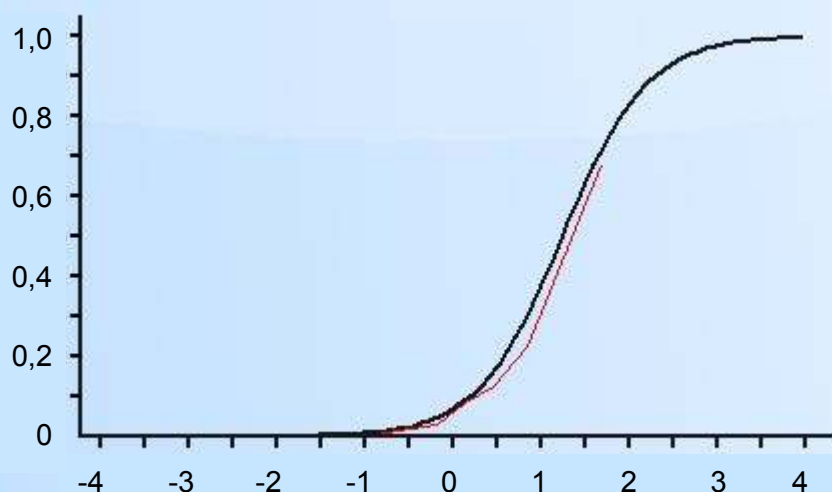
1,210

**Najčastejšie
odpovede**

a ich frekvencia:

–	32,1 %
18	14,8 %
4	6,1 %
6	6,0 %
5	5,3 %
3	4,4 %
2	3,1 %

Charakteristická krivka

**Riešenie:**

Nakreslíme obrázok a napíšeme rovnicu priamky p prechádzajúcej daným bodom B kolmo na priamku AB . Normálovým vektorom priamky p bude vektor $\overrightarrow{AB}$ so súradnicami:

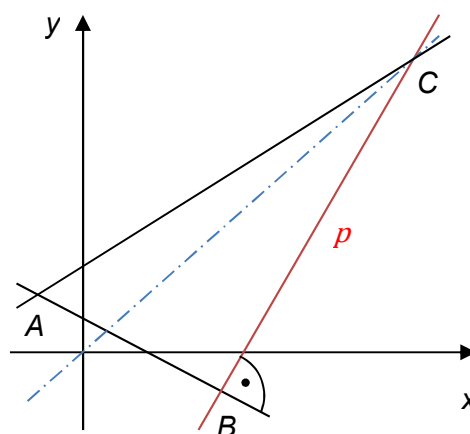
$$(3 - (-1); -2 - 1) = (4; -3)$$

Napíšeme rovnicu hľadanej priamky p a dosadíme súradnice daného bodu $B[3; -2]$:

$$p: 4x - 3y + q = 0 \rightarrow 4 \cdot 3 - 3 \cdot (-2) + q = 0 \rightarrow q = -12 - 6 = -18 \rightarrow p: 4x - 3y - 18 = 0$$

Bod $C[c; c]$ leží na priamke p , preto dosadíme c za x a za y a vypočítame súradnice c :

$$p: 4c - 3c - 18 = 0 \rightarrow c = 18$$

**Hodnotenie:**

Úloha bola zameraná na analytickú geometriu v rovine, špeciálne na všeobecnú rovnicu priamky a vzájomné polomy priamok v rovine. Žiaci mali napísať všeobecnú rovnicu priamky prechádzajúcu daným bodom kolmo na danú priamku a následne vypočítať súradnice bodu ležiaceho na priamke. Keďže hľadaný bod mal obe súradnice rovnaké, tak musel ležať na osi I. a III. kvadrantu a žiaci mohli vypočítať súradnice hľadaného bodu aj ako priesečník priamky $y = x$ a priamky kolmej na danú priamku.

Analytická geometria v rovine alebo v priestore a ani vektorová algebra nie sú súčasťou štátneho vzdelávacieho programu pre GYM a SOŠ. Nevenujú sa jej ani aktuálne učebnice matematiky pre GYM. V Cieľových požiadavkách na vedomosti a zručnosti maturantov z matematiky je však analytická geometria v rovine zastúpená takmer v celom rozsahu, v akom sa donedávna vyučovala v druhom polroku tretieho ročníka GYM. Analytická geometria v priestore (rovnice rovín, vzájomné polohy priamok a rovín – polohové a metrické úlohy) už nie je súčasťou štátneho vzdelávacieho programu stredných škôl a ani Cieľových požiadaviek na vedomosti a zručnosti maturantov z matematiky.

Žiaci sa teda s princípmi riešenia úloh pomocou vektorov a analytickej geometrie mohli oboznámiť buď na hodinách matematiky (ak mala škola rozšírený školský vzdelávací program z matematiky voči štátnemu vzdelávaciemu programu a zároveň zvýšenú dotáciu hodín matematiky), na hodinách voliteľných predmetov zameraných na matematiku alebo prípravu na maturitu z matematiky alebo samostatným štúdiom zo starších učebníc matematiky.

Vyššie opísaný stav mohol byť príčinou nízkej priemernej úspešnosti žiakov pri riešení úlohy. Správnu odpoveď uviedlo iba 19,5 % žiakov GYM a 2,2 % žiakov SOŠ. Úspešnosť chlapcov a dievčat bola porovnateľná. Neriešenosť úlohy bola druhá najvyššia spomedzi úloh testu MAT15. Odpoveď neuviedol približne každý tretí žiak riešiaci test MAT15. Skupina žiakov, ktorá na položku neodpovedala, bola viac ako dvojnásobne väčšia ako skupina žiakov, ktorá uviedla správnu odpoveď.

Najčastejšími chybnými odpoveďami boli malé prirodzené čísla, teda súradnice bodu z I. kvadrantu. Žiaci zrejme svoje riešenia určili len odhadom pomocou obrázka, na ktorom vyznačili polohu bodov daných v zadaní. Asi 5,0 % žiakov uviedlo ako odpoveď záporné číslo, teda predpokladali, že hľadaný bod C sa nachádza v III. kvadrante.

Hodnota citlivosti a graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí podľa výkonnostných skupín dokladujú, že úloha odlišila iba v teste celkove najúspešnejšiu skupinu žiakov. Priemerná úspešnosť žiakov ostatných štyroch výkonnostných skupín bola takmer rovnaká, z intervalu (0 %; 15 %). Úloha bola pre žiakov týchto skupín v podstate neriešiteľná.

Úloha bola ťažkou položkou s veľmi dobrou rozlišovacou schopnosťou.

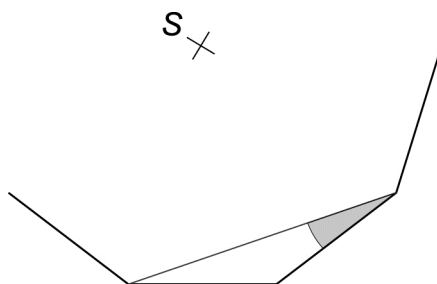
Podobné úlohy:

- Tretí vrchol pravouhlého trojuholníka ABC , $A[2; 2]$, $C[-1; 1]$ leží na osi y . Určte ho.

(Božek, M. – Černek, P. – Bednářová, S.: Matematika pre 3. ročník gymnázií a SOŠ. Zošit 4 Zbierka úloh. Orbis Pictus Istropolitana: Bratislava 2001, s. 16)

Príklad č. 20 **Téma:** 3.1 Základné rovinné útvary**Zadanie:**

V pravidelnom mnohouholníku (na obrázku je zobrazená jeho časť a stred) má najkratšia uhlopriečka dĺžku 10 cm. Veľkosť uhla tejto uhlopriečky a strany mnohouholníka je 20° . Vypočítajte v centimetroch obvod tohto mnohouholníka.



Pojmy, vlastnosti a vzťahy: os úsečky, uhlopriečka, rovnoramenný a pravouhlý trojuholník, súčet vnútorných uhlov trojuholníka, pravidelný mnohouholník, goniometrické funkcie

Žiak vie: použiť goniometrické funkcie pri výpočte prvkov pravouhlého trojuholníka, vypočítať obvod a obsah narysovaných n -uholníkov

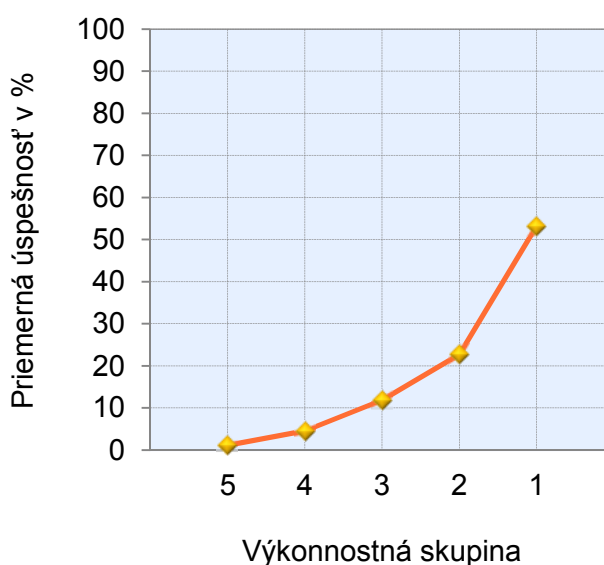
Myšlienkové operácie: tvorivé

Predpokladaná obťažnosť: náročná úloha

Štatistické vyhodnotenie CTT:

úspešnosť	celková	18,8 %
	žiaci GYM	24,1 %
	žiaci SOŠ	4,8 %
	chlapci	18,5 %
	dievčatá	19,5 %
neriešenosť	celková	26,6 %
	žiaci GYM	24,6 %
	žiaci SOŠ	31,7 %
citlivosť		52,6 %
P. Bis.		0,44

Graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí:

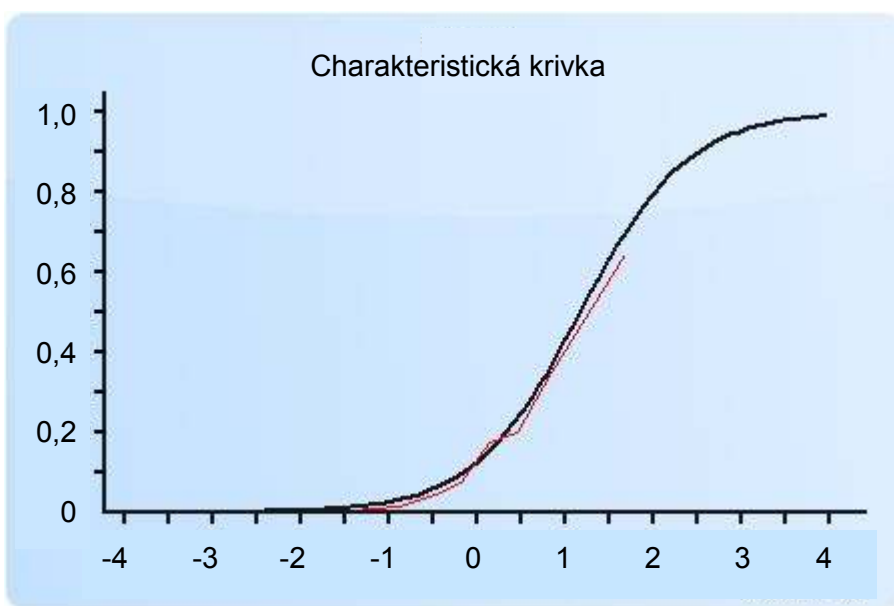


Štatistické vyhodnotenie IRT:	obťažnosť	1,263	rozlišovacia schopnosť:	0,952
--------------------------------------	-----------	-------	-------------------------	-------

Najčastejšie odpovede

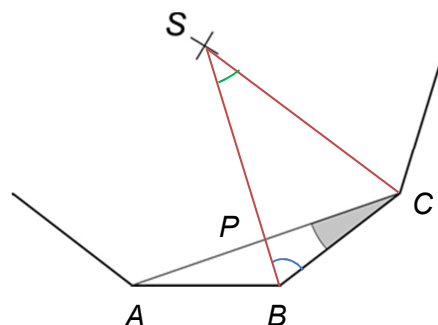
a ich frekvencia:

–	26,6 %
47,89	18,8 %
53,21	8,5 %
53,20	2,9 %
42,57	2,0 %
47,88	1,8 %
95,78	1,2 %

**Riešenie:**

Potrebuje zistiť dĺžku jednej strany a počet strán mnohoúhelníka.

Body B a S sú rovnako vzdialené od bodov A a C , preto ich spojnice BS je vlastne osou uhlopriečky AC . Preto vytvorený trojuholník PBC je pravouhlý a vypočítame v ňom v centimetroch dĺžku strany mnohoúhelníka BC :



$$\cos 20^\circ = \frac{|PC|}{|BC|} \Rightarrow |BC| = \frac{|PC|}{\cos 20^\circ} = \frac{5}{\cos 20^\circ}$$

Veľkosť uhla $\sphericalangle PBC$ je $180^\circ - 20^\circ - 90^\circ = 70^\circ$.

Spojením stredu S s ďalším vrcholom C získame rovnoramenný trojuholník BCS , ktorý je jedným z n rovnakých trojuholníkov v n -uholníku. Veľkosť vnútorných uhlov pri základni týchto trojuholníkov je 70° a potom veľkosť uhla pri hlavnom vrchole je 40° . Celkovo sa vedľa seba okolo bodu S nachádza $360^\circ : 40^\circ = 9$ takýchto uhlov v zhodných trojuholníkoch. Preto obvod mnohoúhelníka bude pozostávať z 9 strán s dĺžkou BC (v centimetroch):

$$o = 9 \cdot \frac{5}{\cos 20^\circ} \doteq 47,89$$

Hodnotenie:

Úloha bola kombinovanou výpočtovou úlohou z planimetrie. Žiaci mali aplikovať vzťah medzi vzájomnou polohou uhlopriečky a stredom pravidelného mnohoúhelníka, vzťah medzi veľkosťou stredového uhla a počtom strán v pravidelnom mnohoúhelníku a výpočet veľkosti uhla využitím goniometrických funkcií v pravouhlom trojuholníku.

Úloha bola netradičná a originálna, najmä kombináciou zadaných údajov a následným spôsobom postupu riešenia úlohy. Preto aj ťažko nachádzame v dostupných učebniciach a zbierkach úloh z matematiky príklad úplne podobný zadanej úlohe. Štátny vzdelávací program pre GYM však obsahuje všetky pojmy, vlastnosti, vzťahy a zručnosti potrebné k vyriešeniu úlohy. Nájdeme ich aj v aktuálnych učebniciach matematiky, postupne vo viacerých rôznych kapitolách venovaných planimetrii. Príkladov na precvičenie je v nich však málo.

Výsledky žiakov zodpovedajú náročnosti úlohy. Najpočetnejšou skupinou boli žiaci, ktorí na položku neuviedli odpoveď. Bola to približne štvrtina žiakov GYM a tretina žiakov SOŠ. Správnu odpoveď uviedla necelá pätina žiakov maturujúcich z matematiky. Bol to približne každý piaty žiak GYM a každý dvadsiaty žiak SOŠ. Priemerná úspešnosť chlapcov a dievčat bola porovnateľná.

Príčinou nesprávnej odpovede 47,88 bola chyba zaokrúhlenia správneho výsledku.

Chybné odpovede 53,21 a 53,20 (rovnaký výsledok, len s chybou zaokrúhlenia) u 11,4 % žiakov vyplývali z myšlienkového chyby. Po správnom vypočítaní deviatich zhodných stredových uhlov pri bode *S* žiaci pokračovali úvahou, že k deviatim uhlom vedľa seba je potrebných desať ramien uhlov, a teda hľadaný mnohoúhelník bude mať desať vrcholov a teda desať strán. Následne žiaci vypočítali obvod desaťuholníka namiesto obvodu deväťuholníka.

Chybná odpoveď 42,57 u 2,0 % žiakov vyplýva z podobnej, ale opačnej úvahy. Žiaci namiesto obvodu deväťuholníka vypočítali obvod osemuholníka pomocou správne vypočítanej dĺžky jednej strany mnohoúhelníka.

Z grafu distribúcie úspešností žiackych odpovedí podľa výkonnostných skupín vidíme, že úloha nebola dostatočne citlivá pre všetky skupiny žiakov. Úloha dobre odlíšila iba v teste celkove najúspešnejšiu skupinu žiakov. Pre ostatné skupiny žiakov bola úloha ťažká, preto ich dostatočne nerozlíšila. Hodnota medzipoložkovej korelácie *P. Bis.* bola dobrá.

Podľa vyhodnotenia výsledkov žiakov metódou IRT bola položka ťažká, ale s dobrou rozlišovacou schopnosťou.

