



NÁRODNÝ ÚSTAV CERTIFIKOVANÝCH  
MERANÍ VZDELÁVANIA

## **Maturitná skúška 2012**

### **Správa o výsledkoch externej časti maturitnej skúšky**

### **z matematiky**

Mgr. Zuzana Juščáková, PhD.  
Mgr. Pavol Kelecsényi

**Bratislava 2012**

## OBSAH

|                                                                                   |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>ÚVOD</b> .....                                                                 | 4   |
| <b>1 CHARAKTERISTIKA TESTU EČ MS Z MATEMATIKY A TESTOVANÍ ŽIACI</b> .....         | 5   |
| 1.1 Charakteristika testu EČ MS z matematiky .....                                | 5   |
| 1.2 Testovaní žiaci .....                                                         | 6   |
| <b>2 VÝSLEDKY TESTU EČ MS Z MATEMATIKY</b> .....                                  | 8   |
| 2.1 Všeobecné výsledky podľa vyhodnotenia CTT .....                               | 8   |
| 2.2 Všeobecné výsledky podľa vyhodnotenia IRT .....                               | 10  |
| 2.3 Rozdiely vo výsledkoch .....                                                  | 13  |
| <b>3 INTERPRETÁCIA VÝSLEDKOV POLOŽIEK TESTU EČ MS Z MATEMATIKY</b> .....          | 19  |
| 3.1 Porovnanie variantov testu .....                                              | 19  |
| 3.2 Úspešnosť a obťažnosť položiek .....                                          | 19  |
| 3.2.1 Úspešnosť a obťažnosť položiek podľa tematického celku .....                | 20  |
| 3.2.2 Úspešnosť a obťažnosť položiek podľa náročnosti myšlienkovej operácie ..... | 22  |
| 3.2.3 Úspešnosť a obťažnosť položiek podľa druhu školy .....                      | 23  |
| 3.2.4 Úspešnosť a obťažnosť položiek podľa pohlavia .....                         | 23  |
| 3.3 Korelácia položiek so zvyškom testu .....                                     | 24  |
| 3.4 Distribúcia úspešností a citlivosť položiek .....                             | 26  |
| 3.5 Neriešenosť položiek .....                                                    | 26  |
| 3.6 Súhrnné charakteristiky položiek .....                                        | 27  |
| <b>ZÁVER</b> .....                                                                | 99  |
| <b>LITERATÚRA</b> .....                                                           | 101 |
| <b>PRÍLOHA – VYSVETLENIE NIEKTORÝCH POUŽITÝCH POJMOV</b> .....                    | 102 |

## Vysvetlivky

|                   |                                                                                       |
|-------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| MS                | – maturitná skúška                                                                    |
| EČ MS             | – externá časť maturitnej skúšky                                                      |
| PFIČ MS           | – písomná forma internej časti maturitnej skúšky                                      |
| ÚFIČ MS           | – ústna forma internej časti maturitnej skúšky                                        |
| GYM               | – gymnáziá                                                                            |
| SOŠ               | – stredné odborné školy                                                               |
| ÚKO               | – úloha s krátkou odpoveďou (otvorená), hodnotí sa výsledok riešenia                  |
| ÚVO               | – úloha s výberom odpovede (uzavretá) z piatich možností                              |
| BA                | – Bratislavský kraj                                                                   |
| TT                | – Trnavský kraj                                                                       |
| TN                | – Trenčiansky kraj                                                                    |
| NR                | – Nitriansky kraj                                                                     |
| ZA                | – Žilinský kraj                                                                       |
| BB                | – Banskobystrický kraj                                                                |
| PO                | – Prešovský kraj                                                                      |
| KE                | – Košický kraj                                                                        |
| N                 | – veľkosť štatistického súboru, počet žiakov                                          |
| Sig.              | – obojstranná signifikancia, štatistická významnosť                                   |
| <i>P. Bis.</i>    | – Point Biserial, parameter medzipoložkovej korelácie                                 |
| r                 | – korelačný koeficient, koeficient vecnej významnosti (signifikancie)                 |
| CTT               | – klasická štatistická metóda (classical test theory)                                 |
| IRT               | – teória odpovede na položku (item response theory)                                   |
| MAT12             | – označenie testu z matematiky                                                        |
| položka (testová) | – príklad, úloha, otázka v teste určená na riešenie a hodnotená (0, 1) v hrubom skóre |

## Úvod

Dňa 15. marca 2012 sa konala externá časť maturitnej skúšky z matematiky.

Cieľom EČ MS je overiť a zhodnotiť tie vedomosti a zručnosti maturantov, ktoré nie je možné overiť v dostatočnej miere v ústnej forme internej časti maturitnej skúšky. Vysoká objektivita a validita skúšky zaručujú porovnateľnosť výsledkov žiakov z celého Slovenska.

Správa dokladuje korektnosť a exaktnosť EČ MS z matematiky a spracovania jej výsledkov.

V prvej časti správy opisujeme vstupy, uvádzame charakteristiky testu a kvantifikujeme štatistický súbor obsahujúci maturujúcich žiakov. Údaje o počte žiakov sú členené z hľadiska územného, zriaďovateľa školy, druhu školy, pohlavia a známky z matematiky na poslednom vysvedčení.

V ďalšej časti prezentujeme kvalitatívne znaky testu a možné faktory rozdielnosti výkonov žiakov v EČ MS prostredníctvom štatistických výsledkov spracovaných podľa vybraných triediacich znakov. Interpretujeme výsledky vyhodnotenia testu získané klasickou štatistickou metódou (classical test theory CTT) aj prostredníctvom teórie odpovede na položku (item response theory IRT). Vysvetlenie týchto štatistických metód nájdete v prílohe –Vysvetlenie niektorých použitých pojmov.

V tretej časti prinášame výsledky štatistických meraní jednotlivých položiek testu. Opisujeme úspešnosť položiek podľa tematických celkov, náročnosti myšlienkovej operácie potrebnej na vyriešenie položky, druhu školy a pohlavia, koreláciu položiek so zvyškom testu, rozlišovaciu silu a stupeň neriešenosti položiek. Na konci tejto časti predkladáme súhrnné charakteristiky jednotlivých položiek a ich interpretáciu.

V závere sumarizujeme štatistické zistenia smerované k hodnoteniu výkonov populačného ročníka a k overeniu meracieho nástroja, prípadne identifikujeme jeho slabiny v záujme budúceho skvalitnenia tvorby testov.

Informácie, ktoré správa prináša, sú určené predovšetkým pedagogickej verejnosti, ale aj tvorcom testov, didaktikom matematiky a kompetentným pracovníkom v problematike hodnotenia výsledkov vzdelávania.

Stručné vysvetlenie niektorých odborných pojmov, štatistických postupov a vzťahov používaných v tejto správe uvádzame v prílohe.

Variant vyhodnoteného testu a Kľúč správnych odpovedí sú uverejnené na [www.nucem.sk](http://www.nucem.sk).

# 1 Charakteristika testu EČ MS z matematiky a testovaní žiaci

## 1.1 Charakteristika testu EČ MS z matematiky

Maturitnú skúšku legislatívne upravuje zákon č. 245/2008 Z. z. a vyhláška č. 318/2008 Z. z. v znení vyhlášky č. 209/2011 Z. z., podľa ktorých žiaci všetkých druhov škôl absolvovali maturitnú skúšku z matematiky na jednej úrovni.

Test EČ MS z matematiky bol určený maturantom všetkých stredných škôl. Obsahoval 30 úloh, ktoré vychádzali z Cieľových požiadaviek na vedomosti a zručnosti maturantov z matematiky. Tematický celok Základy matematiky bol v teste zastúpený ôsmimi úlohami, tematické celky Funkcie a Planimetria boli v teste zastúpené každý siedmimi úlohami, celky Stereometria a Kombinatorika, pravdepodobnosť a štatistika každý štyrmi úlohami.

Prvých dvadsať úloh bolo otvorených s krátkou odpoveďou. Žiaci mali vypočítať výsledok úlohy a uviesť ho v tvare presného desatinného čísla alebo zaokrúhleného podľa pokynov zadania. Posledných desať úloh bolo uzavretých s výberom odpovede. V každej úlohe mohli žiaci vybrať z piatich možností, z ktorých práve jedna bola správna.

Podľa náročnosti myšlienkovej operácie, ktorú musel žiak zvládnuť na vyriešenie úlohy, boli položky v teste rozdelené do nasledovných skupín kognitívnej náročnosti:

1. úlohy vyžadujúce jednoduché myšlienkové operácie (úlohy na reprodukciu a porozumenie) – overenie znalosti pojmov, porozumenie, priradovanie, zoraďovanie, triedenie, porovnávanie, jednoduchá aplikácia,
2. úlohy vyžadujúce zložitejšie myšlienkové operácie (úlohy na aplikáciu poznatkov) – analýza, syntéza, indukcia, dedukcia, vysvetľovanie, hodnotenie, dokazovanie, overovanie algoritmov riešenia úloh v kontextoch blízkych alebo podobných školskej praxi,
3. úlohy vyžadujúce tvorivý prístup (problémové úlohy) – tvorba hypotéz, zložitejšia aplikácia, riešenie problémových situácií, objavovanie nových myšlienok a vzťahov, tvorba produktívnych riešení a použitie poznatkov v neobvyklých a neznámych kontextoch.

Z hľadiska predpokladanej obťažnosti test obsahoval osem ľahkých úloh, štrnásť stredne ťažkých a osem náročných úloh.

Úlohy testu bolo možné riešiť pomocou bežných písacích potrieb a kalkulačky, ktorá umožňovala obvyklé operácie a výpočet hodnôt funkcií. Nebolo dovolené používať

kalkulačku, ktorá mala základné štatistické vybavenie alebo grafický displej. Žiaci mohli použiť aj prehľad základných matematických vzťahov uvedený na poslednom liste testu. V porovnaní s uplynulými rokmi zostal nezmenený, napriek tomu, že obsahoval aj vzťahy, ktoré podľa Cieľových požiadaviek na vedomosti a zručnosti maturantov z matematiky žiaci nemusia ovládať. Poznajú ich však z hodín matematiky a mohli ich využiť pri riešení niektorých príkladov v teste.

Žiaci mali na vyriešenie úloh testu 120 minút. Za každú správnu odpoveď získali 1 bod, bez ohľadu na obťažnosť úlohy, za nesprávnu alebo neuvedenú odpoveď získali 0 bodov.

Pripravené boli dva varianty testu, ktoré sa líšili poradím položiek a distraktorov. Výtlačok testu obsahoval čiarový kód a úzky pásik geometrických vzorov, osobitý pre každý jednotlivý test. Zadania testu boli preložené do maďarského jazyka pre žiakov škôl s vyučovacím jazykom maďarským. Zdravotne znevýhodnení žiaci riešili test s graficky alebo obsahovo upraveným zadáním.

## 1.2 Testovaní žiaci

V nasledujúcej tabuľke uvádzame počet škôl a žiakov zapojených do EČ MS 2012 z matematiky triedený podľa kraja, zriaďovateľa a druhu školy.

Tab. 1 Počet škôl a žiakov podľa kraja, zriaďovateľa a druhu školy v MAT12

|             |                | Školy |       | Žiaci |       |
|-------------|----------------|-------|-------|-------|-------|
|             |                | počet | %     | počet | %     |
| Kraj        | BA             | 51    | 12,3  | 1 231 | 14,1  |
|             | TT             | 35    | 8,5   | 666   | 7,6   |
|             | TN             | 41    | 9,9   | 912   | 10,4  |
|             | NR             | 50    | 12,1  | 903   | 10,3  |
|             | ZA             | 58    | 14,1  | 1 537 | 17,6  |
|             | BB             | 58    | 14,1  | 998   | 11,4  |
|             | PO             | 65    | 15,7  | 1 329 | 15,2  |
|             | KE             | 55    | 13,3  | 1 177 | 13,4  |
|             | spolu          | 413   | 100,0 | 8 753 | 100,0 |
| Zriaďovateľ | štátne školy   | 316   | 76,5  | 7 726 | 88,3  |
|             | súkromné školy | 41    | 9,9   | 274   | 3,1   |
|             | cirkevné školy | 56    | 13,6  | 753   | 8,6   |
|             | spolu          | 413   | 100,0 | 8 753 | 100,0 |
| Druh školy  | GYM            | 236   | 57,1  | 5 619 | 64,2  |
|             | SOŠ            | 177   | 42,9  | 3 134 | 35,8  |
|             | spolu          | 413   | 100,0 | 8 753 | 100,0 |

EČ MS z matematiky (test MAT12) v školskom roku 2011/2012 vykonal 8 753 žiakov zo 413 škôl. Najpočetnejšou skupinou boli štátne školy a gymnáziá. Rozdelenie žiakov do škôl podľa zriaďovateľa nebolo rovnomerné, žiaci súkromných a cirkevných škôl tvorili z celkového počtu maturantov iba 11,7 %. V súkromných a cirkevných školách sa testovania zúčastnilo v priemere menej žiakov v prepočte na školu ako v štátnych školách, čo súvisí s počtom tried a žiakov v triedach v týchto školách.

EČ MS z matematiky nekonal žiadny žiak konzervatória. Približne tretina maturujúcich žiakov boli žiaci SOŠ, ktorí konali maturitnú skúšku z matematiky ako dobrovoľný predmet. Cieľové požiadavky na vedomosti a zručnosti maturantov z matematiky, z ktorých vychádzajú úlohy testu, sú pre žiakov všetkých druhov škôl rovnaké. Možnosti prípravy na maturitnú skúšku žiakov GYM a SOŠ však nie sú porovnateľné, vyplývajú z rozdielneho počtu hodín matematiky v učebnom pláne, rozsahu učiva v tematických celkoch a možnosti výberu voliteľných predmetov v maturitnom ročníku. Týmto skutočnostiam sme museli prispôbiť zadania úloh testu.

V ďalšej tabuľke je uvedený počet žiakov zapojených do EČ MS 2012 z matematiky triedený podľa pohlavia, známky z matematiky na poslednom vysvedčení a variantu riešeného testu.

Tab. 2 Počet žiakov podľa pohlavia, známky z matematiky a variantu testu MAT12

|                     |           | Počet | %     |
|---------------------|-----------|-------|-------|
| Pohlavie            | chlapci   | 5 744 | 65,6  |
|                     | dievčatá  | 3 009 | 34,4  |
|                     | spolu     | 8 753 | 100,0 |
| Známka z matematiky | 1         | 3 222 | 36,8  |
|                     | 2         | 2 822 | 32,2  |
|                     | 3         | 2 013 | 23,0  |
|                     | 4         | 636   | 7,3   |
|                     | 5         | 49    | 0,6   |
|                     | neuvedená | 11    | 0,1   |
|                     | spolu     | 8 753 | 100,0 |
| Variant             | 6306      | 4 384 | 50,1  |
|                     | 6903      | 4 369 | 49,9  |
|                     | spolu     | 8 753 | 100,0 |

Počet a zastúpenie škôl a žiakov sa v posledných rokoch takmer nemení. Pozorujeme iba mierny pokles celkového počtu žiakov maturujúcich z matematiky (súvisí s poklesom celkového počtu maturujúcich žiakov), rast podielu maturujúcich žiakov SOŠ (o 1,7 %) a zvyšovanie prevahy počtu maturujúcich chlapcov nad dievčatami (o 2,5 %). Podiel maturantov z matematiky k celkovému

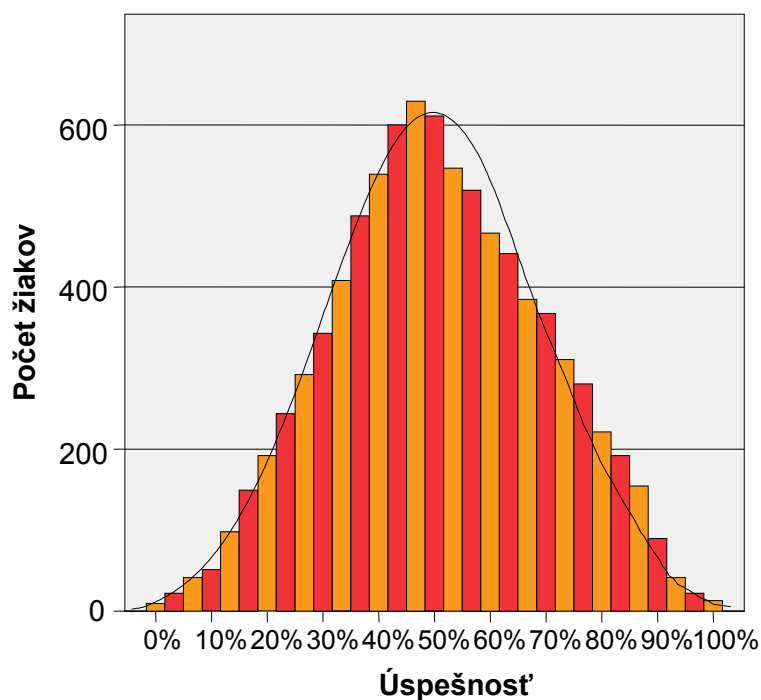
## 2 Výsledky testu EČ MS z matematiky

### 2.1 Všeobecné výsledky podľa vyhodnotenia CTT

V nasledujúcich tabuľkách a grafoch uvádzame kvalitatívne znaky testu a úspešnosti žiakov.

Tab. 3 Výsledné psychometrické charakteristiky testu MAT12 (podľa CTT)

|                                                                |         |
|----------------------------------------------------------------|---------|
| Počet testovaných žiakov                                       | 8 753   |
| Maximum                                                        | 100,0 % |
| Minimum                                                        | 0,0 %   |
| Priemer                                                        | 50,8 %  |
| Štandardná odchýlka                                            | 18,9 %  |
| Intervalový odhad úspešnosti populácie – dolná hranica         | 13,8 %  |
| Intervalový odhad úspešnosti populácie – horná hranica         | 87,9 %  |
| Štandardná chyba priemernej úspešnosti                         | 0,2 %   |
| Interval spoľahlivosti pre priemernú úspešnosť – dolná hranica | 50,4 %  |
| Interval spoľahlivosti pre priemernú úspešnosť – horná hranica | 51,2 %  |
| Štandardná chyba merania pre úspešnosť                         | 7,5 %   |
| Intervalový odhad úspešnosti individuálneho žiaka              | 14,8 %  |
| Cronbachovo alfa                                               | 0,84    |



Obr. 1 Výsledný histogram rozloženia početností percentuálnych úspešností v MAT12

Priemerná úspešnosť žiakov v teste MAT12 (50,8 %) a normálny tvar histogramu rozloženia početností úspešností žiakov (Obr. 1) poukazujú na primeranú náročnosť testu pre testovaných žiakov. Približne dve tretiny maturantov z matematiky dosiahlo úspešnosť v intervale od 31,9 % do 69,7 %. Podľa intervalového odhadu úspešnosti 95 % testovaných žiakov dosiahlo úspešnosť medzi 13,8 % a 87,9 %. Spoľahlivosť merania (reliabilita testu) určená hodnotou Cronbachovho alfa 0,84 je pre test s tridsiatimi položkami veľmi dobrá. Minulý školský rok dosiahla reliabilita testu rovnakú hodnotu, zatiaľ najvyššia bola v roku 2007 s hodnotou 0,87.

Najnižšiu úspešnosť 0,0 % dosiahlo 8 žiakov, najvyššiu úspešnosť 100,0 % dosiahlo 11 žiakov (Tab. 4). Najúspešnejšiu skupinu žiakov, ktorí dosiahli úspešnosť 90,0 % a viac, tvorilo 177 žiakov, čo boli 2,0 % všetkých žiakov. Menej úspešná polovica žiakov (percentil 50,0 a menej) dosiahla úspešnosť 50,0 % alebo nižšiu a bola rozdelená do 16 skupín. Úspešnejšia polovica žiakov dosiahla úspešnosť 53,3 % a vyššiu a rozdelila sa do 15 skupín. Test MAT12 teda rovnako dobre rozlíšil celkove menej úspešných žiakov aj žiakov úspešnejších.

V EČ MS z matematiky neuspelo 1 400 žiakov (dosiahli úspešnosť nižšiu ako 33,0 %), čo predstavuje 16,0 % všetkých žiakov. Ich rozdelenie podľa druhu školy a pohlavia uvádza Tab. 5. V porovnaní s minulým školským rokom sa zväčšil podiel žiakov GYM (o 9,1 %).