Príklad č. 21 **Téma:** 2.1 Funkcia a jej vlastnosti, postupnosti**Zadanie:**

Definičný obor funkcie $f: y = \frac{\sqrt{(x+4) \cdot (x-7)}}{(x+4) \cdot (x-3)}$ je:

(A) $(-\infty; -4) \cup \langle 7; \infty)$ (B) $(-\infty; -4) \cup (7; \infty)$ (C) $(-\infty; -4) \cup \langle 7; \infty)$ (D) $(-\infty; 3) \cup (7; \infty)$ (E) $(-\infty; 3) \cup \langle 7; \infty)$

Pojmy, vlastnosti a vzťahy: definičný obor funkcie, rovnica, nerovnica, úprava na súčin

Žiak vie: nájsť definičný obor danej funkcie, nájsť všetky riešenia kvadratickej rovnice, nájsť všetky riešenia rovníc zapísaných v tvare $f(x) \cdot g(x) = 0$, pokiaľ vie riešiť rovnice $f(x) = 0$, $g(x) = 0$, nájsť množinu všetkých riešení nerovnice $f(x) \cdot g(x) \neq 0$, pokiaľ vie riešiť nerovnice $f(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$, kde $\neq$ je znak nerovnosti

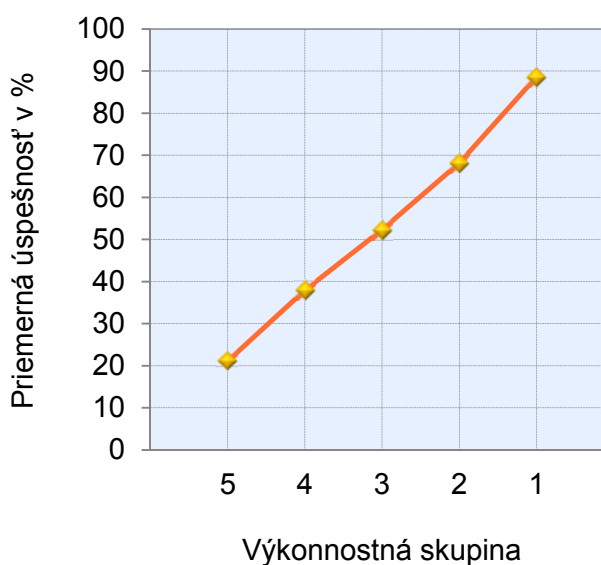
Myšlienkové operácie: zložitejšie

Predpokladaná obťažnosť: stredne obťažná úloha

Štatistické vyhodnotenie CTT:

úspešnosť	celková	53,9 %
	žiaci GYM	63,8 %
	žiaci SOŠ	27,6 %
	chlapci	51,8 %
	dievčatá	58,4 %
neriešenosť	celková	0,5 %
	žiaci GYM	0,3 %
	žiaci SOŠ	1,1 %
citlivosť		67,8 %
P. Bis.		0,42

Graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí:



Štatistické vyhodnotenie IRT:			obťažnosť	– 0,163	rozlišovacia schopnosť:	0,711
Odpovede, ich frekvencia a Point Biserial			<			

Správnú odpoveď si volila viac ako polovica žiakov. Boli to najmä žiaci v teste celkove úspešní. Pravdepodobnosť voľby správnej odpovede rástla so zvyšujúcou sa úrovňou matematickej schopnosti žiakov.

Najfrekvencovanejším distraktorom bola odpoveď (B). Žiaci napísali podmienku, podľa ktorej výraz pod odmocninou môže byť len kladný, nemôže mať hodnotu nula. Odpoveď (B) si volili najmä slabší a priemerní žiaci.

V teste celkove najmenej úspešná skupina žiakov si často volila aj odpoveď (C). Pri riešení úlohy žiaci pravdepodobne vôbec nebrali do úvahy podmienku vyplývajúcu z menovateľa zlomku.

Distraktory (D) a (E) neboli pre žiakov atraktívne. Volili ich zriedkavo v teste celkove menej úspešní žiaci.

Položka bola jednou z najlepšie rozlišujúcich ÚVO v teste. Podľa štatistického vyhodnotenia výsledkov žiakov IRT metódou bola úloha obťažnejšou položkou s dobrou rozlišovacou schopnosťou.

Podobné úlohy:

- Určte definičný obor funkcií:

a) $f: y = \frac{\sqrt{12+x-x^2}}{x \cdot (x-2)}$

b) $f: y = \sqrt{\frac{x^2-5x+6}{x^2+6x+8}}$

(Peller, F. – Šáner, V. – Eliáš, J. – Pinda, L.: Matematika. Podklady na prijímacie testy pre uchádzačov o štúdium. Vydavateľstvo EKONÓM: Bratislava 1996, s. 85)

- Pre ktoré x má výraz $V = x + \sqrt{2x^2 + 7x + 6} - \sqrt{x^2 - 6x + 13}$ zmysel?

(Hecht, T. – Černek, P.: Matematika pre 1. ročník gymnázií a SOŠ. Zošit 5 Zbierka úloh. Orbis Pictus Istropolitana: Bratislava 2001, s. 31)

Príklad č. 22 **Téma:** 1.1 Logika a množiny**Zadanie:**

Daný je výrok: Peter klame a kradne.

Vyberte možnosť, v ktorej je uvedená negácia daného výroku.

- (A) Peter klame, ale nekradne.
- (B) Peter neklame a nekradne.
- (C) Keď Peter neklame, tak ani nekradne.
- (D) Peter neklame, ale kradne.
- (E) Peter neklame alebo nekradne.

Pojmy, vlastnosti a vzťahy: výrok, logické spojky, konjunkcia, negácia, negácia konjunkcie je disjunkcia negácií

Žiak vie: vytvoriť negáciu zloženého výroku (nielen pomocou „Nie je pravda, že...“)

Myšlienkové operácie: jednoduché

Predpokladaná obťažnosť: ľahká úloha

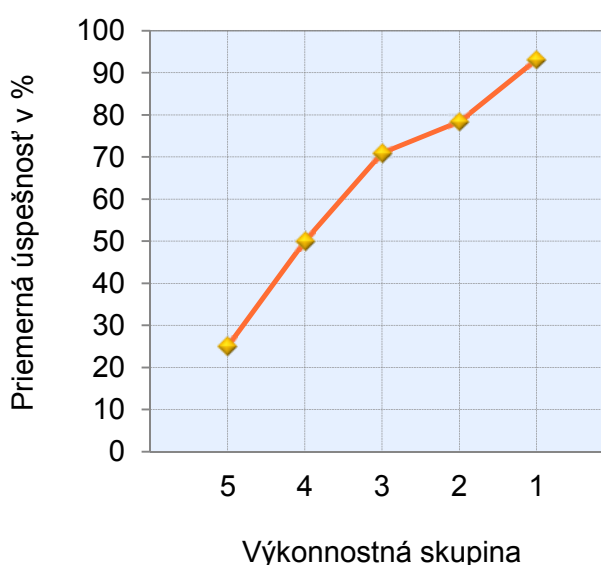
Riešenie:

Daný výrok je konjunkcia $A \wedge B$. Negáciou konjunkcie je disjunkcia negácií pôvodných jednoduchých výrokov $A' \vee B'$, teda odpoveď **(E)** Peter neklame alebo nekradne.

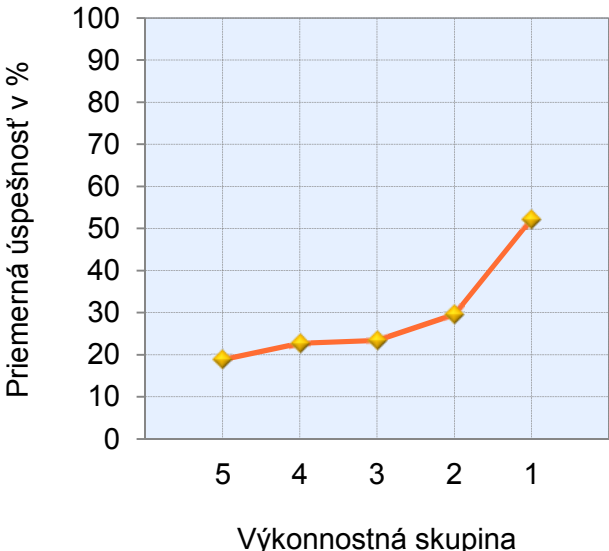
Štatistické vyhodnotenie CTT:

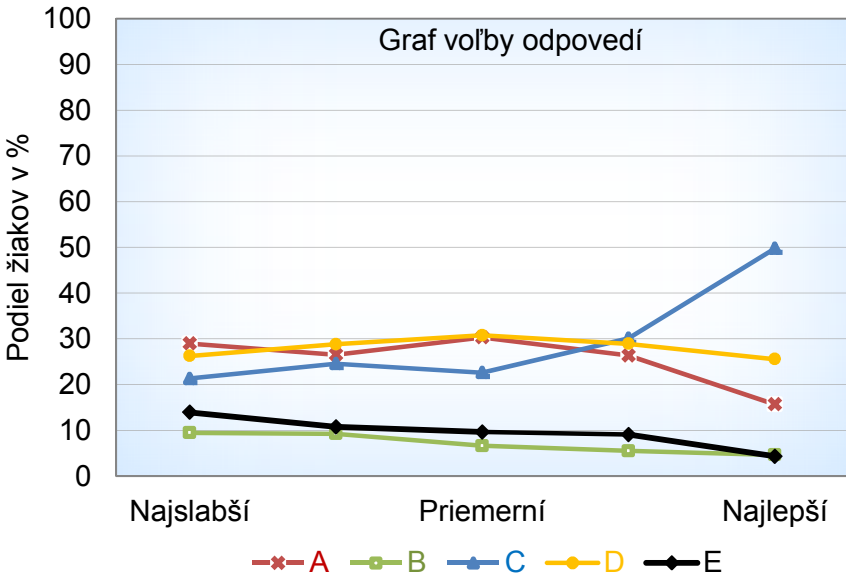
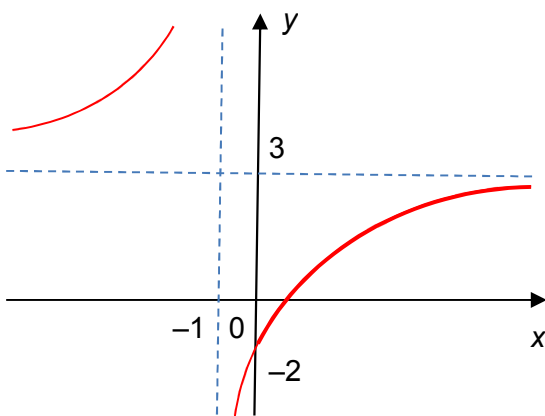
úspešnosť	celková	63,9 %
	žiaci GYM	77,9 %
	žiaci SOŠ	26,5 %
	chlapci	60,5 %
	dievčatá	71,2 %
neriešenosť	celková	0,2 %
	žiaci GYM	0,2 %
	žiaci SOŠ	0,2 %
citlivosť		67,4 %
P. Bis.		0,43

Graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí:



Štatistické vyhodnotenie IRT:		obťažnosť	– 0,563	rozlišovacia schopnosť:	0,774
Odpovede, ich frekvencia a Point Biserial			</		

Príklad č. 23	Téma: 2.3 Mnohočleny a mocninové funkcie, lineárna lomená funkcia		
Zadanie:			
Daná je funkcia $f: y = \frac{3x-2}{x+1}$. Vyberte správne tvrdenie o monotónnosti a ohraničenosti funkcie f na intervale $(0; \infty)$.			
(A) Funkcia f je rastúca a len zdola ohraničená na $(0; \infty)$.			
(B) Funkcia f je klesajúca a len zhora ohraničená na $(0; \infty)$.			
(C) Funkcia f je rastúca a ohraničená na $(0; \infty)$.			
(D) Funkcia f je rastúca a nie je ohraničená na $(0; \infty)$.			
(E) Funkcia f je klesajúca a nie je ohraničená na $(0; \infty)$.			
Pojmy, vlastnosti a vzťahy: lineárna lomená funkcia, asymptoty grafu lineárnej lomenej funkcie, rastúca, klesajúca, ohraničená funkcia			
Žiak vie: nájsť rovnice asymptot grafu lineárnej lomenej funkcie, načrtnúť graf funkcie, z daného grafu funkcie zistiť, či je zhora alebo zdola ohraničená, nájsť intervaly, na ktorých je lineárna lomená funkcia rastúca alebo klesajúca			
Myšlienkové operácie: zložitejšie		Predpokladaná obťažnosť: stredne obťažná úloha	
Štatistické vyhodnotenie CTT:		Graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí:	
úspešnosť	celková	29,4 %	
	žiaci GYM	32,0 %	
	žiaci SOŠ	22,7 %	
	chlapci	29,5 %	
	dievčatá	29,4 %	
neriešenosť	celková	0,9 %	
	žiaci GYM	0,8 %	
	žiaci SOŠ	1,1 %	
citlivosť		33,7 %	
P. Bis.		0,20	
			

Štatistické vyhodnotenie IRT:			obťažnosť	1,682	rozlišovacia schopnosť:	0,323
Odpovede, ich frekvencia a Point Biserial			Graf voľby odpovedí 			
A	25,0 %	- 0,08				
B	7,0 %	- 0,07				
C	29,0 %	0,20				
D	28,0 %	0,00				
E	9,0 %	- 0,10				
X	1,0 %	- 0,04				
Riešenie:			Asi najjednoduchšie je rozhodnúť na základe grafu danej funkcie. Grafom lineárnej lomenej funkcie je rovnoosá hyperbola s dvoma asymptotami. Zvislá asymptota prechádza na osi x číslom, ktoré nepatrí do definičného oboru funkcie. Je to $x = -1$. Vodorovná asymptota prechádza na osi y číslom, ktoré funkčné hodnoty funkcie f nikdy nenadobudnú. Je to číslo $y = 3$, ktoré môžeme určiť viacerými spôsobmi (z predpisu inverznej funkcie f^{-1}, limitou funkcie, úvahou o funkčných hodnotách funkcie f).  Vypočítame súradnice jedného bodu hyperboly, aby sme ju vedeli zakresliť do obrázka, napr. $f(0) = \frac{3 \cdot 0 - 2}{0 + 1} = -2$. Zakreslíme hyperbolu medzi asymptoty. Vidíme, že na intervale $(0; \infty)$ je funkcia f rastúca, zdola ohraničená číslom -2 a menším, zhora ohraničená číslom 3 a väčším, teda je ohraničená. Správna je možnosť (C).			
Hodnotenie:			Základom úlohy bola lineárna lomená funkcia. Žiaci mali správne nakresliť graf lineárnej lomenej funkcie, určiť polohu vodorovnej a zvislej asymptoty grafu a podľa grafu určiť monotónnosť a ohraničenosť funkcie na danom intervale.			

Zostrojovali grafy funkcií a určovali vlastností funkcií, prípadne aj podľa zostrojeného grafu, je obsahom štátneho vzdelávacieho programu pre GYM. Kapitoly k tejto téme nájdeme aj vo viacerých častiach platných učebníc matematiky pre GYM. Lineárna lomená funkcia a spôsob konštrukcie jej grafu pomocou asymptot však už súčasťou štátneho vzdelávacieho programu nie je. Pojem lineárnej lomenej funkcie nie je spomenutý ani v učebniciach matematiky pre GYM, s výnimkou špeciálneho prípadu funkcie nepriamej úmernosti, o ktorej sa píše v prvej časti učebnice matematiky pre 1. ročník GYM.

Správnu možnosť si vybral približne každý tretí žiak. Priemerná úspešnosť žiakov GYM a SOŠ, aj chlapcov a dievčat bola porovnateľná.

Žiaci si najčastejšie volili správnu odpoveď (C). Hodnota medzipoložkovej korelácie *P. Bis.* tejto odpovede však nie je dostatočne vysoká, z čoho vyplýva, že správnu odpoveď (C) si okrem žiakov v teste celkove úspešných čiastočne volili aj žiaci v teste celkove menej úspešní. Frekvencia voľby správnej odpovede (C) je výrazne vyššia ako voľba distraktorov iba u celkove v teste najúspešnejšej skupiny žiakov.

Početnosť voľby distraktorov (A) a (D) bola takmer taká istá ako početnosť voľby správnej odpovede. Tieto možnosti si volili žiaci všetkých výkonnostných skupín, ktorých zastúpenie bolo rovnomerné. Žiaci zrejme na základe výpočtu niekoľkých funkčných hodnôt čísel patriacich do intervalu v zadaní úlohy rozhodli o monotónnosti funkcie, alebo správne nakreslili graf lineárnej lomenej funkcie, ale pri rozhodovaní o ohraničenosti funkcie nebrali do úvahy interval v zadaní úlohy, alebo odpoveď vybrali na základe naučeného poznatku, že lineárna lomená funkcia nie je ohraničená na celom svojom definičnom obore.

Distraktory (B) a (E), ktoré opisovali funkciu v zadaní úlohy ako klesajúcu, pre žiakov neboli dostatočne atraktívne. Žiaci teda akýmkoľvek spôsobom správne rozhodli o monotónnosti danej lineárnej lomenej funkcie.

Položka vykazovala rozdielne fungovanie, ako predpokladal model IRT, použitý pri vyhodnotení výsledkov žiakov v teste MAT15. Rozlišovacia schopnosť položky bola slabá, čo vidíme aj na grafe voľby odpovedí žiakmi.

Podobné úlohy:

- Zistíte intervaly, na ktorých daná funkcia rastie a na ktorých klesá.

$$\text{a) } y = \frac{-7+x}{x}$$

$$\text{b) } y = \frac{3x-7}{2x+5}$$

(Hecht, T. – Černek, P. – Božek, M.: Matematika pre 2. ročník gymnázií a SOŠ. Zošit 4 Zbierka úloh. Orbis Pictus Istropolitana: Bratislava 1998, s. 13)

Príklad č. 24 **Téma:** 3.4 Zhodné a podobné zobrazenia**Zadanie:**

Daný je trojuholník ABC , pričom $A [3; 5]$, $B [0; 1]$ a $C [3; -2]$. Trojuholník $A_1B_1C_1$ je osovo súmerný s trojuholníkom ABC podľa osi x . Určte obsah spoločnej časti trojuholníkov ABC a $A_1B_1C_1$.