Tab. 4 Prepojenie úspešnosti a percentilu MAT12

| Počet bodov | Úspešnosť % | Percentil | Počet žiakov | Počet bodov | Úspešnosť % | Percentil | Počet žiakov |
|-------------|-------------|-----------|--------------|-------------|-------------|-----------|--------------|
| 0           | 0,0         | 0,0       | 8            |             |             |           |              |
| 1           | 3,3         | 0,1       | 20           | 16          | 53,3        | 53,4      | 545          |
| 2           | 6,7         | 0,3       | 41           | 17          | 56,7        | 59,7      | 521          |
| 3           | 10,0        | 0,8       | 44           | 18          | 60,0        | 65,6      | 479          |
| 4           | 13,3        | 1,3       | 99           | 19          | 63,3        | 71,1      | 447          |
| 5           | 16,7        | 2,4       | 144          | 20          | 66,7        | 76,2      | 381          |
| 6           | 20,0        | 4,1       | 192          | 21          | 70,0        | 80,5      | 361          |
| 7           | 23,3        | 6,3       | 234          | 22          | 73,3        | 84,7      | 315          |
| 8           | 26,7        | 8,9       | 284          | 23          | 76,7        | 88,3      | 285          |
| 9           | 30,0        | 12,2      | 334          | 24          | 80,0        | 91,5      | 229          |
| 10          | 33,3        | 16,0      | 406          | 25          | 83,3        | 94,1      | 185          |
| 11          | 36,7        | 20,6      | 485          | 26          | 86,7        | 96,3      | 151          |
| 12          | 40,0        | 26,2      | 540          | 27          | 90,0        | 98,0      | 92           |
| 13          | 43,3        | 32,3      | 603          | 28          | 93,3        | 99,0      | 48           |
| 14          | 46,7        | 39,2      | 631          | 29          | 96,7        | 99,6      | 26           |
| 15          | 50,0        | 46,4      | 612          | 30          | 100,0       | 99,9      | 11           |

Tab. 5 Rozdelenie žiakov s úspešnosťou menšou ako 33,0 % v MAT12

|            |     | chlapci |      | dievčatá |      | spolu |       |
|------------|-----|---------|------|----------|------|-------|-------|
|            |     | počet   | %    | počet    | %    | počet | %     |
| Druh školy | GYM | 220     | 15,7 | 201      | 14,4 | 421   | 30,1  |
|            | SOŠ | 707     | 50,5 | 272      | 19,4 | 979   | 69,9  |
| spolu      |     | 927     | 66,2 | 473      | 33,8 | 1 400 | 100,0 |

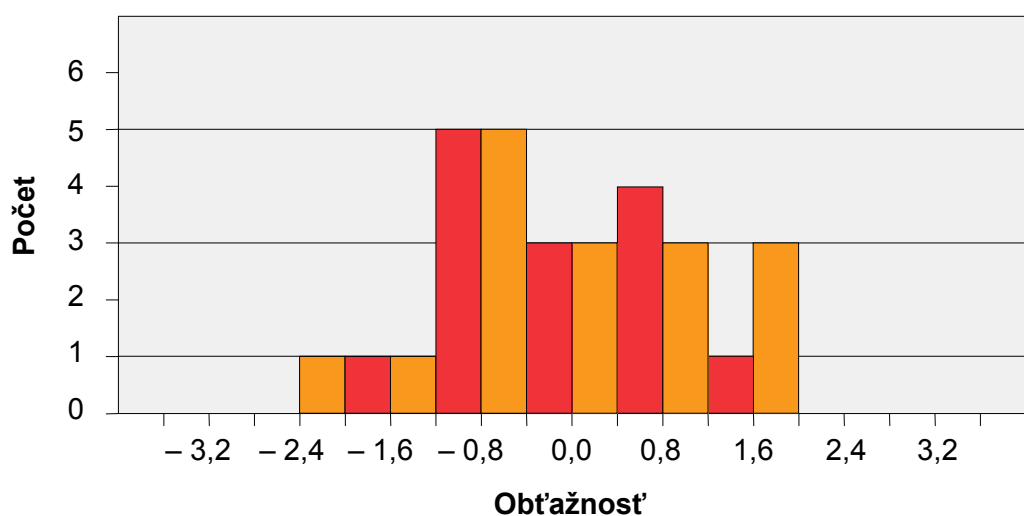
Úspešnosť nižšiu ako 33,0 % dosiahlo 7,5 % maturujúcich žiakov GYM a 31,3 % maturujúcich žiakov SOŠ. Podľa legislatívy platnej od školského roka 2012/2013 žiak maturujúci z matematiky (s výnimkou dobrovoľnej maturitnej skúšky) úspešne zmaturovuje z matematiky iba vtedy, ak v EČ MS dosiahne úspešnosť aspoň 25,0 %. V tomto školskom roku by túto podmienku nesplnilo 782 žiakov, čo predstavuje 8,9 % všetkých maturantov z matematiky.

## 2.2 Všeobecné výsledky podľa vyhodnotenia IRT

V nasledujúcej tabuľke a grafoch uvádzame charakteristiky testu a testovaných žiakov.

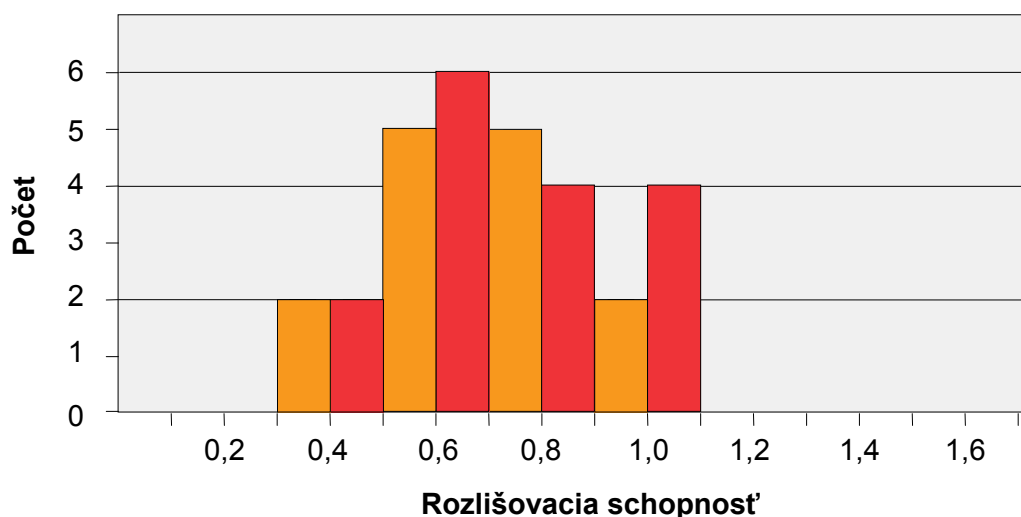
Tab. 6 Výsledné psychometrické charakteristiky položiek testu MAT12 (podľa IRT)

|                                 | Maximum | Minimum | Priemer | Smerodajná odchýlka |
|---------------------------------|---------|---------|---------|---------------------|
| Obťažnosť položiek              | 1,957   | – 2,044 | – 0,031 | 1,085               |
| Rozlišovacia schopnosť položiek | 1,097   | 0,378   | 0,721   | 0,200               |



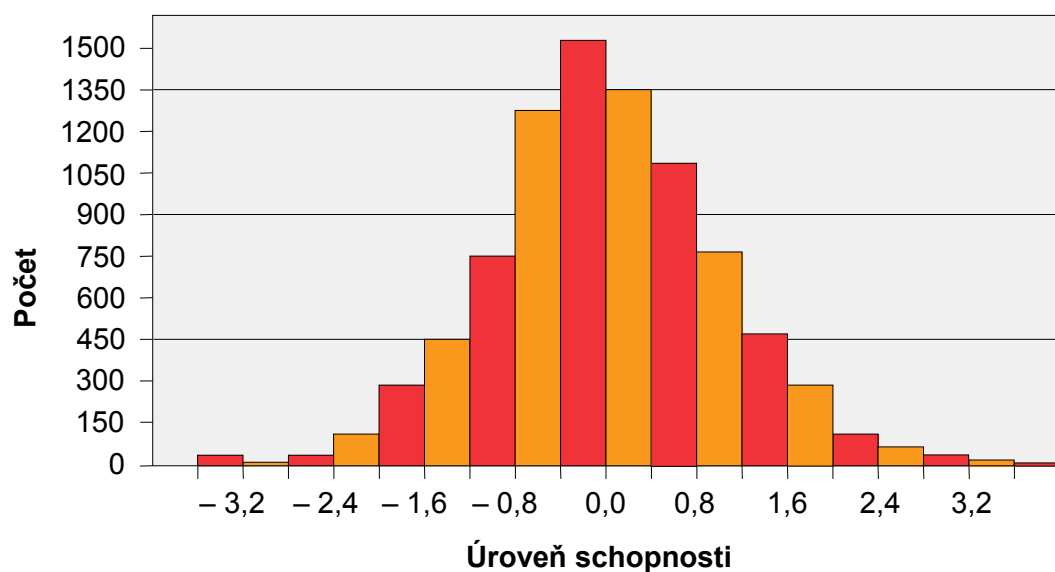
Obr. 2 Počet položiek MAT12 podľa obťažnosti

V MAT12 boli položky z hľadiska obťažnosti zastúpené rovnomerne. Nižší počet najľahších položiek s obťažnosťou v intervale  $\langle -2,4; -1,2 \rangle$  bol vyvážený vyšším počtom mierne obťažnejších položiek s obťažnosťou v intervale  $\langle -1,2; -0,4 \rangle$ . Najľahšie boli položky č. 2, 4 a 24, najobťažnejšími boli položky č. 19, 29 a 30.



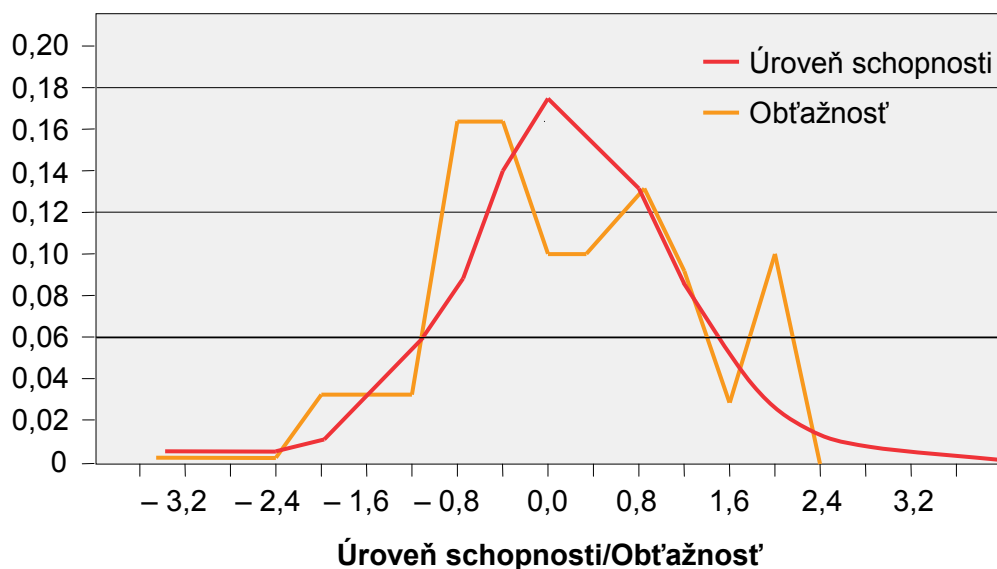
Obr. 3 Počet položiek MAT12 podľa rozlišovacej schopnosti

Rozlišovacia schopnosť položiek bola dobrá. Najslabšiu rozlišovaciu schopnosť mali položky č. 20, 27 a 30, najväčšiu rozlišovaciu silu mali položky č. 3, 7, 8 a 17. V skupine priemerných a najslabších žiakov s úrovňou schopnosti 0 a nižšou bola pravdepodobnosť výberu správnej odpovede rovnako nízka. Až v skupine najlepších žiakov s úrovňou schopnosti 1 a vyššou sa s rastúcou úrovňou schopnosti žiakov začala zvyšovať aj pravdepodobnosť výberu správnej odpovede.



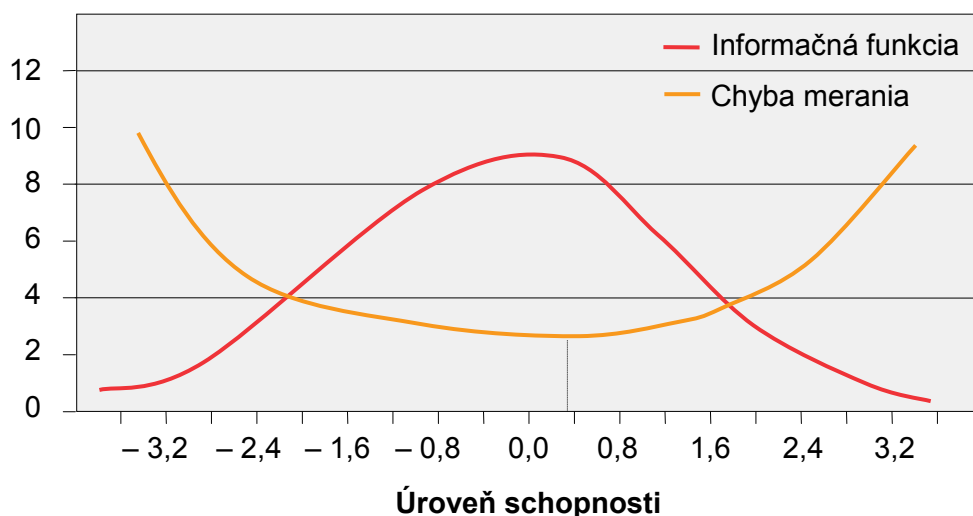
Obr. 4 Počet žiakov v MAT12 podľa úrovne schopnosti

Najpočetnejšou skupinou žiakov podľa úrovne schopnosti boli žiaci s priemernou úrovňou schopnosti okolo hodnoty 0. Počet žiakov s vyššou alebo nižšou úrovňou schopnosti rovnomerne klesal. Približne polovica testovaných žiakov mala úroveň schopnosti v intervale  $(-0,8; 0,4)$ . Môžeme preto predpokladať, že najviac a najpresnejších informácií získame o žiakoch s úrovňou schopnosti z tohto intervalu.



Obr. 5 Vzťah medzi úrovňou schopnosti žiakov a obťažnosťou MAT12

Obťažnosť položiek (náročnosť MAT12) bola primeraná úrovni schopnosti žiakov. Test obsahoval aj veľmi ťažké položky, ale zároveň v skupine testovaných žiakov boli aj veľmi dobrí žiaci s úrovňou schopnosti z intervalu  $(1,6; 2,4)$ , ktorí na tieto položky dokázali správne odpovedať.



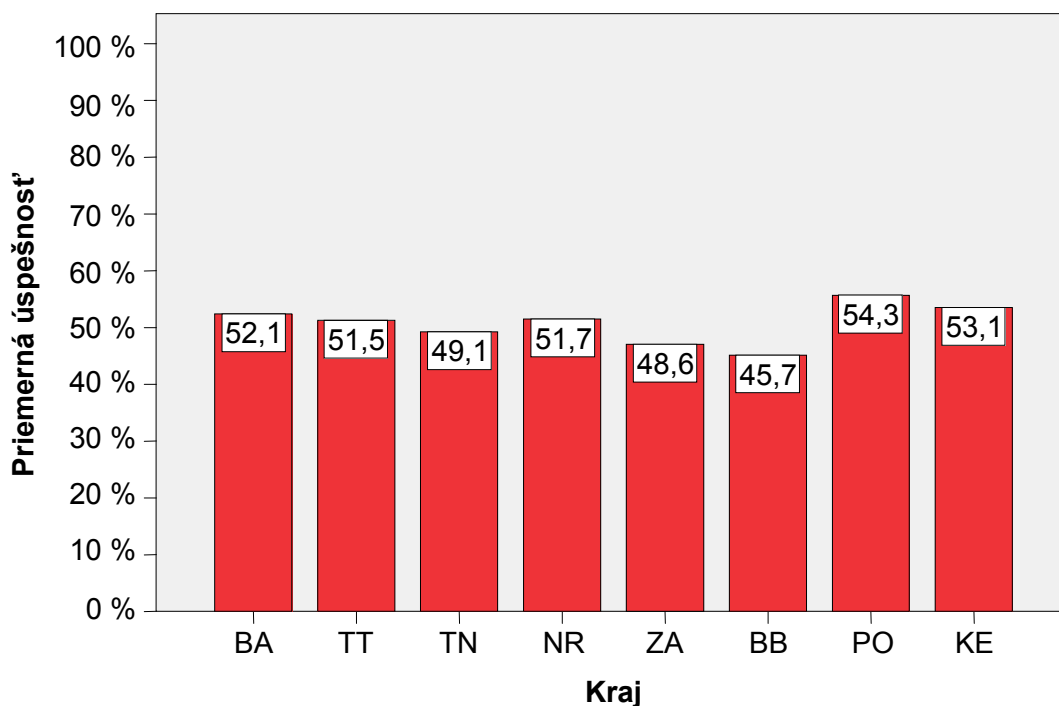
Obr. 6 Informačná funkcia a chyba merania MAT12

Informačná funkcia testu nadobudla najväčšie hodnoty pre úroveň schopnosti žiakov z intervalu  $\langle 0,0; 0,4 \rangle$ , preto test priniesol najviac informácií o mierne nadpriemerných žiakoch. V uvedenom intervale sa nachádzala aj najmenšia chyba merania testu (0,3). Preto údaje získané o žiakoch s mierne nadpriemernou úrovňou schopnosti boli najpresnejšie.

## 2.3 Rozdiely vo výsledkoch

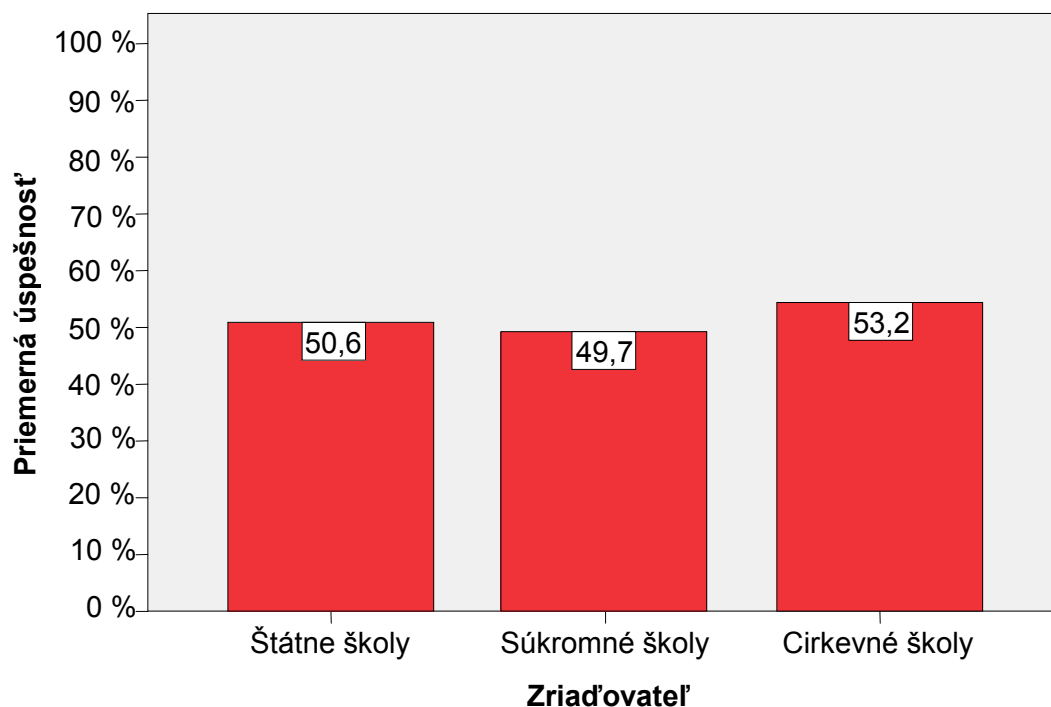
V nasledujúcich grafoch na Obr. 7 – 12 prezentujeme rozdiely v priemernej úspešnosti žiakov podľa jednotlivých kategórií a v Tab. 7 významnosť rozdielu priemerných úspešností žiakov podľa jednotlivých kategórií a národného priemeru.

Rozdiel priemernej úspešnosti žiakov najúspešnejšieho Prešovského kraja (54,3 %) a posledného Banskobystrického kraja (45,7 %) bol len mierne vecne významný. Odlišnosť priemernej úspešnosti žiakov škôl Banskobystrického kraja od národného priemeru bola mierne vecne významná. Konštatujeme, že medzi žiakmi z jednotlivých krajov neboli významné rozdiely v priemernej úspešnosti.