(A) 2

(B) 3

(C) 4

(D) 5

(E) 6

Pojmy, vlastnosti a vzťahy: osová súmernosť, os súmernosti, ak A a B sú dva osovo súmerné body podľa priamky p , potom AB je kolmá na p a stred AB leží na p , strana, výška trojuholníka, obsah trojuholníka, vyjadrenie obsahu trojuholníka pomocou dĺžky strany a k nej príslušnej výšky

Žiak vie: zobraziť daný bod v danom zhodnom zobrazení, napísať súradnice bodu, ktorý je obrazom daného bodu v súmernosti podľa niektorej súradnicovej osi, vypočítať obsah narysovaných trojuholníkov

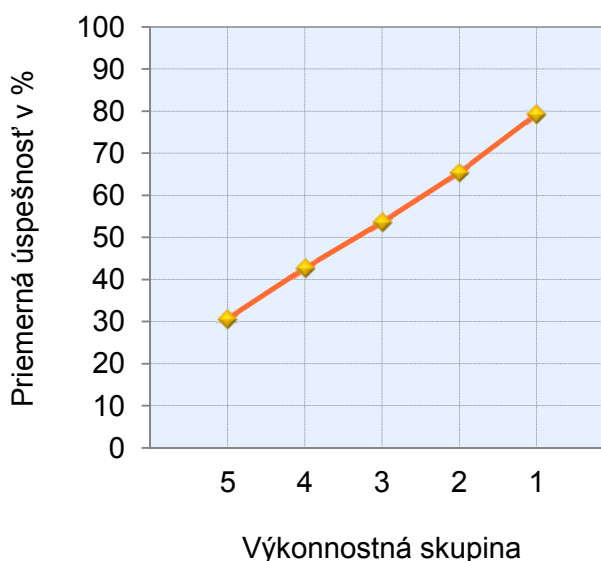
Myšlienkové operácie: tvorivé

Predpokladaná obťažnosť: stredne obťažná úloha

Štatistické vyhodnotenie CTT:

úspešnosť	celková	54,5 %
	žiaci GYM	59,5 %
	žiaci SOŠ	41,1 %
	chlapci	55,0 %
	dievčatá	53,3 %
neriešenosť	celková	1,2 %
	žiaci GYM	1,3 %
	žiaci SOŠ	0,9 %
citlivosť		48,3 %
P. Bis.		0,28

Graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí:



Štatistické vyhodnotenie IRT:			obťažnosť	- 0,276	rozlišovacia schopnosť:	0,421
Odpovede, ich frekvencia a Point Biserial			Graf voľby odpovedí 			
A	12,0 %	- 0,06				
B	14,0 %	- 0,14				
C	54,0 %	0,28				
D	9,0 %	- 0,14				
E	9,0 %	- 0,10				
X	1,0 %	- 0,03				
Riešenie: Zakreslíme do obrázka vrcholy trojuholníka ABC a každý vrchol zobrazíme v osovej súmernosti podľa súradnicovej osi x . Prienikom pôvodného trojuholníka a vzniknutého trojuholníka je rovnoramenný trojuholník CC_1P . Presnú polohu vrcholu P môžeme overiť pomocou smernice, sklonu priamky B_1C_1 (na 3 jednotkách doprava vzrastie o 3 jednotky hore, teda posun o 1 doprava spôsobí posun o 1 hore) alebo napísaním rovnice priamky a výpočtom jej priesečníka s osou x . Obsah spoločného trojuholníka je $\frac{4 \cdot 2}{2} = 4$. Správna je odpoveď (C) .						
Hodnotenie: Základom úlohy bolo určiť súradnice vrcholov trojuholníka súmerného podľa súradnicovej osi x s daným trojuholníkom. Žiaci mali následne zistiť, v ktorom bode na osi x sa pretínajú strany dvoch trojuholníkov. Mohli tak urobiť výpočtom pomocou analytickej geometrie alebo využitím smernice priamky. Na záver vypočítali obsah prieniku – ďalšieho trojuholníka.						

Osová súmernosť a určovanie obrazov bodov daných súradnicami v súradnicovej sústave nie sú súčasťou štátneho vzdelávacieho programu pre GYM. Napriek tomu druhá časť aktuálnej učebnice matematiky pre 3. ročník GYM dáva žiakom stručný návod, ako zobrazíť obraz bodu v súmernostiach i v posunutí a otočení.

Správnou odpoveď (C) si zvolila o niečo viac ako polovica žiakov. Žiaci GYM boli úspešnejší než žiaci SOŠ, úspešnosť chlapcov a dievčat bola takmer rovnaká. Správnou odpoveď (C) si okrem žiakov v teste celkove úspešných volila aj časť celkove menej úspešných žiakov.

Distraktory si žiaci volili približne s rovnakou početnosťou. Najatraktívnejší bol distraktor (B). Žiaci, ktorí ho zvolili ako odpoveď, zrejme urobili chybu v závere riešenia pri výpočte obsahu trojuholníka pomocou vzťahu súčinu strany trojuholníka a príslušnej výšky.

Preferencia všetkých distraktorov klesala s rastúcou úrovňou schopnosti žiakov.

Úloha bola obťažnejšou položkou s nižšou rozlišovacou schopnosťou.

Podobné úlohy:

- Aké súradnice bude mať obraz bodu $[x; y]$ v súmernosti podľa priamky:
 - a) $x = 3$,
 - b) $y = 3$,
 - c) $x = a$,
 - d) $y = a$?
- Akú rovnicu bude mať funkcia h , ktorej graf je súmerný s grafom funkcie f podľa:
 - a) osi x ,
 - b) osi y ?

(Hecht, T. – Černek, P. – Božek, M.: Matematika pre 2. ročník gymnázií a SOŠ. Zošit 4 Zbierka úloh. Orbis Pictus Istropolitana: Bratislava 1998, s. 30)

- Dané sú body $A[5; 8]$, $B[-4; 1]$, $C[3; -11]$. Zistite súradnice bodov, ktoré sú s danými bodmi súmerné podľa :
 - a) osi x ,
 - b) osi y ,
 - c) bodu $[0; 0]$.

(Božek, M. – Černek, P. – Bednářová, S.: Matematika pre 3. ročník gymnázií a SOŠ. Zošit 4 Zbierka úloh. Orbis Pictus Istropolitana: Bratislava 2001, s. 22)

Príklad č. 25	Téma: 5.1 Kombinatorika a pravdepodobnosť		
Zadanie:			
V osudí sú čierne a biele guľky. Ich celkový počet je 9. Bielych guľiek je viac. Koľko je bielych guľiek v osudí, ak pravdepodobnosť vytiahnutia jednej čiernej a jednej bielej guľky pri náhodnom vytiahnutí dvoch guľiek naraz je 0,5?			
(A) 5			
(B) 6			
(C) 7			
(D) 8			
(E) 9			
Pojmy, vlastnosti a vzťahy: pravdepodobnosť, nezávislé javy, kombinatorické pravidlo súčinu, kombinácie, kombinačné číslo, $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$, $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, ak A a B sú nezávislé javy			
Žiak vie: riešiť úlohy na pravdepodobnosť, založené na hľadaní pomeru všetkých priaznivých a všetkých možností, ak vie tieto počty určiť riešením jednoduchých kombinatorických úloh			
Myšlienkové operácie: zložitejšie		Predpokladaná obťažnosť: náročná úloha	
Štatistické vyhodnotenie CTT:		Graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí:	
úspešnosť	celková	64,8 %	
	žiaci GYM	71,5 %	
	žiaci SOŠ	47,2 %	
	chlapci	62,9 %	
	dievčatá	69,0 %	
neriešenosť	celková	0,8 %	
	žiaci GYM	0,9 %	
	žiaci SOŠ	0,4 %	
citlivosť		50,7 %	
P. Bis.		0,31	

5	4	3	2	1
37	59	66	75	88

Výkonnostná skupina

Štatistické vyhodnotenie IRT:			obťažnosť	– 0,836	rozlišovacia schopnosť:	0,486
Odpovede, ich frekvencia a Point Biserial			<			

Žiaci mohli úlohu vyriešiť pomocou kombinatoriky postupom známym z typických príkladov na pravdepodobnosť, opísaným v riešení úlohy. Hľadaný počet bielych guliek však mohli zistiť aj postupným preskúšaním jednotlivých možností uvedených v možnostiach (A) až (E).

Všetky pojmy, vlastnosti, vzťahy a zručnosti potrebné k vyriešeniu úlohy sú súčasťou štátneho vzdelávacieho programu pre GYM. Pravdepodobnosti je venovaná celá súčasná učebnica matematiky pre 4. ročník GYM.

Žiaci riešili úlohu s vysokou priemernou úspešnosťou 65,0 %, zrejme vďaka viacerým rôznym spôsobom, ako sa mohli dopracovať k správne riešeniu úlohy. Oveľa úspešnejší boli žiaci GYM než žiaci SOŠ a zaznamenali sme aj vyššiu priemernú úspešnosť dievčat v porovnaní s výkonmi chlapcov.

Voľba správnej odpovede (B) u žiakov všetkých výkonnostných skupín bola častejšia ako voľba niektorého z distraktorov. Najatraktívnejším distraktorom bola možnosť (A), najmä u žiakov v teste celkove menej úspešných. Predpokladáme, že žiaci na základe pravdepodobnosti 50,0 % rozhodli, že počet čiernych a bielych guliek musí byť čo najviac vyrovnaný a preto vybrali možnosť 5 bielych a 4 čiernych guliek.

Ostatné distraktory (C), (D) a (E) boli v porovnaní s distraktorom (A) pre žiakov málo zaujímavé.

Z grafu distribúcie úspešností žiackych odpovedí vidíme, že úloha bola málo citlivá pre väčšinu výkonnostných skupín žiakov. Lepšie odlíšila iba skupinu žiakov v teste celkove najmenej úspešných.

Úloha bola podľa výsledkov vyhodnotenia metódou IRT obťažnejšou položkou s nižšou rozlišovacou schopnosťou.

Podobné úlohy:

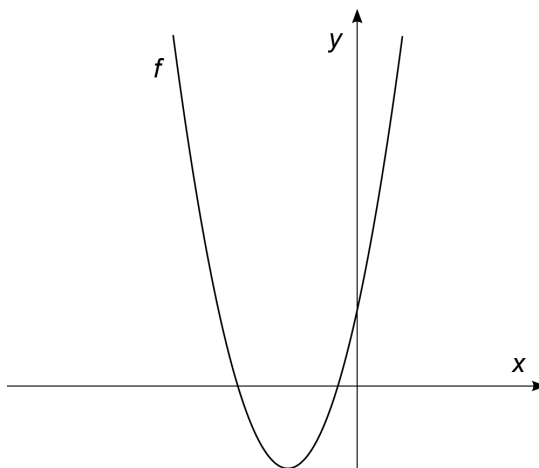
- V urne sú tri biele a n modrých guliek. Pre ktoré n sa pravdepodobnosť, že na prvý raz vytiahneme dve biele guľky, rovná 0,5?

(Smida, J. – Šedivý, J.: Zbierka úloh z matematiky pre 1. ročník gymnázia. SPN: Bratislava 1985, s. 40)

Príklad č. 26 **Téma:** 2.2 Lineárna a kvadratická funkcia, aritmetická postupnosť**Zadanie:**

Daná je kvadratická funkcia $f: y = 2x^2 + bx + 8$, kde b je prirodzené číslo. Určte najmenšie číslo b , pre ktoré vrchol paraboly (grafu funkcie f) bude ležať pod osou x (pozrite obrázok).

- (A) 6
(B) 7
(C) 8
(D) 9
(E) 10



Pojmy, vlastnosti a vzťahy: kvadratická funkcia, vrchol paraboly, doplnenie do štvorca, diskriminant, vzťah medzi diskriminantom a počtom navzájom rôznych koreňov rovnice

Žiak vie: nájsť vrchol grafu kvadratickej funkcie, ak pozná jej predpis, doplniť kvadratický trojčlen do štvorca

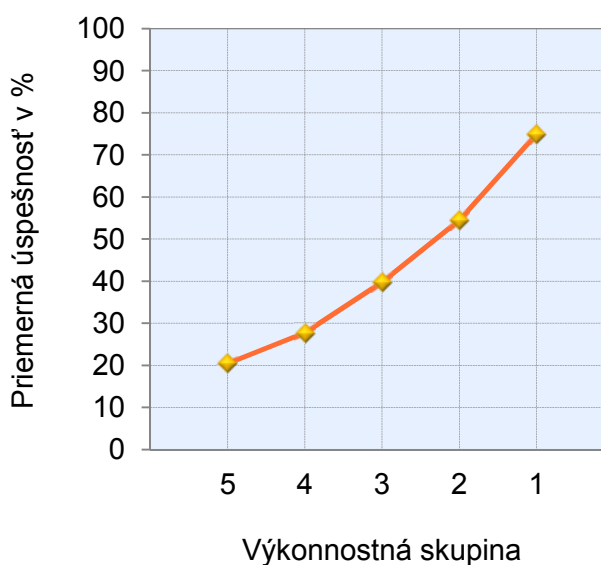
Myšlienkové operácie: zložitejšie

Predpokladaná obťažnosť: stredne obťažná úloha

Štatistické vyhodnotenie CTT:

úspešnosť	celková	43,7 %
	žiaci GYM	50,1 %
	žiaci SOŠ	26,7 %
	chlapci	44,3 %
	dievčatá	42,4 %
neriešenosť	celková	0,7 %
	žiaci GYM	0,7 %
	žiaci SOŠ	0,8 %
citlivosť		55,5 %
P. Bis.		0,34

Graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí:



Štatistické vyhodnotenie IRT:			obťažnosť	0,331	rozlišovacia schopnosť:	0,517
Odpovede, ich frekvencia a Point Biserial						

Všetky pojmy, vlastnosti, vzťahy a zručnosti potrebné k riešeniu úlohy obsahuje štátny vzdelávací program pre GYM. Nájdeme ich aj v prvej časti aktuálnej učebnice matematiky pre 2. ročník GYM.

Úspešnosť žiakov pri riešení úlohy nebola vysoká. Zvládnutie úpravy predpisu kvadratickej funkcie doplnením do štvorca alebo správne vyjadrenie diskriminantu kvadratickej rovnice by sme očakávali od každého maturanta z matematiky. Úloha však bola viacstupňová, čo mohlo žiakom spôsobiť problémy. Správnu odpoveď (D) si zvolilo 44,0 % žiakov. Žiaci GYM boli takmer dvojnásobne úspešnejší ako žiaci SOŠ. Úspešnosť chlapcov a dievčat bola rovnaká.

Pätina žiakov, väčšinou celkove v teste menej úspešná, si zvolila distraktor (C). Predpokladáme, že úlohu riešili správnym postupom, ale v závere riešenia nahradili ostrú nerovnosť znamienkom $\leq$ a teda vypočítali najväčšiu hodnotu premennej b , pre ktorú sa parabola dotýka osi x .

Ostatné distraktory si tiež vyberali najmä žiaci celkove v teste menej úspešní. Preferencia distraktorov klesala s rastúcou úrovňou schopnosti žiakov. Odpoveď 6 v možnosti (A) a odpoveď 10 v možnosti (E) žiaci zrejme určili ako rozdiel alebo súčet koeficientov 2 a 8 z predpisu funkcie v zadaní úlohy. Odpoveď 7 v možnosti (B) bola pravdepodobne výsledkom chybné úvahy, keď žiaci použili opačnú nerovnosť a hľadali najväčšiu hodnotu premennej b , pre ktorú výšková súradnica vrcholu alebo diskriminant kvadratickej rovnice budú menšie ako nula.

Citlivosť úlohy nebola vysoká, ale úloha rovnomerne rozlišovala žiakov všetkých výkonnostných skupín.

Úloha bola podľa výsledkov vyhodnotenia metódou IRT priemerne obťažnou položkou s dobrou rozlišovacou schopnosťou.

Podobné úlohy:

- Pre ktoré b nemá rovnica $3x^2 - bx + b + 5 = 0$ riešenie?

(Hecht, T. – Černek, P.: Matematika pre 1. ročník gymnázií a SOŠ. Zošit 5 Zbierka úloh. Orbis Pictus Istropolitana: Bratislava 2001, s. 31)

- Pre ktoré reálne čísla t majú dané rovnice jeden (dva, žiadny) reálne korene?

a) $4x^2 - (t - 1)x + 1 = 0$

b) $2tx^2 - 2x - 3t - 2 = 0$

(Smida, J. – Šedivý, J.: Zbierka úloh z matematiky pre 1. ročník gymnázia. SPN: Bratislava 1985, s. 106)

Príklad č. 27 **Téma:** 3.2 Analytická geometria v rovine**Zadanie:**

Rozhodnite o vzájomnej polohe priamky $p: x + 2 = 0$ a kružnice

$$k: x^2 + y^2 - 10x + 2y + 17 = 0.$$

- (A) Priamka p je nesečnica kružnice k .
- (B) Priamka p je dotyčnica kružnice k , rovnobežná s osou x .
- (C) Priamka p je dotyčnica kružnice k , rovnobežná s osou y .
- (D) Priamka p je sečnica kružnice k , rovnobežná s osou x .
- (E) Priamka p je sečnica kružnice k , rovnobežná s osou y .