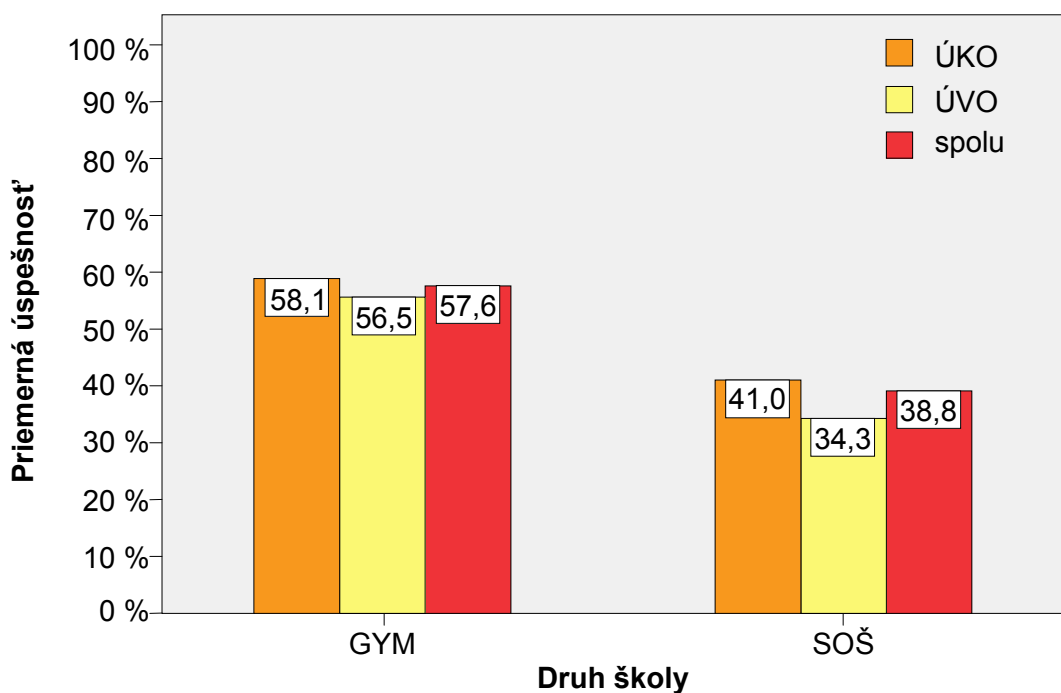
Obr. 7 Priemerná úspešnosť MAT12 podľa kraja

Analýza rozdielov priemerných úspešností žiakov škôl rôznych zriaďovateľov bola ovplyvnená značne nerovnomerným rozdelením počtu žiakov do jednotlivých skupín (Tab. 1). Miera vecnej významnosti rozdielov priemerných úspešností bola zanedbateľná. Nepozorujeme významné rozdiely v priemernej úspešnosti žiakov podľa zriaďovateľa.



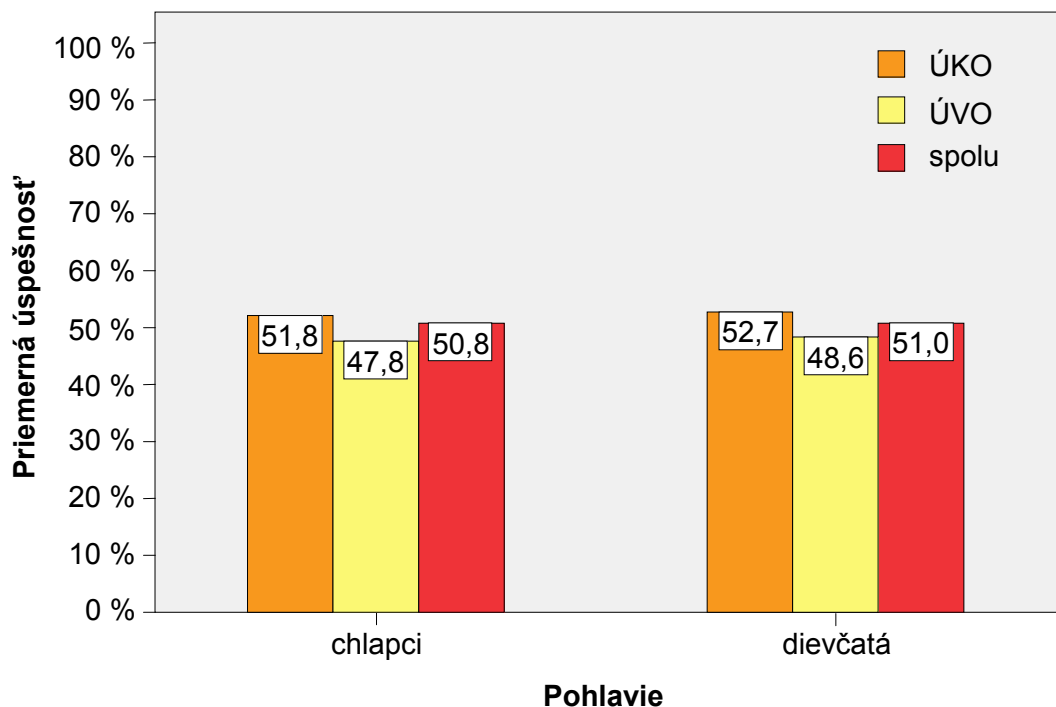
Obr. 8 Priemerná úspešnosť MAT12 podľa zriaďovateľa

Rozdiel v priemernej úspešnosti žiakov GYM (57,6 %) a žiakov SOŠ (38,8 %) bol stredne vecne významný. Slabší priemerný výkon žiakov SOŠ v porovnaní so žiakmi GYM potvrdzuje aj odchýlka priemernej úspešnosti žiakov SOŠ od národného priemeru, ktorá bola silne vecne významná ( $r = 0,63$ ).

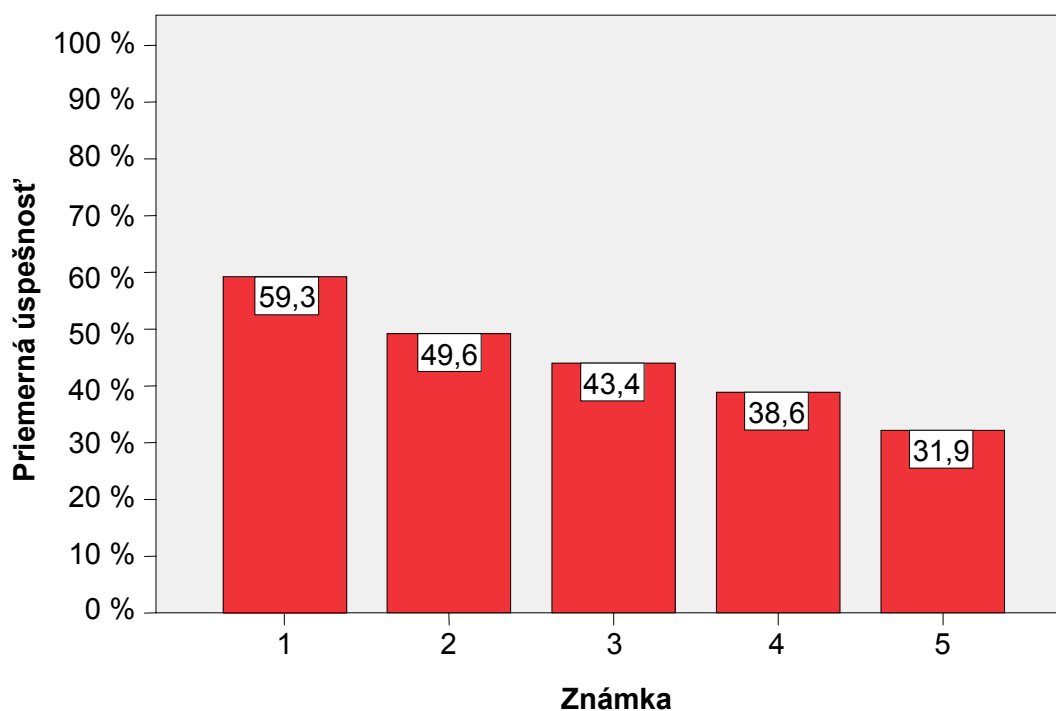


Obr. 9 Priemerná úspešnosť MAT12 podľa druhu školy

Rozdiel priemerných úspešností žiakov podľa pohlavia bol zanedbateľný, priemerné výsledky chlapcov (50,8 %) a dievčat (51,0 %) boli takmer rovnaké, nelíšili sa ani od národného priemeru. Na rozdiel od predchádzajúcich rokov boli dievčatá úspešnejšie než chlapci.

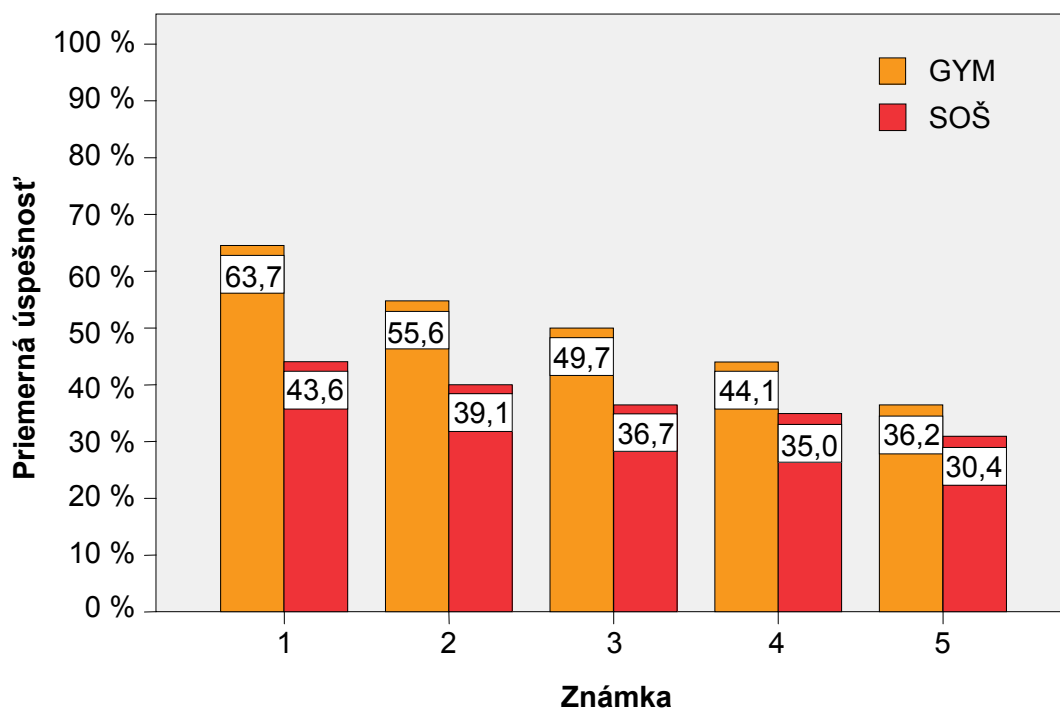


Obr. 10 Priemerná úspešnosť MAT12 podľa pohlavia



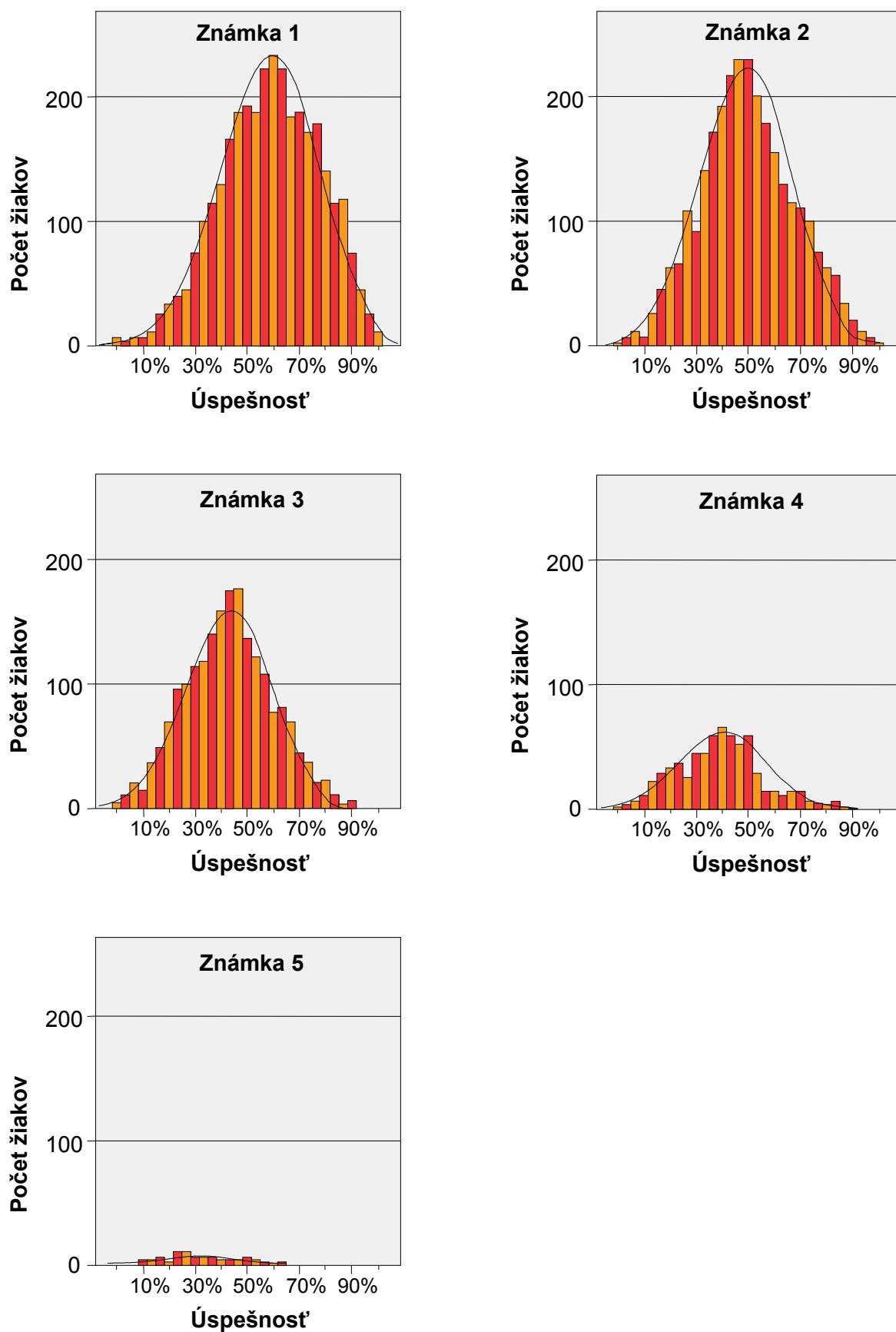
Obr. 11 Priemerná úspešnosť MAT12 podľa polročnej známky z matematiky

Priemerná úspešnosť jednotkárov bola vyššia ako národný priemer, priemerná úspešnosť žiakov s ostatnými známami na polročnom vysvedčení bola nižšia ako národný priemer. Najväčší rozdiel v priemernej úspešnosti žiakov podľa polročnej známky z matematiky sme podľa očakávania zaznamenali medzi žiakmi s hodnotením 1 a 5. Priemerná známka žiakov z matematiky bola 2,02. Korelácia (vzájomný vzťah) medzi známkou a úspešnosťou v MAT12 bola stredná ( $r = 0,379$ ).



Obr. 12 Priemerná úspešnosť MAT12 podľa polročnej známky z matematiky a druhu školy

Priemerná úspešnosť žiakov podľa polročného hodnotenia z matematiky sa značne líšila v závislosti od druhu školy. Žiaci SOŠ dosiahli v porovnaní so žiakmi GYM s rovnakým hodnotením na polročnom vysvedčení nižšiu priemernú úspešnosť. Priemerná úspešnosť každej skupiny žiakov GYM, ešte aj skupiny s polročnou známkou 5, bola vyššia ako hraničná hodnota 33,0 %. Priemerná úspešnosť všetkých žiakov SOŠ, okrem žiakov s hodnotením 5 (čo je iba 1,2 % žiakov SOŠ), bola v úzkom intervale od 43,6 % do 35,0 %. Posledné hodnotenie žiakov SOŠ teda takmer nemalo vplyv na úspešnosť žiakov SOŠ v MAT12. Pre všetky skupiny žiakov SOŠ bol MAT12 takmer rovnako náročný alebo v každej skupine žiakov sa nachádzali žiaci šikovní aj menej šikovní a teda korelácia (vzájomný vzťah) medzi posledným hodnotením žiakov z matematiky a úspešnosťou v MAT12 bola slabá ( $r = 0,198$ ). Úspešnosť žiakov GYM v MAT12 oveľa lepšie zodpovedala predpokladom polročného hodnotenia. Korelácia (vzájomný vzťah) medzi známkou z matematiky a úspešnosťou v MAT12 bola u žiakov GYM vyššia, dosiahla hodnotu  $r = 0,355$ .



Obr. 13 Histogramy rozloženia početností úspešností v MAT12 podľa známky

Veľkú variabilitu úspešnosti žiakov s rovnakým polročným hodnotením z matematiky dokladujú aj histogramy rozloženia početností percentuálnych úspešností podľa známky. Napríklad aj v skupine jednotkárov boli žiaci, ktorí dosiahli úspešnosť nižšiu ako 50 %, dokonca úspešnosť nižšiu ako hraničná hodnota 33 % alebo hodnota 25 %, ktorá bude hraničná od školského roka 2012/2013. Títo jednotkári (ak nekonali maturitnú skúšku z matematiky dobrovoľne), by nevykonali úspešne maturitnú skúšku a EČ MS z matematiky by si museli zopakovať najskôr v riadnom termíne nasledujúceho školského roka.

Vecne významné rozdiely priemerných úspešností podľa polročného hodnotenia od národného priemeru boli veľmi silné a silné v prípade slabšieho výkonu žiakov so známkami 5 a 4, stredné pre horší výkon žiakov s hodnotením 3 a podľa očakávania lepší výkon jednotkárov.

Tab. 7 Významnosť rozdielu priemernej úspešnosti podľa kategórií a národného priemeru MAT12

|             |                | Národný priemer = 50,8 % |                        |                  |
|-------------|----------------|--------------------------|------------------------|------------------|
|             |                | Počet žiakov             | Štatistická významnosť | Vecná významnosť |
| Kraj        | BA             | 1 230                    | 0,014                  | 0,07             |
|             | TT             | 666                      | 0,314                  | 0,04             |
|             | TN             | 912                      | 0,008                  | 0,09             |
|             | NR             | 904                      | 0,168                  | 0,05             |
|             | ZA             | 1 537                    | 0,000                  | 0,12             |
|             | BB             | 998                      | 0,000                  | 0,27             |
|             | PO             | 1 329                    | 0,000                  | 0,18             |
|             | KE             | 1 177                    | 0,000                  | 0,12             |
| Zriaďovateľ | štátne školy   | 7 726                    | 0,469                  | 0,01             |
|             | súkromné školy | 274                      | 0,398                  | 0,05             |
|             | cirkevné školy | 753                      | 0,000                  | 0,14             |
| Druh školy  | GYM            | 5 619                    | 0,000                  | 0,36             |
|             | SOŠ            | 3 134                    | 0,000                  | 0,63             |
| Pohlavie    | chlapci        | 5 744                    | 0,838                  | 0,00             |
|             | dievčatá       | 3 009                    | 0,566                  | 0,01             |
| Známka      | 1              | 3 222                    | 0,000                  | 0,43             |
|             | 2              | 2 822                    | 0,000                  | 0,07             |
|             | 3              | 2 013                    | 0,000                  | 0,41             |
|             | 4              | 636                      | 0,000                  | 0,60             |
|             | 5              | 49                       | 0,000                  | 0,82             |
|             | neuvedená      | 11                       | 0,525                  | 0,20             |

### 3 Interpretácia výsledkov položiek testu EČ MS z matematiky

#### 3.1 Porovnanie variantov testu

Zo štatistických vyhodnotení vyplýva, že administrácia variantov testu 6306 a 6903 bola proporčná zo všetkých hľadísk (kraj, zriaďovateľ, druh školy, pohlavie). Porovnateľné boli aj dosiahnuté priemerné úspešnosti a reliability variantov testu (Cronbachovo alfa).

Tab. 8 Porovnanie variantov testu MAT12

|         |      | Počet administrovaných testov | Priemerná úspešnosť % | Štandardná odchýlka | Cronbachovo alfa |
|---------|------|-------------------------------|-----------------------|---------------------|------------------|
| Variant | 6306 | 4 384                         | 50,8                  | 19,3                | 0,847            |
|         | 6903 | 4 369                         | 50,9                  | 18,5                | 0,835            |

Vecná významnosť rozdielov úspešností položiek podľa variantu testu bola zanedbateľná. Poradie úloh teda nemalo vplyv na úspešnosť ich riešenia a preto považujeme varianty testu MAT12 za ekvivalentné. V nasledujúcich štatistických analýzach, v ktorých sledujeme vlastnosti jednotlivých položiek, sme na štatistické spracovanie použili zástupný variant 6306, ktorému zodpovedá aj číslovanie položiek.