Pojmy, vlastnosti a vzťahy: súradnicová sústava v rovine, súradnice bodu, všeobecná rovnica priamky, rovnica kružnice, doplnenie do štvorca, vzťah medzi diskriminantom a počtom navzájom rôznych koreňov kvadratickej rovnice

Žiak vie: zostrojiť v súradnicovej sústave obrazy bodov, ak pozná ich súradnice, určiť z rovnice kružnice jej stred a polomer, rozhodnúť o vzájomnej polohe priamky a kružnice, ak pozná ich rovnice, nájsť všetky riešenia sústavy 2 rovníc s 2 neznámymi

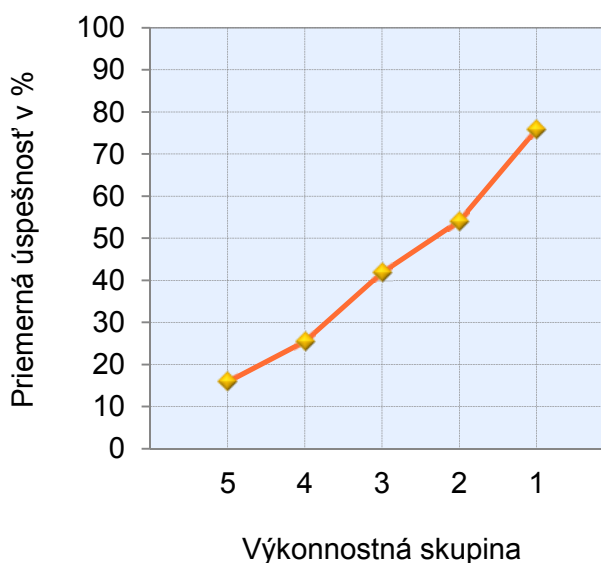
Myšlienkové operácie: zložitejšie

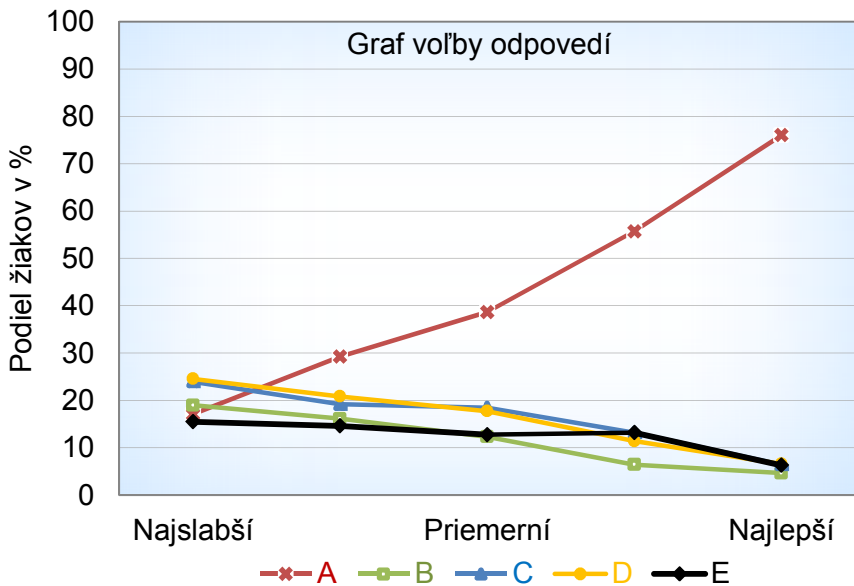
Predpokladaná obťažnosť: stredne obťažná úloha

Štatistické vyhodnotenie CTT:

úspešnosť	celková	42,9 %
	žiaci GYM	50,3 %
	žiaci SOŠ	23,2 %
	chlapci	41,1 %
	dievčatá	46,7 %
neriešenosť	celková	1,2 %
	žiaci GYM	1,0 %
	žiaci SOŠ	1,6 %
citlivosť		60,2 %
P. Bis.		0,38

Graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí:



Štatistické vyhodnotenie IRT:		obťažnosť	0,339	rozlišovacia schopnosť:	0,597																								
Odpovede, ich frekvencia a Point Biserial			Graf voľby odpovedí  <table><thead><tr><th></th><th>Najslabší</th><th>Priemerní</th><th>Najlepší</th></tr></thead><tbody><tr><td>A</td><td>18,0 %</td><td>38,0 %</td><td>75,0 %</td></tr><tr><td>B</td><td>18,0 %</td><td>15,0 %</td><td>5,0 %</td></tr><tr><td>C</td><td>25,0 %</td><td>18,0 %</td><td>10,0 %</td></tr><tr><td>D</td><td>25,0 %</td><td>18,0 %</td><td>10,0 %</td></tr><tr><td>E</td><td>15,0 %</td><td>12,0 %</td><td>5,0 %</td></tr></tbody></table>				Najslabší	Priemerní	Najlepší	A	18,0 %	38,0 %	75,0 %	B	18,0 %	15,0 %	5,0 %	C	25,0 %	18,0 %	10,0 %	D	25,0 %	18,0 %	10,0 %	E	15,0 %	12,0 %	5,0 %
	Najslabší	Priemerní				Najlepší																							
A	18,0 %	38,0 %				75,0 %																							
B	18,0 %	15,0 %				5,0 %																							
C	25,0 %	18,0 %				10,0 %																							
D	25,0 %	18,0 %				10,0 %																							
E	15,0 %	12,0 %	5,0 %																										
A	43,0 %	0,38																											
B	12,0 %	– 0,16																											
C	16,0 %	– 0,14																											
D	16,0 %	– 0,15																											
E	12,0 %	– 0,08																											
X	1,0 %	– 0,04																											

Riešenie:

Priamka $p: x + 2 = 0$ prechádza rovnobežne s osou y cez číslo $x = -2$ na osi x .

Polohu stredu a polomer kružnice k určíme úpravou rovnice kružnice doplnením do štvorca:

$$x^2 - 10x + 5^2 - 5^2 + y^2 + 2y + 1^2 - 1^2 = -17$$
$$(x - 5)^2 - 25 + (y + 1)^2 - 1 = -17$$
$$(x - 5)^2 + (y + 1)^2 = 9$$

Z poslednej rovnice určíme súradnice stredu $S[5; -1]$ a veľkosť polomeru $r = \sqrt{9} = 3$. Kružnica nepretína os y , leží celá napravo od osi y , zatiaľ čo priamka p leží naľavo od osi y . Vzdialenosť stredu S od priamky p je 7, čo je viac ako veľkosť polomeru kružnice 3, preto sa kružnica k a priamka p nepretínajú. Správna odpoveď je **(A)**.

Hodnotenie:

Úloha bola zameraná na vzájomné polohy lineárnych útvarov v rovine. Výhodne sa riešila metódami analytickej geometrie. Žiaci mali na výber viac možností riešenia úlohy.

Žiaci mohli úpravou rovnice kružnice na stredový tvar určiť súradnice stredu a veľkosť polomeru kružnice. Následne po zakreslení priamky a kružnice do spoločného obrázka mohli rozhodnúť o vzájomnej polohe útvarov.

Inou možnosťou bolo určiť počet spoločných bodov priamky a kružnice riešením sústavy rovníc zostavenej z rovníc útvarov v zadaní. Po zistení počtu spoločných bodov by výber správnej odpovede závisel od správneho určenia polohy priamky podľa jej rovnice v zadaní.

Z pojmov, vlastností, vzťahov a zručností potrebných na vyriešenie úlohy obsahuje štátny vzdelávací program pre GYM iba súradnice bodu a zobrazenie bodu v súradnicovej sústave v rovine. Žiadna časť analytickej geometrie nie je súčasťou štátneho vzdelávacieho programu pre GYM. Analytickú geometriu nenájdeme ani v súčasných učebniciach matematiky pre GYM. Žiaci sa analytickou metódou riešenia úloh z geometrie, ktorá bola donedávna náplňou celého druhého polroka 3. ročníka matematiky na GYM, môžu stretnúť na voliteľných hodinách zameraných na matematiku, prípadne na základných hodinách matematiky, ak škola rozšírila svoj školský vzdelávací program predmetu matematika o analytickú geometriu a súčasne zvýšila dotáciu hodín predmetu. Inou možnosťou pre žiaka je samostatné štúdium využitím dostupnej odbornej literatúry.

Správnou odpoveď (A) si vybralo 43,0 % žiakov. Boli to väčšinou žiaci celkove v teste úspešní. Žiaci GYM boli dvojnásobne úspešnejší než žiaci SOŠ. Dievčatá boli mierne úspešnejšie ako chlapci.

Distraktory boli pre žiakov takmer rovnako atraktívne. Volili si ich najmä žiaci v teste celkove menej úspešní. Najslabší žiaci si volili distraktory častejšie ako správnu odpoveď. Preferencia distraktorov s rastúcou schopnosťou žiakov postupne klesala. Voľba distraktorov (C) a (E) naznačuje nesprávnu predstavu žiakov o polohe priamky danej v zadání úlohy v súradnicovom systéme.

Úloha bola podľa výsledkov vyhodnotenia metódou IRT obťažnejšou položkou s priemernou rozlišovacou schopnosťou.

Podobné úlohy:

- Určte vzájomnú polohu súradnicových osí s kružnicou $x^2 + y^2 + 2x - 6y = 13$.

(Božek, M. – Černek, P. – Bednářová, S.: Matematika pre 3. ročník gymnázií a SOŠ. Zošit 4 Zbierka úloh. Orbis Pictus Istropolitana: Bratislava 2001, s. 27)

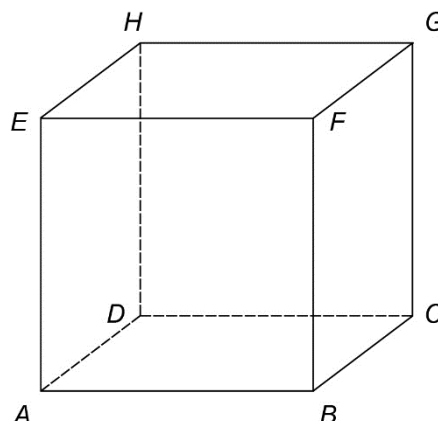
- Zistíte vzájomnú polohu priamky $2x - y + 3 = 0$ a kružnice $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$.

(Bušek, I. – Bero, P. – Calda, E. – Riečan, B. – Smida, J.: Zbierka úloh z matematiky pre 4. ročník gymnázia. SPN: Bratislava 1991, s. 106)

Príklad č. 28 **Téma:** 4.5 Telesá**Zadanie:**

Daná je kocka $ABCDEFGH$ (pozrite obrázok). Ktorý z nasledujúcich výrokov je nepravdivý?

- (A) Veľkosť uhla úsečky AH a úsečky HC je 60°
 (B) Úsečky BC a HC sú navzájom kolmé.
 (C) Priamky AE a CG sú navzájom rovnobežné.
 (D) Priamky EF a DH sú navzájom rôznobežné.
 (E) Veľkosť uhla roviny HAB a roviny ABC je 45° .



Pojmy, vlastnosti a vzťahy: kocka, priamka a rovina v priestore, rovnobežné, rôznobežné a mimobežné priamky, rovnobežné (rôznobežné) priamky ležia v jednej rovine, mimobežné neležia v jednej rovine, *uhol dvoch priamok*, *kolmosť priamok a rovín*, *uhol dvoch rovín*

Žiak vie: rozhodnúť o vzájomnej polohe dvoch lineárnych útvarov pomocou ich obrazu vo voľnom rovnobežnom premietaní, *na zobrazených telesách označiť uhly, ktorých veľkosť predstavuje uhol daných lineárnych útvarov*, vypočítať v trojuholníku zvyšné strany a uhly

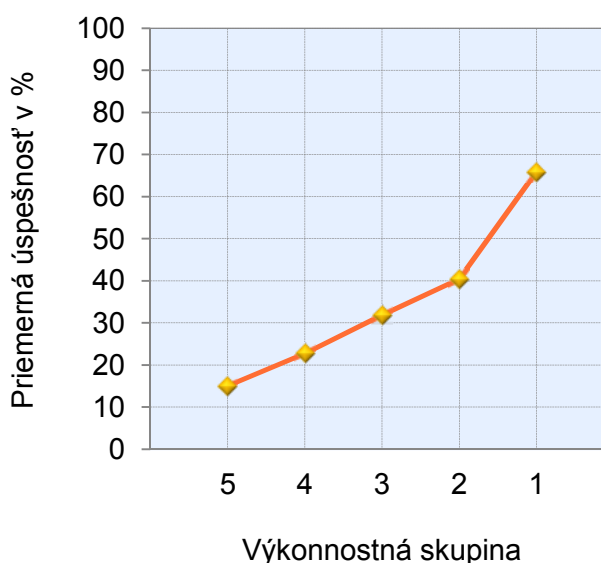
Myšlienkové operácie: zložitejšie

Predpokladaná obťažnosť: stredne obťažná úloha

Štatistické vyhodnotenie CTT:

úspešnosť	celková	35,3 %
	žiaci GYM	40,8 %
	žiaci SOŠ	20,9 %
	chlapci	35,4 %
	dievčatá	35,2 %
neriešenosť	celková	0,1 %
	žiaci GYM	0,1 %
	žiaci SOŠ	0,2 %
citlivosť		51,4 %
P. Bis.		0,32

Graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí:



Štatistické vyhodnotenie IRT:			obťažnosť	0,807	rozlišovacia schopnosť:	0,503																								
Odpovede, ich frekvencia a Point Biserial			Graf voľby odpovedí <table border="1"><thead><tr><th>Podiel žiakov v %</th><th>Najslabší</th><th>Priemerní</th><th>Najlepší</th></tr></thead><tbody><tr><td>A</td><td>40</td><td>40</td><td>20</td></tr><tr><td>B</td><td>22</td><td>18</td><td>8</td></tr><tr><td>C</td><td>5</td><td>2</td><td>1</td></tr><tr><td>D</td><td>18</td><td>28</td><td>65</td></tr><tr><td>E</td><td>18</td><td>12</td><td>8</td></tr></tbody></table>				Podiel žiakov v %	Najslabší	Priemerní	Najlepší	A	40	40	20	B	22	18	8	C	5	2	1	D	18	28	65	E	18	12	8
Podiel žiakov v %	Najslabší	Priemerní	Najlepší																											
A	40	40	20																											
B	22	18	8																											
C	5	2	1																											
D	18	28	65																											
E	18	12	8																											
A	35,0 %	– 0,14																												
B	15,0 %	– 0,11																												
C	2,0 %	– 0,10																												
D	35,0 %	0,32																												
E	13,0 %	– 0,10																												
X	0,0 %	– 0,02																												

Riešenie:

Rozhodneme o pravdivosti každého z uvedených výrokov (sledujme obraz kocky v zadaní):

(A) Úsečky AH a HC doplníme úsečkou AC na rovnostranný trojuholník ACH , ktorého strany sú stenové uhlopriečky kocky. Všetky vnútorné uhly trojuholníka ACH majú veľkosť 60° , preto aj uhol úsečiek AH a HC má veľkosť 60° . Výrok **(A)** je pravdivý.

(B) Úsečka BC je kolmá na rovinu zadnej steny kocky, a teda je kolmá na každú priamku a úsečku ležiacu v rovine zadnej steny, teda aj na úsečku HC . Výrok **(B)** je pravdivý.

(C) Priamky AE a CG (ležiace v rovine $BCHE$) sú obe kolmé na rovinu spodnej steny kocky a teda sú navzájom rovnobežné. Výrok **(C)** je pravdivý.

(D) Priamka DH leží v rovine ľavej steny kocky, priamka EF je na rovinu ľavej steny kocky kolmá, pričom priamky DH a EF nemajú spoločný bod. Neexistuje rovina, v ktorej by ležali obe priamky zároveň. Priamky DH a EF sú preto mimobežné. Výrok **(D)** nie je pravdivý.

(E) Roviny $HABG$ a $ABCD$ majú priesečnicu AB . Uhol rovín určíme ako veľkosť uhla priamky BG roviny $HABG$ a priamky BC roviny $ABCD$, ktoré sú obe kolmé na priesečnicu AB . Hľadaný uhol GBC je vnútorným uhlom pri základni pravouhlého rovnoramenného trojuholníka GBC s veľkosťou 45° . Výrok **(E)** je pravdivý.

Nepravdivý výrok a teda správna odpoveď je **(D)**.

Hodnotenie:

Úloha bola zameraná na vzájomné polohy lineárnych útvarov v priestore – v kocke. V jednotlivých možnostiach boli zastúpené polohové aj metrické úlohy. Žiaci mali rozhodnúť o pravdivosti každého z piatich uvedených tvrdení.

Polohové vlastnosti lineárnych útvarov v priestore sú súčasťou štátneho vzdelávacieho programu pre GYM. Venuje sa im aj druhá časť súčasnej učebnice matematiky pre 2. ročník GYM. Metrické úlohy však už nie sú zastúpené ani v štátnom vzdelávacom programe pre GYM, ani v súčasných učebniciach matematiky pre GYM.

Správnou odpoveď (D) si zvolilo iba 35,0 % žiakov, celkove v teste úspešných. Žiaci GYM boli dvojnásobne úspešnejší ako žiaci SOŠ. Úspešnosť chlapcov a dievčat bola takmer rovnaká.

Atraktívne pre žiakov boli aj distraktory, s výnimkou distraktora (C). Početnosť voľby distraktora (A) bola rovnaká ako početnosť voľby správnej odpovede (D). Distraktor (A) si však volili najmä žiaci v teste celkove menej úspešní. Iba najlepší žiaci si vybrali správnu odpoveď (D) s väčšou pravdepodobnosťou ako distraktor (A). Distraktory (B) a (E) boli atraktívne najmä pre najslabších žiakov.

Úloha bola podľa výsledkov vyhodnotenia metódou IRT obťažnejšou položkou s dobrou rozlišovacou schopnosťou.

Podobné úlohy:

- Daná je kocka $ABCDEFGH$, bod L patrí hrane CG . Presvedčte sa, že
 - a) priamky EF a EL sú rôznobežné,
 - b) priamky AB a EL sú mimobežné.
- Body U, V sú stredy hrán AE a CG kocky $ABCDEFGH$. Dokážte, že priamky HU a BV sú rovnobežné.

(Smida, J – Božek, M. – Odvárko, O.: Zbierka úloh z matematiky pre 2. ročník gymnázia. SPN: Bratislava 1985, s. 101)

- Daná je kocka $ABCDEFGH$, $|AB| = a$, bod K je stred hrany AE .
 - a) Určte uhol priamok BH a BK .
 - b) Určte uhol priamky AF a roviny CDK .
 - c) Určte uhol rovín DKB a DBG .

(Bušek, I. – Bero, P. – Calda, E. – Riečan, B. – Smida, J.: Zbierka úloh z matematiky pre 4. ročník gymnázia. SPN: Bratislava 1991, s. 114)

Príklad č. 29 **Téma: 5.1 Kombinatorika a pravdepodobnosť****Zadanie:**

Na prijímacej skúške na vysokú školu sú štyri príklady. Za riešenie každého príkladu je možné získať 0, 1, 2, 3 alebo 4 body. Na úspešné zvládnutie prijímacej skúšky treba dosiahnuť aspoň 14 bodov. Koľko je rôznych možností bodového hodnotenia jednotlivých úloh, ktorými žiak môže úspešne zvládnuť túto prijímaciu skúšku?

- (A) 9
(B) 11
(C) 12
(D) 15
(E) 17

Pojmy, vlastnosti a vzťahy: permutácie

Žiak vie: riešiť jednoduché kombinatorické úlohy vypisovaním všetkých možností, pričom vie vytvoriť systém na vypisovanie všetkých možností a na základe vytvoreného systému určiť počet všetkých možností

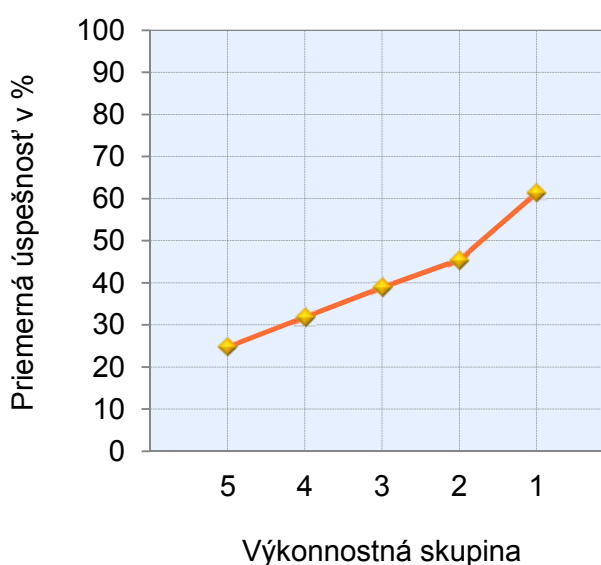
Myšlienkové operácie: zložitejšie

Predpokladaná obťažnosť: stredne obťažná úloha

Štatistické vyhodnotenie CTT:

úspešnosť	celková	40,7 %
	žiaci GYM	41,8 %
	žiaci SOŠ	37,7 %
	chlapci	42,2 %
	dievčatá	37,5 %
neriešenosť	celková	0,7 %
	žiaci GYM	0,9 %
	žiaci SOŠ	0,2 %
citlivosť		38,3 %
P. Bis.		0,21

Graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí:



Štatistické vyhodnotenie IRT:			obťažnosť	0,759	rozlišovacia schopnosť:	0,308
Odpovede, ich frekvencia a Point Biserial			Graf voľby odpovedí <			

Pojmy, vlastnosti, vzťahy a zručnosti potrebné k vyriešeniu úlohy sú súčasťou štátneho vzdelávacieho programu pre GYM. Nájdeme v ňom požiadavku na výpočet kombinatorickej úlohy využitím vzťahov na počet permutácií, variácií a kombinácií, aj požiadavku na tvorbu stratégie zisťovania počtu možností vypisovaním jednotlivých možností a objavenia podstaty systému vo vypisovaní možností. Kombinatorike a tvorbe stratégií vo vypisovaní možností sa venuje aj druhá časť učebnice matematiky pre 1. ročník GYM.

Správnou odpoveď (D) si zvolili približne dve pätiny žiakov, väčšinou žiaci celkove v teste úspešní. Úspešnosť žiakov GYM a SOŠ aj chlapcov a dievčat bola porovnateľná.

Všetky distraktory boli pre žiakov takmer rovnako atraktívne. Preferencia voľby distraktorov mierne klesala s narastajúcou úrovňou schopnosti žiakov.

Distraktor (A) si volili žiaci, ktorí zabudli na možnosť bodového hodnotenia $4 - 4 - 3 - 3$ a teda napočítali o 6 možností menej, než bol správny počet všetkých možných bodových hodnotení.

Distraktor (B) si volili žiaci, ktorí zabudli na možnosť bodového hodnotenia $4 - 4 - 4 - 3$ a teda napočítali o 4 možností menej, než bol správny počet všetkých možných bodových hodnotení. Frekvencia voľby distraktorov (A) a (B) bola rovnaká, ale distraktor (B) si častejšie vyberali aj žiaci celkove v teste úspešnejší.

Najfrekventovanejším bol distraktor (C). Žiaci zrejme vypisovali vhodné možnosti, ale si nezvolili vhodnú stratégiu a na niektoré možnosti zabudli.

Najmenej frekventovaným, ale rovnomerne preferovaným žiakmi všetkých výkonnostných skupín, bol distraktor (E). Žiaci zrejme nesprávne určili počet možností s bodovým hodnotením $4 - 4 - 3 - 3$ a namiesto 6 možností určili 8 možností.

Úloha bola obťažnou položkou s nízkou rozlišovacou schopnosťou.

Podobné úlohy:

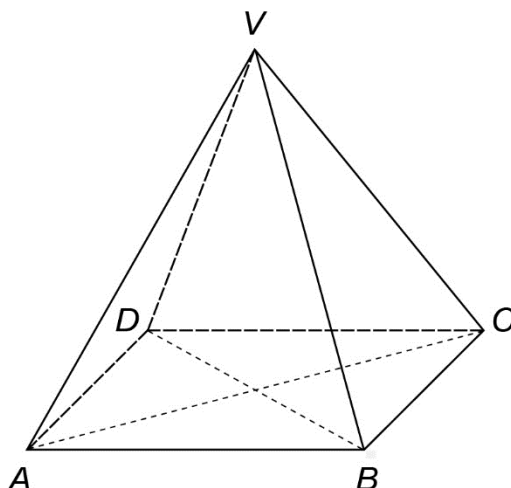
- Janko mal napísať všetky trojciferné čísla, ktoré sa dajú vytvoriť z kartičiek s číslicami 0, 1, 2, 3, 4. Párne a nepárne číslice sa pritom musia striedať. Janko začal takto: 103, 123, 143, 210, 214, 230, 234. Dokončite za Janka toto vypisovanie.
- Napíšte všetky štvorciferné čísla, ktorých súčin cifier je 6. Pavla to urobila takto: 1116, 1123, 1132, 1161, 1231, 1312, 1321, 2113, 2131, 2311, 3112, 3121, 3211, 6111... Nájdite možnosti, na ktoré zabudla. Kam by ste ich zaradili do jej zoznamu?

(Hecht, T. – Černek, P.: Matematika pre 1. ročník gymnázií a SOŠ. Zošit 5 Zbierka úloh. Orbis Pictus Istropolitana: Bratislava 1996, s. 47, s. 48)

Príklad č. 30 **Téma:** 4.4 Lineárne útvary v priestore – metrické úlohy**Zadanie:**

V pravidelnom štvorbokom ihlane $ABCDV$ (pozrite obrázok) je veľkosť uhla (odchýlky) roviny bočnej steny a roviny podstavy 45° . Pomer dĺžky hrany podstavy a výšky ihlana je:

- (A) 1 : 1
 (B) 2 : 1
 (C) $\sqrt{2} : 2$
 (D) 1 : 2
 (E) $2 : \sqrt{2}$



Pojmy, vlastnosti a vzťahy: uhol dvoch rovín, goniometrická funkcia, goniometria pravouhlého trojuholníka

Žiak vie: na zobrazených telesách označiť uhly, ktorých skutočná veľkosť predstavuje uhol daných útvarov, použiť goniometrické funkcie pri výpočte prvkov pravouhlého trojuholníka

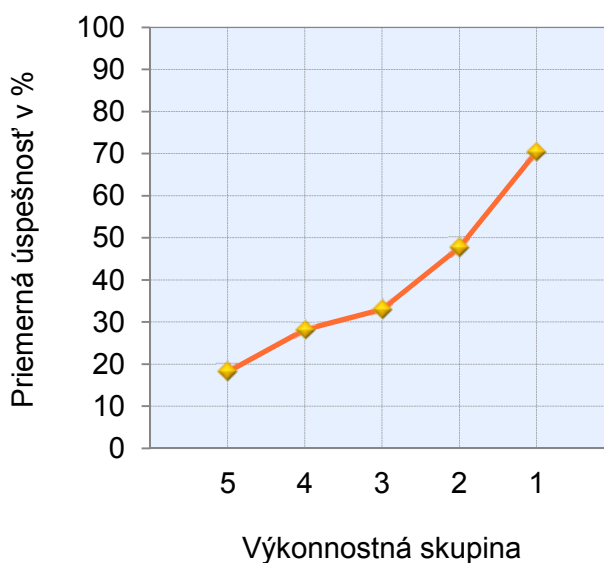
Myšlienkové operácie: zložitejšie

Predpokladaná obťažnosť: stredne obťažná úloha

Štatistické vyhodnotenie CTT:

úspešnosť	celková	39,9 %
	žiaci GYM	44,1 %
	žiaci SOŠ	28,6 %
	chlapci	40,1 %
	dievčatá	39,3 %
neriešenosť	celková	0,7 %
	žiaci GYM	0,5 %
	žiaci SOŠ	1,0 %
citlivosť		52,5 %
P. Bis.		0,32

Graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí:



Štatistické vyhodnotenie IRT:

obťažnosť

0,567

rozlišovacia schopnosť:

0,484

Odpovede,

ich frekvencia

a Point Biserial

A 13,0 % - 0,06

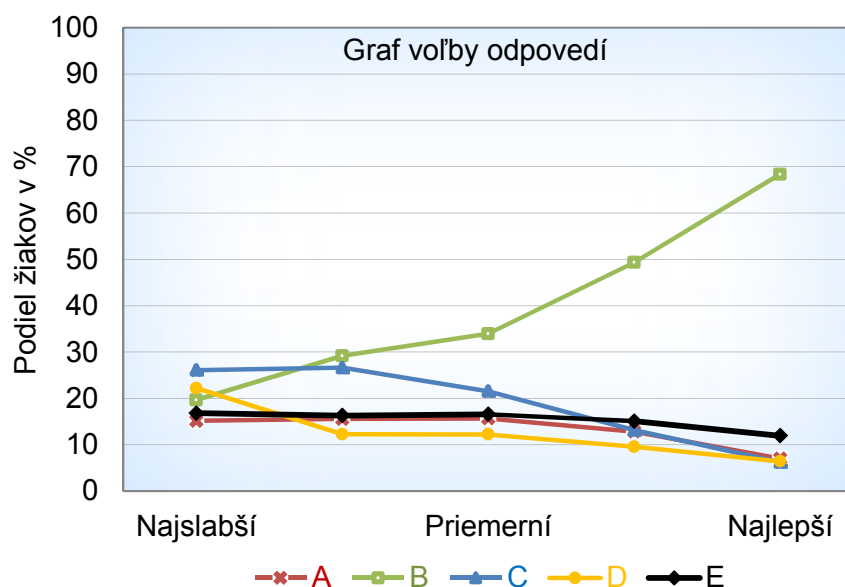
B 40,0 % 0,32

C 19,0 % - 0,18

D 12,0 % - 0,15

E 15,0 % - 0,04

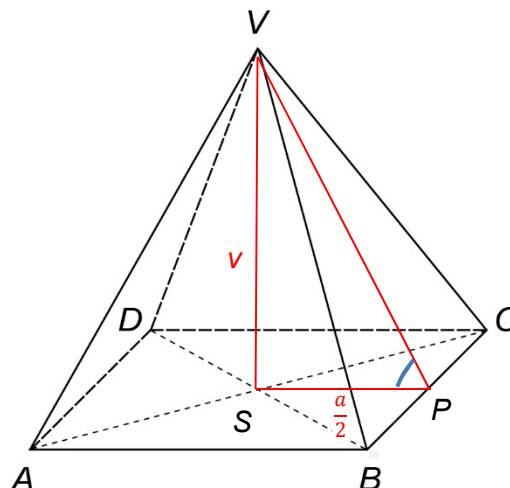
X 1,0 % - 0,03



Riešenie:

Uhol roviny bočnej steny a roviny podstavy určíme ako uhol priamky VP roviny bočnej steny a priamky SP roviny podstavy, ktoré sú obe kolmé na priesečnicu rovín, priamku BC . V pravouhlom trojuholníku SPV použijeme tangens daného uhla, ktorý obsahuje obe dĺžky, ktorých pomer potrebujeme vypočítať:

$$\operatorname{tg}(\sphericalangle SPV) = \frac{|SV|}{|SP|} \Rightarrow \operatorname{tg} 45^\circ = \frac{v}{\frac{a}{2}} \Rightarrow 1 = \frac{2v}{a}$$



Z poslednej rovnosti úpravou získame $a : v = 2 : 1$. Správna odpoveď je **(B)**.

Hodnotenie:

Úloha zo stereometrie bola zameraná na metrické vzťahy medzi lineárnymi útvarmi. Cieľom úlohy však nebolo vypočítať veľkosť uhla na základe daných dĺžok strán, ale naopak, využitím danej veľkosti uhla dvoch rovín bolo potrebné určiť pomer dĺžok dvoch úsečiek v pravidelnom štvorbokom ihlane.

Žiaci mali, aj s pomocou obrázka, nájsť vhodný pravouhlý trojuholník obsahujúci uhol dvoch rovín daný v zadaní a využitím vhodnej goniometrickej funkcie zistiť požadovaný pomer dĺžok v ihlane.

Štátny vzdelávací program pre GYM neobsahuje pojmy a zručnosti týkajúce sa metrických vzťahov lineárnych útvarov v priestore. Metrické úlohy zo stereometrie nie sú zastúpené ani v učebniciach matematiky pre GYM. Základ úlohy, teda správne určenie uhla bočnej steny a podstavy ihlana, si žiaci mohli osvojiť na hodinách matematiky iba v prípade, ak si škola rozšírila svoj školský vzdelávací program predmetu matematika o tematický celok týkajúci sa metrickej stereometrie, za súčasného zvýšenia počtu hodín matematiky. Ďalšou možnosťou bolo navštevovanie voliteľných hodín zameraných na matematiku v škole alebo samostatné domáce štúdium s využitím starších dostupných učebníc matematiky a zbierok úloh.

Správnou odpoveď (B) si zvolili dve pätiny žiakov. Mierne úspešnejší boli žiaci GYM než žiaci SOŠ. Úspešnosť chlapcov a dievčat bola porovnateľná.

Distraktor (D), ktorý obsahoval opačný pomer k správne pomeru v možnosti (B), si zvolilo 12,0 % žiakov. Preferencia voľby distraktora (D) v skupine najslabších žiakov bola vyššia ako voľby správnej odpovede (B). Pre ostatné výkonnostné skupiny žiakov už distraktor (D) nebol veľmi atraktívny.

Odpovede distraktorov (C) a (E) vyplývali z nesprávneho určenia uhla bočnej steny ihlana a roviny podstavy ihlana. Žiaci použili niektorú z bočných hrán ihlana a úlohu, ďalej už správne, riešili v niektorom nesprávne zvolenom pravouhlom trojuholníku ASV , BSV , CSV alebo DSV . Úlohu si nechtiac aj skomplikovali, pretože museli navyše vyjadriť dĺžku uhlopriečky podstavy ihlana pomocou dĺžky hrany podstavy ihlana.

Distraktor (A) zrejme volili žiaci, ktorí úlohu riešili bez výpočtu, iba na základe úvahy vyplývajúcej z analýzy obrázka. Voľba všetkých distraktorov klesala s narastajúcou úrovňou schopnosti žiakov.

Úloha bola podľa IRT obťažnou položkou s priemernou rozlišovacou schopnosťou.

Podobné úlohy:

- Pomer výšky pravidelného šesťbokého ihlana $ABCDEFV$ k veľkosti jeho podstavnej hrany je $\sqrt{6} : 4$. Určte uhol rovín ABV a ABC .

(Božek, M. – Černek, P. – Bednářová, S.: Matematika pre 3. ročník gymnázií a SOŠ. Zošit 4 Zbierka úloh. Orbis Pictus Istropolitana: Bratislava 2001, s. 10)

- Aký je vzťah medzi rozmermi $|AB| = a$, $|BC| = b$, $|AE| = c$ kvádra $ABCDEFGH$, ak priamka BG zvierá s rovinou ABC uhol 45° ?