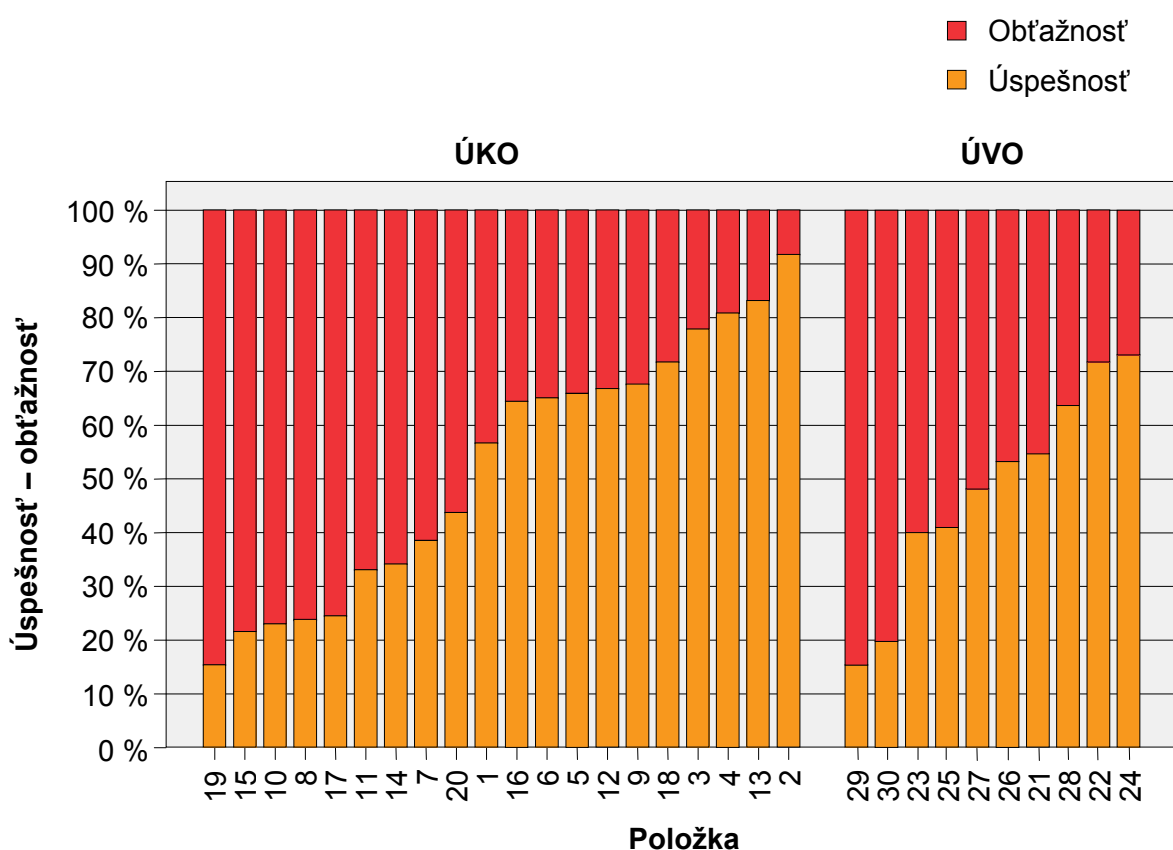
#### 3.2 Úspešnosť a obťažnosť položiek

Podľa žiakmi dosiahnutých percentuálnych hodnôt úspešností položiek test obsahoval jednu extrémne ľahkú úlohu (č. 2), dve veľmi ľahké úlohy (č. 4 a 13), dvadsaťštyri stredne obťažných úloh a tri veľmi obťažné úlohy (č. 19, 29 a 30). Usporiadanie položiek podľa dosiahnutej úspešnosti znázorňuje Obr. 14.

Najúspešnejší boli žiaci v úlohách z rôznych oblastí matematiky, ktorých riešenie sa dalo získať vypísaním možností alebo pokusným dosadením (č. 2 – určiť čísla v danom pomere, č. 3 – nájsť číslo, v ktorom funkcia nadobúda danú hodnotu, č. 4 – zistiť chýbajúce číslice v telefónnom čísle). Úspešní boli žiaci aj pri riešení úloh, v ktorých potrebovali krátky, jednoduchý výpočet (č. 5 – určiť správne poradie pretekára v cieľi pretekov, č. 12 – vypočítať počet detí v rodine, č. 13 – určiť rozdiel výšky snehu v dvoch mestách, č. 18 – zistiť percentuálnu hodnotu zlacnenia lyží, č. 24 – určiť predpis kvadratickej rovnice).

S nižšou úspešnosťou žiaci riešili úlohy z kombinatoriky a pravdepodobnosti v reálnych životných situáciách (č. 11 – určiť pravdepodobnosť výberu účastníka, č. 21 – zistiť pravdepodobnosť vytiahnutia guľôčky), úlohy vyžadujúce si prácu s premennými alebo

parametrom (č. 14 – zistiť hmotnosť predaného hrozna, č. 23 – určiť vyhovujúci polomer kružnice, č. 26 – určiť všeobecnú rovnicu priamky), úlohy z logiky (č. 27 – rozhodnúť o počte pravdivých tvrdení) a úlohy z geometrie, ktorých riešenie vyžadovalo správne analyzovanie obrázka (č. 20 – určiť polomer polkruhu vpísaného do trojuholníka, č. 25 – vybrať stredovo súmerné útvary, č. 28 – zistiť obsah trojuholníka). Najnižšiu úspešnosť žiaci dosiahli v geometrických výpočtových úlohách (č. 8 – vypočítať veľkosť uhla telesových uhlopriečok v hranole, č. 15 – určiť objem ihlana, č. 17 – vypočítať vzdialenosť bodu od priamky v ihlane, č. 30 – určiť obsah podstavy ihlana s využitím podobnosti) a v úlohách využívajúcich grafy funkcií (č. 7 – určiť súradnice vrcholu paraboly, č. 10 – určiť uhol priamky a osi  $y$ , č. 19 – určiť korene goniometrickej rovnice).



Obr. 14 Úspešnosť – obtiažnosť položiek v jednotlivých častiach testu MAT12 – 6306 (položky sú usporiadané vzostupne podľa úspešnosti)

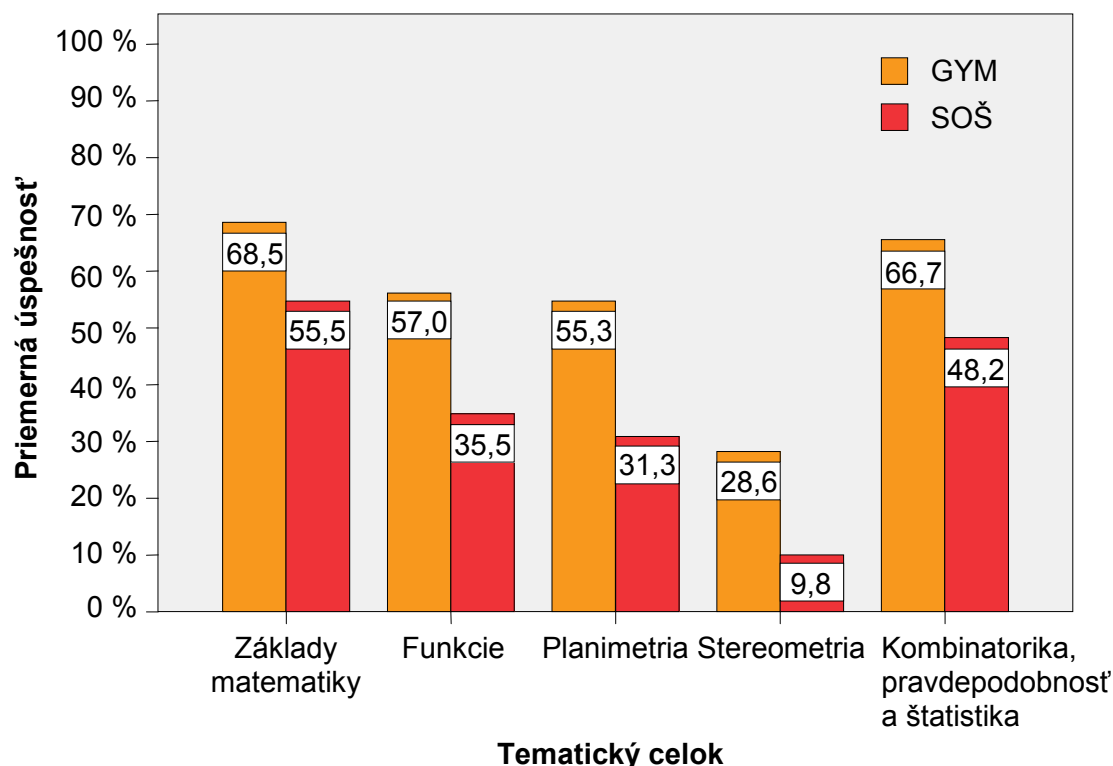
### 3.2.1 Úspešnosť a obtiažnosť položiek podľa tematického celku

V nasledujúcej tabuľke uvádzame rozdelenie úloh podľa tematických celkov. Úlohy, ktorých riešenie si vyžadovalo využitie poznatkov z viacerých tematických celkov, sme zaradili do tematického celku, ktorého poznatky boli rozhodujúce pre úspešné vyriešenie úlohy.

Tab. 9 Rozdelenie položiek testu MAT12 – 6306 podľa tematického celku

| Tematický celok                             | Poradové čísla položiek |                        | Počet |
|---------------------------------------------|-------------------------|------------------------|-------|
| Základy matematiky                          | ÚKO                     | 1, 2, 4, 5, 14, 16, 18 | 8     |
|                                             | ÚVO                     | 27                     |       |
| Funkcie                                     | ÚKO                     | 3, 7, 9, 19            | 7     |
|                                             | ÚVO                     | 22, 24, 29             |       |
| Planimetria                                 | ÚKO                     | 6, 10, 20              | 7     |
|                                             | ÚVO                     | 23, 25, 26, 28         |       |
| Stereometria                                | ÚKO                     | 8, 15, 17              | 4     |
|                                             | ÚVO                     | 30                     |       |
| Kombinatorika, pravdepodobnosť a štatistika | ÚKO                     | 11, 12, 13             | 4     |
|                                             | ÚVO                     | 21                     |       |

Najvyššiu priemernú úspešnosť dosiahli žiaci v tematických celkoch Základy matematiky (63,8 %) a Kombinatorika, pravdepodobnosť a štatistika (60,1 %), nasledovali celky Funkcie (46,7 %), Planimetria (46,7 %) a Stereometria (21,9 %).