(Smida, J – Božek, M. – Odvárko, O.: Zbierka úloh z matematiky pre 2. ročník gymnázia. SPN: Bratislava 1985, s. 101)

Záver

Na vyhodnotenie výsledkov testu riadneho termínu externej časti maturitnej skúšky z matematiky sa môžeme pozerieť z hľadiska kvality výkonu žiakov, ako aj z hľadiska kvality meracieho nástroja – testu, pričom tieto dva aspekty sú navzájom prepojené.

Test riešilo 6 658 maturantov. Počet žiakov v jednotlivých krajoch bol vyrovnaný. Podľa zriaďovateľa významne viac žiakov bolo zo štátnych škôl, zvyšok boli žiaci cirkevných a súkromných škôl. V rozdelení podľa druhu školy viac ako dve tretiny žiakov boli žiaci gymnázií. Viac ako polovica maturantov bola zo škôl s celkovým počtom žiakov väčším ako 300 a menším ako 600. Podiel chlapcov a dievčat bol približne 2 : 1 v prospech chlapcov. Asi šestina žiakov vykonala externú časť maturitnej skúšky z matematiky elektronickou formou.

Priemerná úspešnosť celého súboru (národný priemer) bola 45,7 %. Ukázalo sa, že výkon žiakov podľa krajov bol vyrovnaný. Rozdiel vo výsledkoch medzi žiakmi škôl rôznych zriaďovateľov bol zanedbateľný. Z hľadiska druhu školy, výkon žiakov gymnázií (priemerná úspešnosť 51,8 %) bol stredne vecne významne lepší ako výkon žiakov stredných odborných škôl, ktorých priemerná úspešnosť bola 29,3 %. Gymnazisti boli vo všetkých oblastiach testu lepší ako žiaci stredných odborných škôl. Rozdiely vo výsledkoch žiakov škôl s rôznym celkovým počtom žiakov sme nepozorovali. Aj keď test z matematiky písalo viac chlapcov ako dievčat, v porovnaní úspešnosti podľa pohlavia sme nezaznamenali štatisticky významný rozdiel. Rozdiely v úspešnosti chlapcov a dievčat sa nepotvrdili ani v jednotlivých oblastiach testu. Celkovo bol test z rodového hľadiska náročnosti položiek dobre vyvážený. Súlad poslednej klasifikácie žiakov (ktorým bol test administrovaný papierovou formou) z predmetu s matematickým zameraním a ich výkonu v teste bol väčší u žiakov gymnázií ako u žiakov stredných odborných škôl. Priemerná úspešnosť žiakov, ktorým bol test administrovaný papierovou a elektronickou formou, bola porovnateľná. Dosiahnuté priemerné úspešnosti žiakov zodpovedali širokospektrálnej populácii, ktorá test riešila.

V záujme nezávislosti riešenia testu boli vytvorené dva varianty testu, ktoré boli zo všetkých skúmaných hľadísk ekvivalentné. Základné charakteristiky testu nepoukazovali na závažné neštandardné vybočenia. Reliabilita testu bola primeraná. Cronbachovo $\alpha = 0,86$ potvrdilo vysokú presnosť merania. Aj ďalšie parametre testu svedčili o uspokojivej rozlišovacej sile testu. O kvalite testu vypovedala aj kvalita jednotlivých položiek: obťažnosť, citlivosť, neriešenosť a predovšetkým konzistentnosť položiek (medzipoložková korelácia). Nepriaznivú hodnotu niektorej štatistickej charakteristiky vykázalo jedenásť položiek testu. Položka č. 1 obťažnosť vyššiu ako 80 %, položky č. 18, 19 a 20 obťažnosť nižšiu ako 20 %, položky č. 10, 15, 16, 18, 19 a 20 neriešenosť vyššiu ako 20 % a položky č. 8, 23, 24 a 29 koeficient medzipoložkovej korelácie nižší ako 0,30.

Vyhodnotenie úspešnosti žiakov v jednotlivých oblastiach konštatuje primerané výsledky pri riešení príkladov známych z učebníc a zbierok úloh. Žiaci v podstate bez problémov riešili úlohy, ktoré vyžadovali jednoduchú aplikáciu poznatkov. Podrobná analýza položiek ukázala, že žiaci mali problém riešiť náročnejšie úlohy vyžadujúce vzájomné prepojenie poznatkov a využitie algebraického výpočtu. Prejavila sa značná neochota veľkej skupiny žiakov riešiť tieto úlohy. Opäť sme zaznamenali nižšiu priemernú úspešnosť žiakov pri riešení úloh z tematického celku Funkcie. Ukázali sa aj pretrvávajúce nedostatky pri riešení výpočtových úloh z geometrie, najmä u žiakov stredných odborných škôl.

Úspešné zvládnutie obsahu predmetu matematika podľa Štátneho vzdelávacieho programu nie je postačujúce na úspešné absolvovanie maturitnej skúšky z matematiky, ktorej obsah je oveľa rozsiahlejší a je stanovený Cieľovými požiadavkami na vedomosti a zručnosti maturantov z matematiky. V úlohách, ktorých obsah vychádzal z Cieľových požiadaviek na vedomosti a zručnosti maturantov z matematiky a zároveň nebol súčasťou štátneho vzdelávacieho programu žiadneho druhu strednej školy, žiaci dosiahli nižšiu úspešnosť ako v úlohách, ktoré vychádzali zo štátneho vzdelávacieho programu a žiaci ich poznali z hodín matematiky. Preto je potrebné zabezpečiť v spolupráci vyučujúcich matematiky a riaditeľov v oboch druhoch stredných škôl možnosť osobitnej prípravy žiakov na maturitnú skúšku z matematiky v požadovanom rozsahu. Zároveň je potrebné zvážiť, či špeciálna príprava na maturitnú skúšku z matematiky a zaradenie učiva z Cieľových požiadaviek na vedomosti a zručnosti maturantov z matematiky, ktoré nie je obsiahnuté v štátnom vzdelávacom programe stredných škôl, len v poslednom maturitnom ročníku štúdia, bez následnej možnosti neskoršieho precvičenia a upevnenia, je vhodné a postačujúce na úspešné zvládnutie maturitnej skúšky z matematiky a následné bezproblémové pokračovanie v štúdiu na vysokej škole.

Vo vyučovaní je potrebné klásť dôraz na úlohy a zadania vyžadujúce tvorivý prístup žiaka, aplikáciu a vzájomné prepojenie poznatkov z rôznych oblastí matematiky, prácu s informáciami, grafmi, tabuľkami. V ešte väčšej miere je nutné precvičovať stratégiu riešenia metrických úloh v planimetrii a stereometrii. Dostatočný priestor je potrebné venovať matematizácii problémov z bežného života, precvičovaniu algebraických zručností potrebných pri vysokoškolskom štúdiu a úlohám podporujúcim pozornosť, sústredenosť a dôslednosť žiaka počas ich riešenia a tvorby záveru.

Literatúra

1. Burjan, V.: Tvorba a využívanie školských testov vo vzdelávacom procese. Exam: Bratislava 1999.
2. Cieľové požiadavky na vedomosti a zručnosti maturantov z matematiky. ŠPÚ: Bratislava 2012.
3. Grošeková, M.: Jazykové skúšky a štandardizované testy 1. časť. In: Bulletin SAIA Slovenská akademická informačná agentúra, Informačný mesačník o štúdiu v zahraničí č. 9, ročník XIV, september 2004.
4. Hajdúk, M.: Teória odpovede na položku. Interný materiál. NÚCEM: Bratislava 2013.
5. Hajdúk, M. – Kelecsényi, P. – Ringlerová, V.: Maturitná skúška 2013. Správa o výsledkoch riadneho termínu externej časti maturitnej skúšky z matematiky. NÚCEM: Bratislava 2013.
6. Hajdúk, M.: Správa zo štatistického vyhodnotenia maturitnej skúšky 2015 z predmetu Matematika (papierová + online forma). Analýza prostredníctvom IRT. Interný materiál. NÚCEM: Bratislava 2015.
7. Hendl, J.: Přehled statistických metod zpracování dát. Portál: Praha 2004.
8. Hrabal, V. – Lustigová, Z. – Valentová, L.: Testy a testování ve škole. Pedagogická fakulta UK: Praha 1992.
9. Jelínek, M. – Květon, P. – Vobořil, D.: Testování v psychologii. Teorie odpovědi na položku a počítačové adaptivní testování. Grada Publishing: Praha 2011.
10. Juščáková, Z. – Kelecsényi, P.: Správa o výsledkoch externej časti maturitnej skúšky z matematiky. NÚCEM: Bratislava 2010.
11. Juščáková, Z. – Kelecsényi, P.: Maturitná skúška 2011. Správa o výsledkoch externej časti maturitnej skúšky z matematiky. NÚCEM: Bratislava 2011.
12. Juščáková, Z. – Kelecsényi, P.: Maturitná skúška 2012. Správa o výsledkoch externej časti maturitnej skúšky z matematiky. NÚCEM: Bratislava 2012.
13. Juščáková, Z. – Ringlerová, V.: Príručka. Vysvetlenie pojmov používaných v správach zo štatistického spracovania testov EČ MS. NÚCEM: Bratislava 2009.
14. Kelecsényi, P.: Maturitná skúška 2014. Správa o výsledkoch riadneho termínu externej časti maturitnej skúšky z matematiky. NÚCEM: Bratislava 2014.
15. Kolektív: Standardy pro pedagogické a psychologické testování. Testcentrum: Praha 2001.
16. Kubáček, Z.: Matematika pre 1. ročník gymnázií. 1. časť. SPN: Bratislava 2009.
17. Kubáček, Z.: Matematika pre 1. ročník gymnázií. 2. časť. SPN: Bratislava 2010.
18. Kubáček, Z.: Matematika pre druhý ročník gymnázií. Prvá časť. Orbis Pictus Istropolitana: Bratislava 2009.

19. Kubáček, Z.: Matematika pre 2. ročník gymnázií a 6. ročník gymnázií s osemročným štúdiom. Druhá časť. Orbis Pictus Istropolitana: Bratislava 2010.
20. Kubáček, Z.: Matematika pre 3. ročník gymnázia a 7. ročník gymnázia s osemročným štúdiom. 1. časť. SPN: Bratislava 2012.
21. Kubáček, Z.: Matematika pre 3. ročník gymnázia a 7. ročník gymnázia s osemročným štúdiom. 2. časť. SPN: Bratislava 2013.
22. Kubáček, Z.: Matematika pre 3. ročník gymnázia a 8. ročník gymnázia s osemročným štúdiom. SPN: Bratislava 2013.
23. Špecifikačná tabuľka testu z matematiky. Interný materiál. NÚCEM: Bratislava 2013.
24. Lapitka, M.: Tvorba a použitie didaktických testov. ŠPÚ: Bratislava 1996.
25. Ringlerová, V.: Externá časť maturitnej skúšky 2015. Záverečná správa zo štatistického spracovania testu z matematiky. NÚCEM: Bratislava 2015.
26. Ritomský, A. – Zelmanová, O.: Štatistické spracovanie a analýza dát rozsiahlych monitorovaní. Položková a multivariačná analýza s využitím systému SPSS. ŠPÚ: Bratislava 2003.
27. Ritomský, A. – Zelmanová, O. – Zelman, J.: Štatistické spracovanie a analýza dát rozsiahlych monitorovaní s využitím systému SPSS. ŠPÚ: Bratislava 2002.
28. Rosa, V.: Metodika tvorby didaktických testov. ŠPÚ: Bratislava 2007.
29. SPSS Base 10.0 User's Guide. by SPSS Inc.: Chicago 1999.
30. SPSS Base 7.0 Syntax Reference Guide. by SPSS Inc.: Chicago 1996.
31. Standardy pro pedagogické a psychologické testování. Testcentrum: Praha 2001.
32. Štátny vzdelávací program pre gymnáziá v Slovenskej republike ISCED 3A – Vyššie sekundárne vzdelávanie. ŠPÚ: Bratislava 2009.
33. Štátny vzdelávací program. Matematika (Vzdelávacia oblasť: Matematika a práca s informáciami). Príloha ISCED 3A. ŠPÚ: Bratislava 2009.
34. Turek, I.: Učiteľ a didaktické testy. Metodické centrum: Bratislava 1996.
35. Turek, I.: Učiteľ a pedagogický výskum. Metodické centrum: Bratislava 1998.
36. Urbánek, T. – Denglerová, D. – Sirůček, J.: Psychometrika. Měření v psychologii. Portál: Praha 2011.
37. Vzdelávací štandard pre študijné odbory, ktorých absolvovaním žiak získa úplné stredné odborné vzdelanie. ŠPÚ: Bratislava 2013.
38. Wimmer, G.: Štatistické metódy v pedagogickom výskume. Gaudeamus: Hradec Králové 1993.
39. URL: <https://www.scio.cz/o-vzdelavani/teorie-a-metodika-testu/> (28. 08. 2015)

Príloha – Vysvetlenie niektorých použitých pojmov

Klasická teória testovania (Classical Test Theory – CTT)

Úspešnosť žiaka je definovaná ako percentuálny podiel bodov za položky, na ktoré žiak odpovedal správne z celkového počtu bodov, ktoré mohol v teste získať. Najvyššia dosiahnutá úspešnosť niektorého žiaka v teste je **maximum**, najnižšia dosiahnutá úspešnosť je **minimum**. Aritmetický priemer úspešností všetkých žiakov riešiacich test je **priemerná úspešnosť** (národný priemer).

Percentil individuálneho **žiaka** určuje percentuálne poradie žiaka v celom súbore, koľko percent žiakov celého súboru dosiahlo horší výsledok ako individuálny žiak. Nutnou podmienkou korektnosti percentilu je zabezpečenie rovnakých podmienok pre všetkých žiakov súboru, teda riešenie rovnakých úloh jedného testu v rovnakom čase.

Štandardná odchýlka je priemer odchýlok úspešností všetkých žiakov od priemernej úspešnosti. Vyjadruje mieru rozptýlenia úspešností žiakov od priemernej úspešnosti. Čím je väčšia, tým väčšie sú rozdiely vo výkonoch žiakov. Pomocou štandardnej odchýlky určujeme **intervalový odhad úspešnosti populácie**

(priem. úsp. – 1,96 . štand. odchýlka; priem. úsp. + 1,96 . štand. odchýlka),
v ktorom sa umiestnilo 95 % testovaných žiakov.

Štandardná chyba priemernej úspešnosti určuje presnosť vypočítania priemernej úspešnosti. Čím menšia je štandardná chyba priemernej úspešnosti, tým presnejšie charakterizuje priemerná úspešnosť testovaných žiakov. Pomocou štandardnej chyby priemernej úspešnosti určujeme **interval spoľahlivosti pre priemernú úspešnosť**

(priem. úsp. – 1,96 . štand. ch. priem. úsp.; priem. úsp. + 1,96 . štand. ch. priem. úsp.),
v ktorom sa s 95 % – nou pravdepodobnosťou nachádza priemerná úspešnosť celého súboru.

Štandardná chyba merania je ukazovateľom presnosti merania. Čím je menšia, tým presnejšie je určený **intervalový odhad úspešnosti individuálneho žiaka**

(priem. úsp. – 1,96 . štandardná ch. merania; priem. úsp. + 1,96 . štandardná ch. merania),
v ktorom sa s 95 % – nou pravdepodobnosťou nachádza úspešnosť individuálneho žiaka.

Reliabilita testu (spoľahlivosť merania) určuje, do akej miery sa podarilo v teste vylúčiť vplyv náhodnosti, či by testovaní žiaci dosiahli rovnaké alebo podobné výsledky pri opakovanom testovaní podobnými úlohami. Reliabilitu zvyšuje vyšší počet úloh a ich citlivosť, znižuje veľa veľmi ľahkých alebo veľmi ťažkých položiek. Koeficientom reliability je **Cronbachovo alfa**.

Štatistická významnosť (signifikancia) určuje mieru zhody alebo rozdielnosti vybraného znaku dvoch porovnávaných skupín súboru, napríklad priemerných úspešností. Keďže štatistická významnosť sa preukáže už pri malých rozdieloch medzi úspešnosťami skupín (hodnota 0,000), pre potreby pedagogických výskumov je vhodnejšia **vecná významnosť (signifikancia)** rozdielov priemerných úspešností r , ktorá aj pri veľkých súboroch zohľadňuje počet žiakov v jednotlivých porovnávaných skupinách. Mieru zhody alebo rozdielnosti porovnávaných skupín podľa vecnej významnosti r vyjadruje stupnica v nasledujúcej tabuľke.

Tab. 37 Klasifikácia miery vecnej významnosti

Hodnota vecnej významnosti r	Miera významnosti	
0,00 – 0,10	žiadna	zanedbateľná
0,11 – 0,20	veľmi mierna	
0,21 – 0,30	mierna	
0,31 – 0,50	stredná	
0,51 – 1,00	silná, veľmi silná až úplná	

Obťažnosť položky je percentuálny podiel žiakov, ktorí správne riešili úlohu. Čím vyššia je hodnota obťažnosti položky, tým väčšia časť žiakov na položku odpovedala správne, tým bola položka ľahšia. Rozdelenie položiek podľa percentuálnej hodnoty obťažnosti uvádza nasledujúca tabuľka.

Tab. 38 Klasifikácia položiek podľa obťažnosti

Hodnota obťažnosti	Obťažnosť položky
0,0 % – 20,0 %	veľmi obťažná
20,1 % – 40,0 %	obťažná
40,1 % – 60,0 %	stredne obťažná (okolo 50,0 % optimálna)
60,1 % – 80,0 %	ľahká
80,1 % – 100,0 %	veľmi ľahká

Medzipoložková korelácia je mierou reliability, homogenity testu. Test je reliabilný, ak sú jeho položky homogénne, čo znamená, že položky medzi sebou súvisia, teda merajú tú istú vlastnosť (v teste z matematiky úroveň matematickej schopnosti žiaka). Koeficient medzipoložkovej korelácie **P. Bis. (Point Biserial)** položky určuje koreláciu medzi obťažnosťou položky testu a obťažnosťou ostatných položiek testu. Ak je hodnota **P. Bis.** položky záporná, tak žiaci v teste celkove úspešní (dosiahli úspešnosť vyššiu ako priemerná úspešnosť) neodpovedali správne na položku a naopak žiaci v teste celkove menej úspešní uviedli správnu odpoveď. Čím väčšia je kladná hodnota **P. Bis.** položky, tým väčší podiel v teste celkove úspešnejších žiakov a menší podiel menej úspešných žiakov odpovedal správne na položku. Rozdelenie položiek podľa hodnoty **P. Bis.** je v nasledujúcej tabuľke.

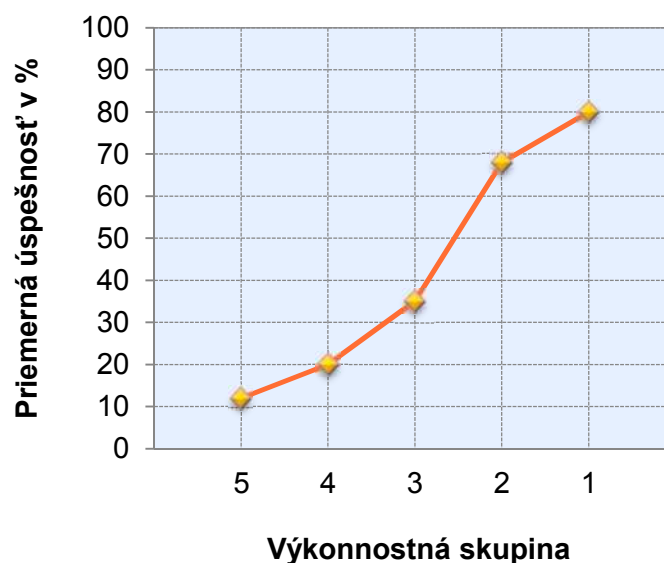
Tab. 39 Klasifikácia položiek podľa *P. Bis.*

Hodnota <i>P. Bis.</i>	Rozlišovacia schopnosť položky
záporná hodnota	nerozlišuje dobrých a slabých žiakov
hodnota okolo 0	veľmi slabá rozlišovacia schopnosť
hodnota väčšia ako 0,30	dobrá rozlišovacia schopnosť

Pri úlohách s výberom odpovede sa vyhodnocuje osobitne každá ponúknutá odpoveď. Uvádza sa *P. Bis.* každej možnosti a podiel žiakov, ktorí si vybrali danú možnosť (frekvencia). Tieto údaje sú uvedené aj pre skupinu žiakov, ktorá na úlohu neuviedla odpoveď. Žltou farbou je označený stĺpec (prípadne riadok) so správnou odpoveďou. Položky s výberom odpovede hodnotíme podľa nasledovných kritérií:

1. Podiel žiakov, ktorí si vybrali správnu odpoveď, by mal byť najväčší.
2. Hodnota *P. Bis.* správnej odpovede by mala byť väčšia ako 0,30. Väčšina v teste celkove úspešnejších žiakov by si mala vybrať správnu odpoveď. Pri nedodržaní tohto kritéria je hodnota zvýraznená červenou farbou.
3. Hodnota *P. Bis.* nesprávnej odpovede (distraktora) by mala byť záporná. Distraktory by si mali vybrať žiaci v teste celkove menej úspešní. Pri nedodržaní tohto kritéria je hodnota zvýraznená hnedou farbou.

Distribúcia úspešností vyjadruje vzťah medzi úspešnosťou žiaka v položke a celkovou úspešnosťou žiaka v teste. Interpretuje sa grafmi, ktoré majú na osi x rozdelenie žiakov do piatich výkonnostných skupín podľa celkovej úspešnosti v teste od najmenej úspešnej piatej skupiny po najúspešnejšiu prvú skupinu a na osi y priemernú úspešnosť žiakov v percentách v danej položke v danej výkonnostnej skupine.



Obr. 25 Distribúcia úspešností odpovedí žiakov na položku podľa výkonnostných skupín

Citlivosť (rozlišovacia sila položky) je schopnosť položky rozlíšiť dobrých a slabších žiakov. Ak všetkých žiakov rozdelíme vzostupne podľa celkovej úspešnosti v teste do piatich skupín (od 5 do 1), tak rozdiel priemernej úspešnosti najlepšej (1) a najslabšej (5) skupiny je hodnota citlivosti položky. Položky podľa hodnoty citlivosti rozdeľuje nasledujúca tabuľka.

Tab. 40 Rozdelenie položiek podľa citlivosti

Hodnota citlivosti	Miera citlivosti
Menej ako 0,0 % (záporná hodnota)	kritická
0,0 % – 30,0 %	nedostatočná
nad 30,0 %	vyhovujúca

Neriešenosť položky je percentuálny podiel žiakov, ktorí na položku neuviedli odpoveď. Určuje sa ako súčet vynechanosti a nedosiahnutosti.

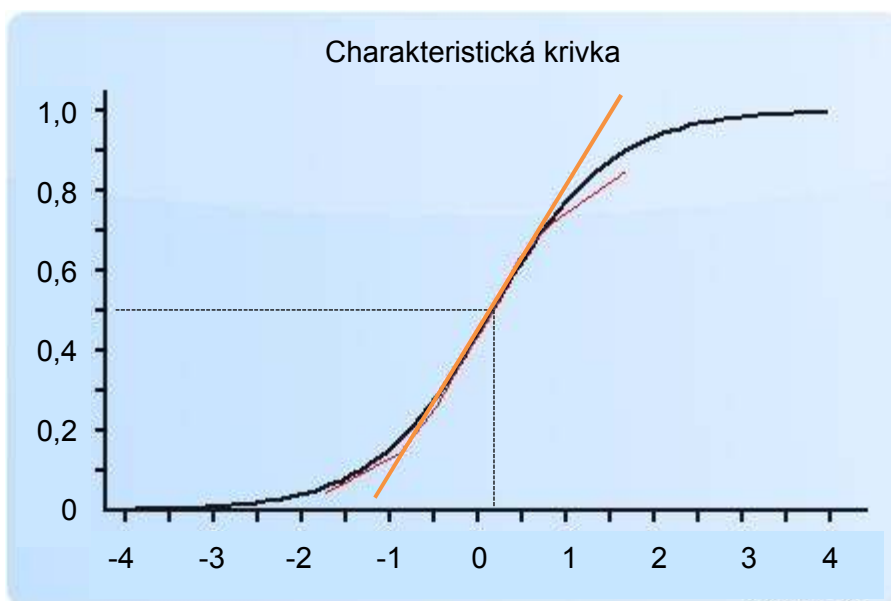
Žiak vynechal položku, ak na danú úlohu neodpovedal, ale na niektorú ďalšiu úlohu áno. Za nedosiahnutú považujeme položku, po ktorej už žiak žiadnu položku neriešil. Nedosiahnutosť poslednej položky určujeme ako nedosiahnutosť predposlednej položky. Za kritickú považujeme hodnotu neriešenosti vyššiu ako 30 %.

Teória odpovede na položku (Item Response Theory – IRT)

Pri vyhodnocovaní testu MAT15 a jeho položiek sa použil dvojparametrový model. Vyhodnocovanými parametrami boli ťažnosť položky a rozlišovacia schopnosť položky.

Najprv sa hľadal najvhodnejší dvojparametrový model vhodný pre vyhodnotenie výsledkov testu MAT15 a jeho položiek overovaním zhody vybraných modelov so vstupnými dátami – výsledkami žiakov. Po výbere najvhodnejšieho modelu sa pomocou modelu odhadli parametre a charakteristická krivka každej položky testu (kalibrácia položiek) a úroveň schopnosti jednotlivých testovaných žiakov.

Charakteristická krivka položky (Obr. 26, výrazná čierna krivka tvaru normálnej ogivy) je grafické vyjadrenie závislosti pravdepodobnosti výberu správnej odpovede od úrovne matematickej schopnosti žiaka. Je to teoretický konštrukt očakávanej pravdepodobnosti výberu správnej odpovede podľa úrovne schopnosti žiakov vytvorený na základe modelu. Skutočná pravdepodobnosť výberu správnej odpovede (menej výrazná červená čiara) v závislosti od schopnosti žiakov by mala tesne „kopírovať“ charakteristickú krivku položky. Ak položka a jej charakteristická krivka nie sú v súlade s modelom, pravdepodobne je položka problematická a najčastejšie sa pri odhade celkových parametrov testu z celkového vyhodnocovania vynecháva.



Obr. 26 Pravdepodobnosť výberu správnej odpovede na položku podľa úrovne schopnosti žiakov

Obťažnosť položky sa určuje ako hodnota tej úrovne schopnosti žiakov, pri ktorej pravdepodobnosť stanovenia správnej odpovede je 0,5. Priemerná obťažnosť položky je 0,0. Položky so zápornou hodnotou obťažnosti sú jednoduchšie, naopak čím väčšia je kladná hodnota obťažnosti položky, tým je položka náročnejšia.

Rozlišovacia schopnosť položky vyjadruje, ako kvalitne položka rozlišuje žiakov podľa pravdepodobnosti určenia správnej odpovede na základe schopnosti žiakov. Číselne sa určuje ako smernica dotýčnice charakteristickej krivky položky v bode, v ktorom pravdepodobnosť voľby správnej odpovede na položku dosahuje hodnotu 0,5 (priamka zobrazená oranžovou farbou na Obr. 26). Čím je charakteristická krivka položky strmšia, tým väčšia je hodnota rozlišovacej schopnosti položky a tým lepšie položka rozlišuje žiakov. Rozlišovacia schopnosť položiek, pri ktorých sa so zvyšovaním úrovne schopnosti žiakov zvyšuje aj pravdepodobnosť výberu správnej odpovede (rastúci priebeh charakteristickej krivky položky), sa nachádza najčastejšie v intervale $(0; 2)$. Za veľmi dobre rozlišujúce položky pre žiakov všetkých úrovní matematickej schopnosti považujeme položky s hodnotou rozlišovacej schopnosti vyššou ako 1,0, ktoré zároveň nie sú veľmi ľahké alebo veľmi obťažné.

IRT model dokáže odhadnúť aj **úroveň schopnosti** (latentnú schopnosť) jednotlivých testovaných **žiakov** (schopnosť vyriešiť matematickú úlohu a určiť jej správnu odpoveď) podľa správnosti odpovedí žiakov na jednotlivé položky testu líšiace sa obťažnosťou a rozlišovacou schopnosťou. Priemerná úroveň schopnosti žiaka zodpovedá hodnote 0,0.

Záporné hodnoty vypovedajú o slabších schopnostiach žiakov, čím väčšie kladné hodnoty naopak o veľmi dobrých schopnostiach.

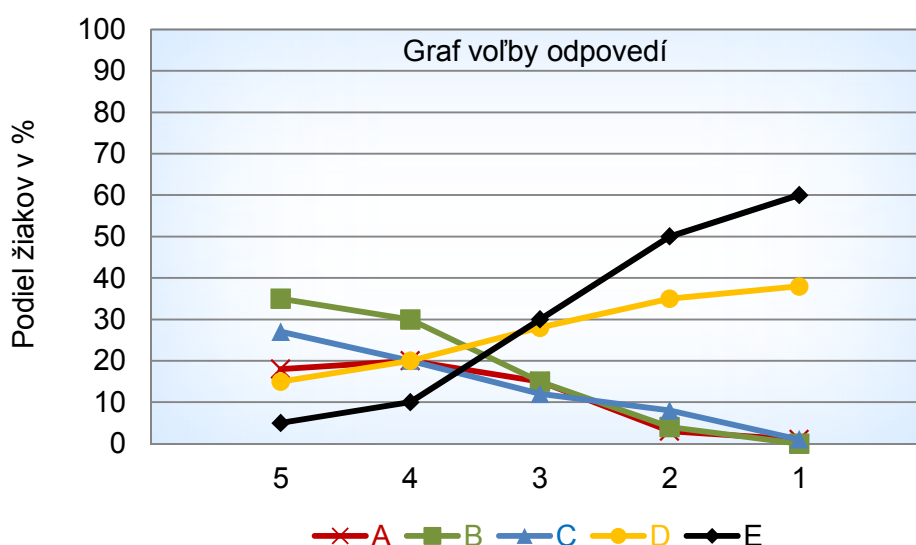
Veľkou výhodou spracovania výsledkov testu IRT metódou je možnosť zobrazit' na jednu spoločnú škálu obťažnosť položiek a úroveň schopnosti žiakov a tak ich navzájom porovnať. V grafoch sa zobrazujú na vodorovnú os x . Na zvislú os y sa najčastejšie zobrazuje pravdepodobnosť výberu odpovede. Z porovnania oboch kriviek môžeme zistiť, ktorej skupine žiakov podľa úrovne schopnosti test a jeho položky najviac vyhovovali a či test a jeho položky boli svojou obťažnosťou primerané úrovni schopnosti testovaných žiakov.

Informačná funkcia položky je krivka, ktorou sa zobrazuje množstvo informácií, ktoré položka prináša o žiakoch rôznych úrovni schopnosti. Ľahké položky spravidla prinášajú najviac informácií o slabších žiakoch. Obťažnejšie položky práve naopak. Záleží aj na rozlišovacej schopnosti položky. Položky s vyššou rozlišovacou schopnosťou prinášajú viac informácií o žiakoch rôznych úrovni schopnosti.

Súčet informačných funkcií všetkých položiek je **informačná funkcia testu**. Určuje, o ktorej skupine žiakov podľa úrovne schopnosti prináša test najviac informácií.

Graf **chyby merania** naopak určuje, pre ktorú skupinu žiakov podľa úrovne schopnosti má vyhodnocovaný test najmenšiu chybu merania, kde meria najpresnejšie. Grafy Informačnej funkcie a chyby merania testu je možné súčasne umiestniť do jedného obrázka a tak jednoduchšie sledovať, ako sa mení chyba merania v závislosti od množstva informácií, ktoré test prináša.

Príklad:



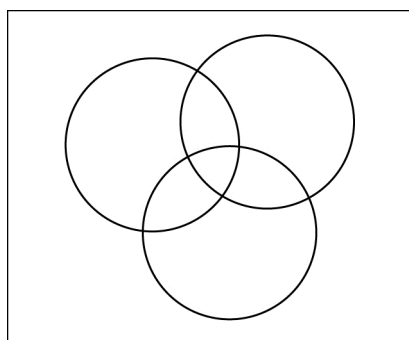
Obr. 27 Pravdepodobnosť voľby odpovedí na položku podľa výkonnostných skupín

Pri vyhodnocovaní uzavretých položiek s výberom odpovede je možné sledovať nielen pravdepodobnosť výberu správnej odpovede v závislosti od úrovne schopnosti žiakov, ale aj preferenciu a zmenu preferencie voľby jednotlivých distraktorov v závislosti od úrovne schopnosti žiakov.

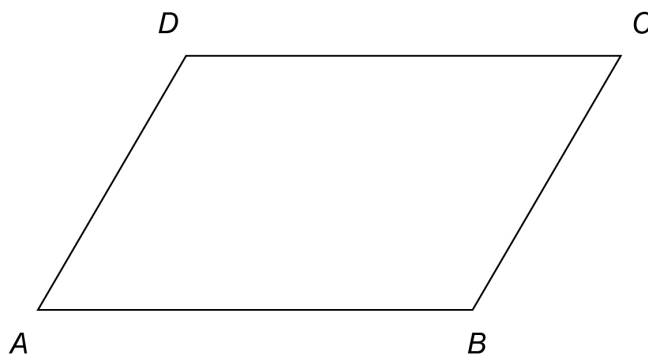
Čiernou rastúcou krivkou je zobrazená pravdepodobnosť výberu správnej odpovede (E). Graf zobrazuje náročnú položku. Pravdepodobnosť 50 % výberu správnej odpovede (E) dosiahli až žiaci druhej výkonnostnej skupiny. Priemerní žiaci tretej výkonnostnej skupiny by vybrali správnu odpoveď (E) s pravdepodobnosťou len asi 30 %. Rôznymi farbami sú znázornené krivky pravdepodobnosti výberu distraktorov. Legenda je uvedená pod grafom. Z distraktorov pravdepodobnosť výberu distraktora (D) znázorneného oranžovou krivkou je u žiakov všetkých úrovní schopnosti najvyššia. Dokonca s narastajúcou úrovňou schopnosti žiakov sa pravdepodobnosť výberu distraktora (D) zvyšuje. Takýto distraktor alebo nebol vhodne zaradený medzi možné odpovede na úlohu alebo obsahoval odpoveď, v ktorej bola typická žiacka chyba pri riešení úlohy, ktorej sa dopúšťajú aj šikovnejší žiaci. Ostatné distraktory (A), (B) a (C) znázornené krivkami s červenou, zelenou a modrou farbou sa správali podľa predpokladov. Slabší žiaci piatej a štvrtej výkonnostnej skupiny ich volili s väčšou pravdepodobnosťou ako správnu odpoveď (E). Pravdepodobnosť výberu týchto distraktorov sa s rastúcou úrovňou schopnosti žiakov zmenšovala a nadpriemerní žiaci (s úrovňou schopnosti vyššou ako 0,0 – prvá a druhá výkonnostná skupina) si volili častejšie správnu odpoveď (E) než distraktory. Zo strmosti priebehu krivky pravdepodobnosti výberu správnej odpovede (E) zobrazenej čiernou farbou môžeme odhadnúť rozlišovaciu schopnosť položky. Na uvedenom grafe krivka rástla veľmi mierne, rozlišovacia sila položky bola preto veľmi malá. Krivka strmšie rastie až pre úroveň schopnosti žiakov medzi štvrtou a druhou výkonnostnou skupinou v intervale $(-1; 1)$, v ktorom rozlišuje najlepšie.

Zadania úloh testu MAT15 – 1203

- 01.** Priemerná výška všetkých žiakov triedy je 162 cm. Výška triednej učiteľky je 178 cm. Priemerná výška všetkých žiakov triedy a triednej učiteľky je 163 cm. Vypočítajte počet žiakov triedy.
- 02.** V dvojčifernom čísle AB je $A > B$. Z čísla AB sme pridaním ďalšej cifry A alebo B vytvorili niekoľko trojčiferných čísel. Trojčiferné číslo ABB je deliteľné číslom 7, číslo BAB je deliteľné číslom 4 a číslo ABA je deliteľné číslom 3. Nájdite pôvodné dvojčiferné číslo AB .
- 03.** Tria chlapci a tri dievčatá si chcú urobiť spoločnú fotku. Koľkými rôznymi spôsobmi sa môžu posadiť vedľa seba na jednu lavicu tak, aby sa navzájom striedali chlapci s dievčatami a vždy vznikla iná fotka?
- 04.** Trieda má 30 žiakov. Na konci školského roka mali piati žiaci triedy jednotku z matematiky a nikto z tohto predmetu neprepadol. 18 žiakov triedy malo z matematiky od jednotky horšiu, ale od štvorky lepšiu známku. 16 žiakov triedy malo z matematiky horšiu známku ako dvojku. Koľko žiakov triedy malo na konci školského roka z matematiky trojku? Pri riešení môžete využiť Vennov diagram.

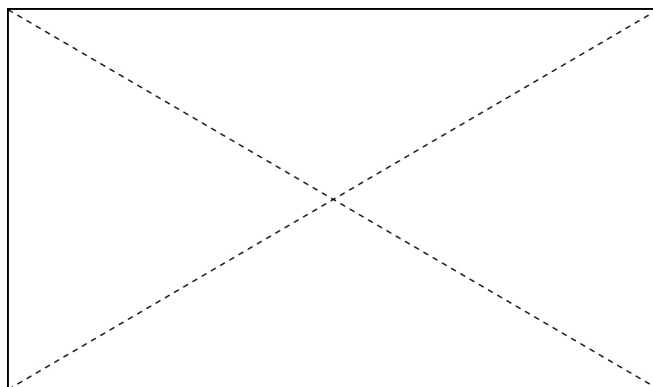


- 05.** Rovnobežník $ABCD$ (pozrite obrázok) má dĺžky strán 6 cm a 4 cm. Veľkosť jedného z vnútorných uhlov rovnobežníka je 45° . Vypočítajte v centimetroch dĺžku dlhšej uhlopriečky rovnobežníka $ABCD$.



06. Výraz $\left(\frac{\sqrt{2}}{2^{3n} \cdot 2^{n-1}}\right)^2$ sa pre všetky $n \in \mathbb{N}$ dá upraviť a zjednodušiť na tvar 2^{an+b} , kde a, b sú celé čísla. Určte súčet $a + b$.

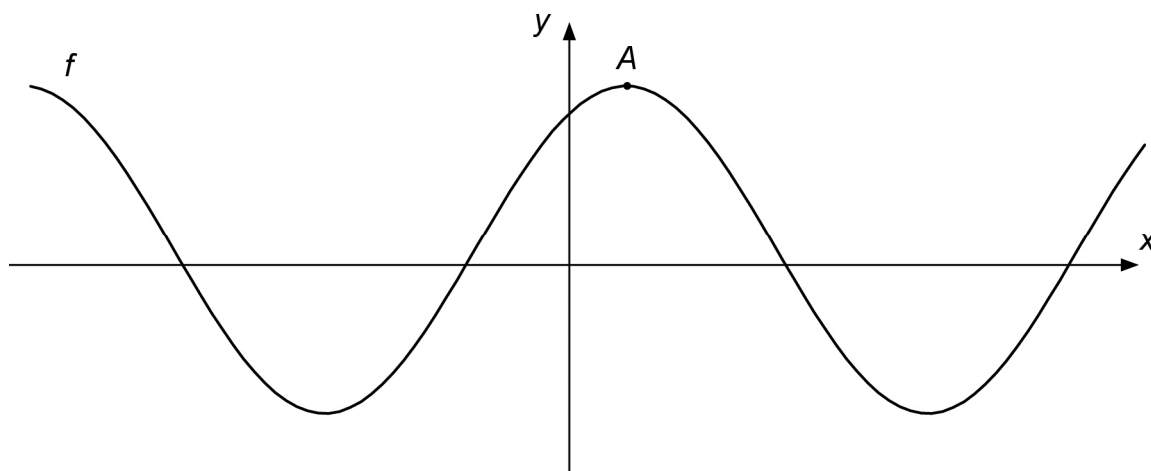
07. Dĺžky strán a dĺžka uhlopriečky obdĺžnika (pozrite obrázok) sú tri po sebe idúce členy aritmetickej postupnosti. Dĺžka dlhšej strany obdĺžnika je 12 cm. Určte v centimetroch štvorcový obsah tohto obdĺžnika.

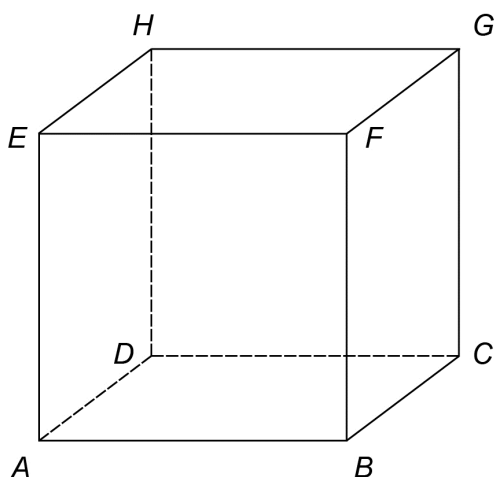


08. Cena jedného kalerábu vzrástla o 0,40 eura. Počet kalerábov, ktoré môže zákazník kúpiť za 4 eurá, tak klesol o 5. Zistite v eurách novú cenu jedného kalerábu.

09. Zistite, koľkokrát väčšie je číslo $x = 103!$ ako číslo $y = 101! + 102!$.

10. Na obrázku je zobrazená časť grafu funkcie $f: y = 3 \cdot \sin(x + 65^\circ)$ a bod A , v ktorom graf funkcie f prvýkrát nadobúda maximum na množine kladných reálnych čísel. Určte v stupňoch x -ovú súradnicu bodu A .

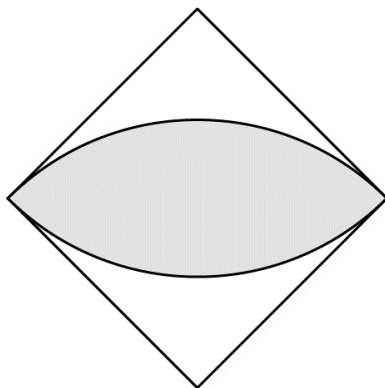




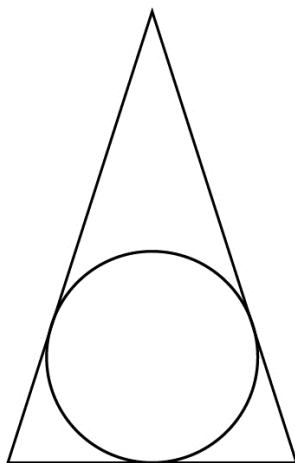
-
- Four empty circles are provided for drawing. Each circle is contained within a rectangular frame that has a solid top and bottom line and dashed left and right lines.

-

- 15.** Do štvorca so stranou dlhou 1 cm sú vpísané dve štvrtkružnice so stredmi v protiľahlých vrchoch štvorca (pozrite obrázok). Vypočítajte v centimetroch štvorcových obsah vyznačenej časti štvorca, ohraničenej dvoma štvrtkružnicami.

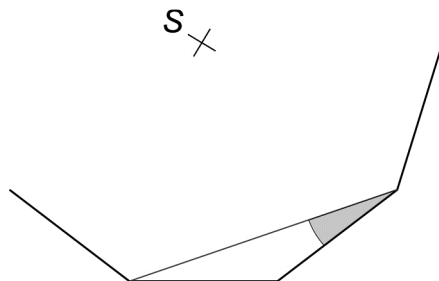


- 16.** Súčet druhého a štvrtého člena geometrickej postupnosti je dvojnásobkom súčtu prvého a tretieho člena postupnosti. Súčet prvých desiatich členov postupnosti je 3 069. Určte prvý člen postupnosti.
- 17.** Vypočítajte v stupňoch súčet všetkých koreňov rovnice $\cos x = \frac{1}{2}$ z intervalu $(0^\circ; 540^\circ)$.
- 18.** Do rovnoramenného trojuholníka so základňou dlhou 2 cm a výškou na základňu dlhou 6 cm je vpísaná kružnica (pozrite obrázok). Vypočítajte v centimetroch polomer vpísanej kružnice.



- 19.** Dané sú body $A [-1; 1]$ a $B [3; -2]$. Určte reálne číslo c v súradniciach bodu $C [c; c]$ tak, aby bod C bol vrcholom pravouhlého trojuholníka ABC s pravým uhlom pri vrchole B .

20. V pravidelnom mnohouholníku (na obrázku je zobrazená jeho časť a stred) má najkratšia uhlopriečka dĺžku 10 cm. Veľkosť uhla tejto uhlopriečky a strany mnohouholníka je 20° . Vypočítajte v centimetroch obvod tohto mnohouholníka.



21. Definičný obor funkcie $f: y = \frac{\sqrt{(x+4) \cdot (x-7)}}{(x+4) \cdot (x-3)}$ je:

- (A) $(-\infty; -4) \cup \langle 7; \infty)$
- (B) $(-\infty; -4) \cup (7; \infty)$
- (C) $(-\infty; -4) \cup \langle 7; \infty)$
- (D) $(-\infty; 3) \cup (7; \infty)$
- (E) $(-\infty; 3) \cup \langle 7; \infty)$

22. Daný je výrok: Peter klame a kradne.

Vyberte možnosť, v ktorej je uvedená negácia daného výroku.

- (A) Peter klame, ale nekradne.
- (B) Peter neklame a nekradne.
- (C) Keď Peter neklame, tak ani nekradne.
- (D) Peter neklame, ale kradne.
- (E) Peter neklame alebo nekradne.

23. Daná je funkcia $f: y = \frac{3x-2}{x+1}$. Vyberte správne tvrdenie o monotónnosti a ohraničenosti funkcie f na intervale $(0; \infty)$.

- (A) Funkcia f je rastúca a len zdola ohraničená na $(0; \infty)$.
- (B) Funkcia f je klesajúca a len zhora ohraničená na $(0; \infty)$.
- (C) Funkcia f je rastúca a ohraničená na $(0; \infty)$.
- (D) Funkcia f je rastúca a nie je ohraničená na $(0; \infty)$.
- (E) Funkcia f je klesajúca a nie je ohraničená na $(0; \infty)$.

24. Daný je trojuholník ABC , pričom $A [3; 5]$, $B [0; 1]$ a $C [3; -2]$. Trojuholník $A_1B_1C_1$ je osovo súmerný s trojuholníkom ABC podľa osi x . Určte obsah spoločnej časti trojuholníkov ABC a $A_1B_1C_1$.

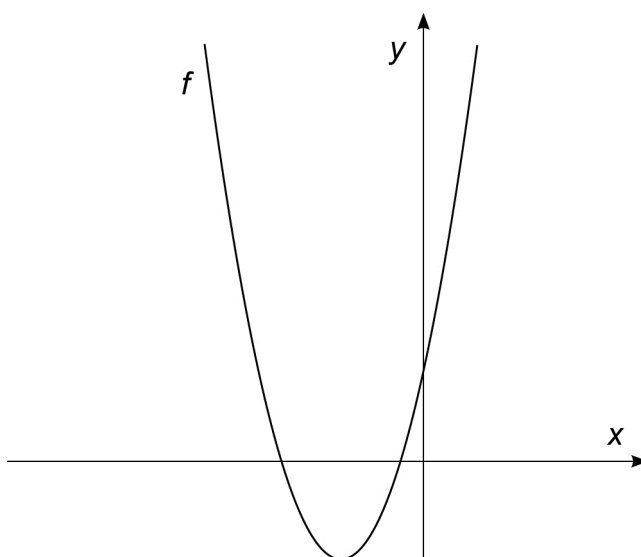
- (A) 2
- (B) 3
- (C) 4
- (D) 5
- (E) 6

25. V osudí sú čierne a biele guľky. Ich celkový počet je 9. Bielych guľiek je viac. Koľko je bielych guľiek v osudí, ak pravdepodobnosť vytiahnutia jednej čiernej a jednej bielej guľky pri náhodnom vytiahnutí dvoch guľiek naraz je 0,5?

- (A) 5
- (B) 6
- (C) 7
- (D) 8
- (E) 9

26. Daná je kvadratická funkcia $f: y = 2x^2 + bx + 8$, kde b je prirodzené číslo. Určte najmenšie číslo b , pre ktoré vrchol paraboly (grafu funkcie f) bude ležať pod osou x (pozrite obrázok).

- (A) 6
- (B) 7
- (C) 8
- (D) 9
- (E) 10

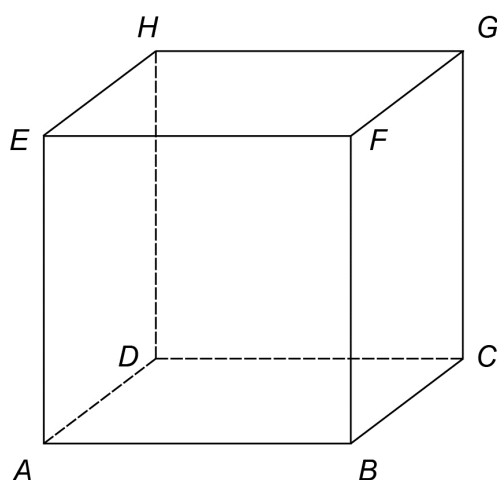


27. Rozhodnite o vzájomnej polohe priamky p : $x + 2 = 0$ a kružnice

$$k: x^2 + y^2 - 10x + 2y + 17 = 0.$$

- (A) Priamka p je nesečnica kružnice k .
- (B) Priamka p je dotyčnica kružnice k , rovnobežná s osou x .
- (C) Priamka p je dotyčnica kružnice k , rovnobežná s osou y .
- (D) Priamka p je sečnica kružnice k , rovnobežná s osou x .
- (E) Priamka p je sečnica kružnice k , rovnobežná s osou y .

28. Daná je kocka $ABCDEFGH$ (pozrite obrázok). Ktorý z nasledujúcich výrokov je nepravdivý?

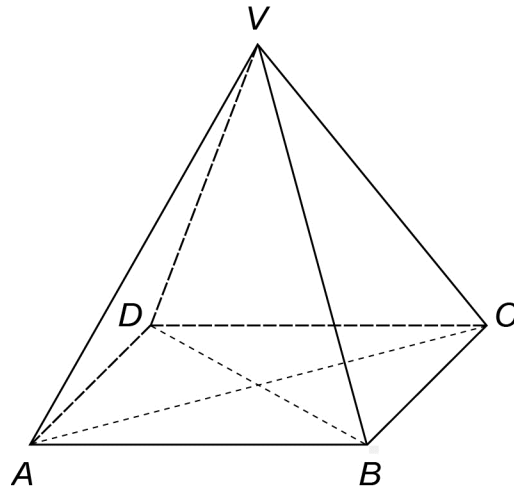


- (A) Veľkosť uhla úsečky AH a úsečky HC je 60° .
- (B) Úsečky BC a HC sú navzájom kolmé.
- (C) Priamky AE a CG sú navzájom rovnobežné.
- (D) Priamky EF a DH sú navzájom rovnobežné.
- (E) Veľkosť uhla roviny HAB a roviny ABC je 45° .

29. Na prijímacej skúške na vysokú školu sú štyri príklady. Za riešenie každého príkladu je možné získať 0, 1, 2, 3 alebo 4 body. Na úspešné zvládnutie prijímacej skúšky treba dosiahnuť aspoň 14 bodov. Koľko je rôznych možností bodového hodnotenia jednotlivých úloh, ktorými žiak môže úspešne zvládnuť túto prijímaciu skúšku?

- (A) 9
- (B) 11
- (C) 12
- (D) 15
- (E) 17

30. V pravidelnom štvorbokom ihlane $ABCDV$ (pozrite obrázok) je veľkosť uhla (odchýlky) roviny bočnej steny a roviny podstavy 45° . Pomer dĺžky hrany podstavy a výšky ihlana je:



- (A) $1 : 1$
- (B) $2 : 1$
- (C) $\sqrt{2} : 2$
- (D) $1 : 2$
- (E) $2 : \sqrt{2}$