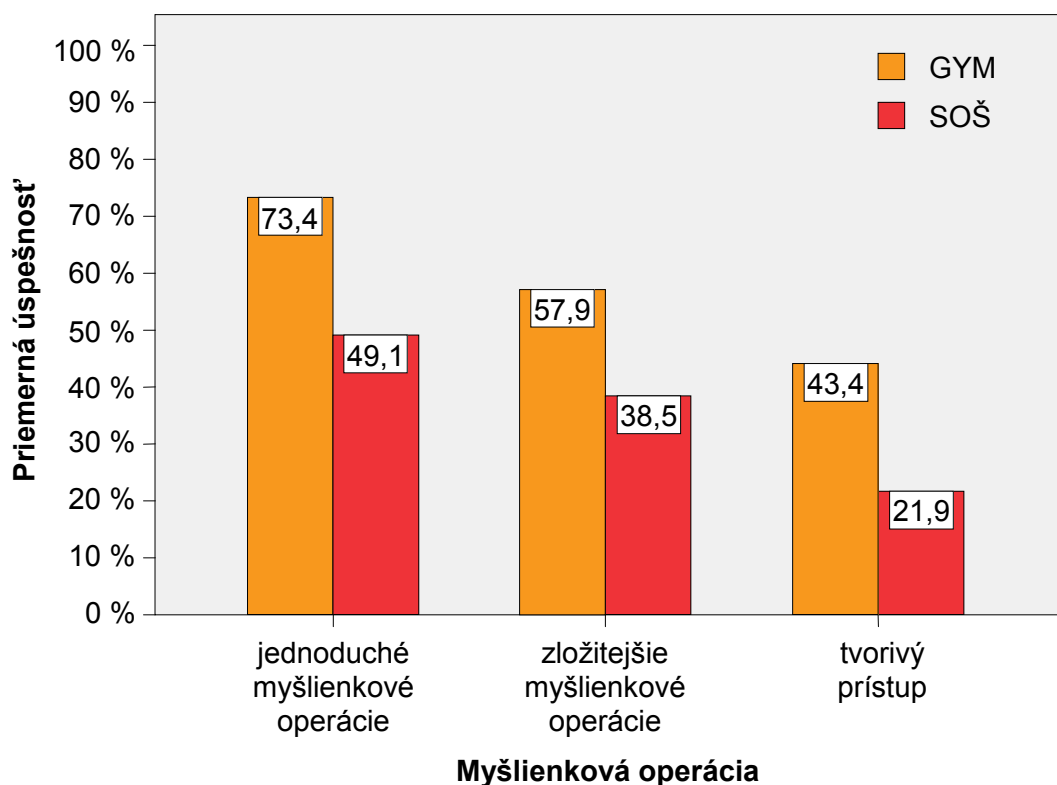


Obr. 15 Priemerná úspešnosť MAT12 – 6306 podľa tematického celku a druhu školy

Žiaci GYM dosiahli lepšie výsledky ako žiaci SOŠ vo všetkých tematických celkoch na úrovni strednej vecnej významnosti rozdielov priemerných úspešností.

### 3.2.2 Úspešnosť a obťažnosť položiek podľa náročnosti myšlienkovej operácie

V teste MAT12 boli podľa predpokladu autorov testu dve položky vyžadujúce jednoduché myšlienkové operácie (č. 2 a 7), dvadsaťsedem položiek vyžadujúcich zložitejšie myšlienkové operácie a jedna položka vyžadujúca tvorivý prístup (č. 19).



Obr. 16 Priemerná úspešnosť MAT12 – 6306 podľa myšlienkovkej operácie a druhu školy

Priemerná úspešnosť žiakov s rastúcou náročnosťou myšlienkových operácií, potrebných na úspešné vyriešenie úlohy, klesala. Vecná významnosť rozdielov priemerných úspešností žiakov GYM a SOŠ, zohľadňujúca nerovnomerné rozdelenie počtu úloh podľa náročnosti myšlienkovkej operácie, bola stredne vecne významná.

Tab. 10 Významnosť rozdielu priemernej úspešnosti podľa myšlienkovkej operácie a druhu školy v MAT12 – 6306

| Myšlienková operácia             | Priemerná úspešnosť celková % | Vecná významnosť rozdielu priemerných úspešností GYM a SOŠ |
|----------------------------------|-------------------------------|------------------------------------------------------------|
| jednoduché myšlienkové operácie  | 64,7                          | 0,392                                                      |
| zložitejšie myšlienkové operácie | 50,9                          | 0,470                                                      |
| tvorivý prístup                  | 35,7                          | 0,306                                                      |

### 3.2.3 Úspešnosť a obtiažnosť položiek podľa druhu školy

Vecná významnosť rozdielov úspešností položiek podľa druhu školy bola stredná (5 položiek), mierna (10 položiek), veľmi mierna (10 položiek) až žiadna (5 položiek). Všetky položky boli pre žiakov SOŠ obtiažnejšie ako pre žiakov GYM, najmä úlohy s premennými a parametrami (č. 1, 3 a 7) a výpočtové úlohy z geometrie (č. 6, 8, 10, 17, 23 a 26). Výber položiek s najväčšou mierou vecnej významnosti rozdielov úspešností podľa druhu školy uvádza nasledujúca tabuľka.

Tab. 11 Úspešnosť položiek MAT12 – 6306 podľa druhu školy, vecná významnosť rozdielov

| Položka | Úspešnosť % |      | Vecná významnosť |
|---------|-------------|------|------------------|
|         | GYM         | SOŠ  |                  |
| 7       | 52,1        | 12,7 | 0,389            |
| 26      | 64,0        | 30,4 | 0,322            |
| 3       | 88,2        | 60,8 | 0,319            |
| 23      | 51,6        | 19,9 | 0,309            |
| 22      | 82,3        | 53,5 | 0,307            |
| 1       | 67,9        | 37,7 | 0,292            |

### 3.2.4 Úspešnosť a obtiažnosť položiek podľa pohlavia

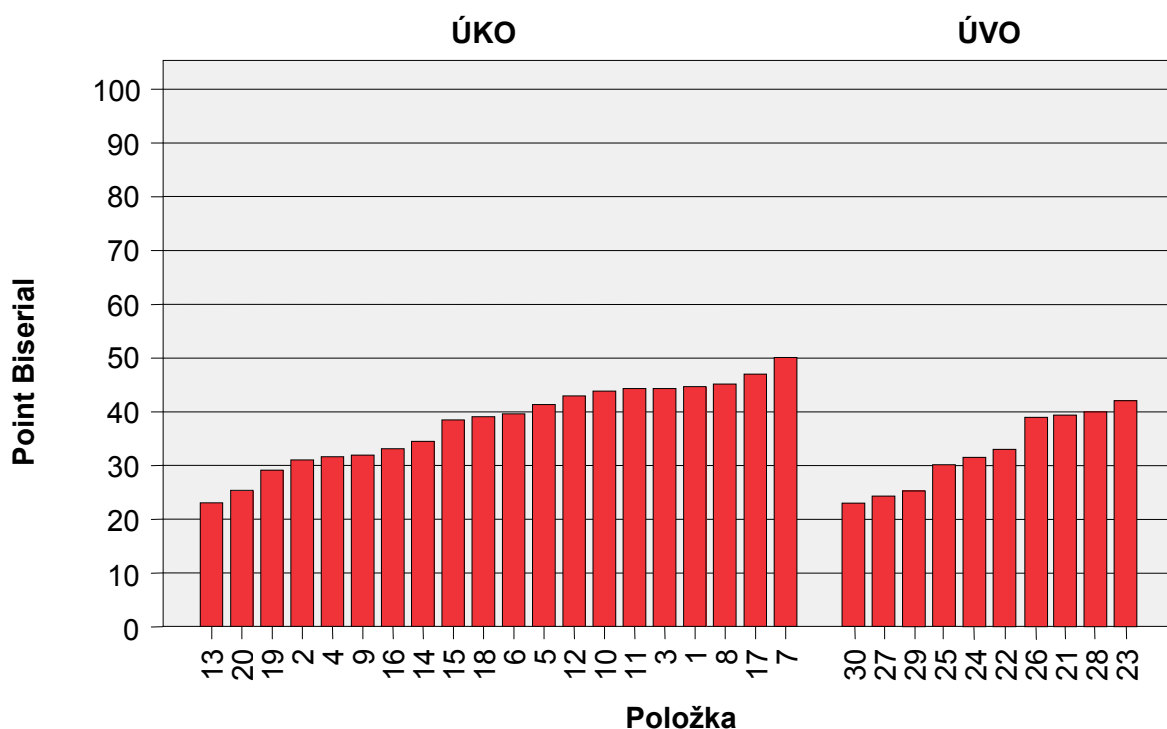
Vecná významnosť rozdielov úspešností položiek podľa pohlavia bola veľmi mierna (3 položky) až žiadna (27 položiek). V šiestnástich položkách dosiahli dievčatá vyššiu úspešnosť ako chlapci, v ostatných položkách boli úspešnejší chlapci. Najväčší rozdiel v úspešnosti podľa pohlavia v prospech dievčat bol v úlohách vyžadujúcich prácu s premennými (č. 3, 7, 24 a 26), v prospech chlapcov bol v úlohách vyžadujúcich si predstavivosť a tvorbu stratégie riešenia (č. 14, 18, 29 a 30). Výber položiek s najväčšou mierou vecnej významnosti rozdielov úspešností podľa pohlavia je zaznamenaný v nasledujúcej tabuľke.

Tab. 12 Úspešnosť položiek MAT12 – 6306 podľa pohlavia a vecná významnosť rozdielov

| Položka | Úspešnosť % |          | Vecná významnosť |
|---------|-------------|----------|------------------|
|         | chlapci     | dievčatá |                  |
| 18      | 75,7        | 65,0     | – 0,114          |
| 29      | 19,7        | 11,5     | – 0,105          |
| 7       | 34,4        | 44,9     | 0,103            |
| 3       | 75,7        | 83,5     | 0,089            |
| 11      | 30,1        | 37,8     | 0,078            |
| 24      | 70,6        | 77,5     | 0,074            |

### 3.3 Korelácia položiek so zvyškom testu

Obr. 17 znázorňuje hodnoty medzipoložkovej korelácie položiek testu vyjadrené stonásobkom koeficientu Point Biserial. Všetky položky dosiahli hodnotu *P. Bis.* vyššiu ako kritická hodnota 20. Desať položiek dosiahlo hodnotu *P. Bis.* vyššiu ako 40, najvyššia bola hodnota 50. Znamená to, že test bol reliabilný a vnútorne konzistentný (položky medzi sebou korelovali). Správne odpovede na položky s najvyššou hodnotou *P. Bis.* uvádzali väčšinou žiaci v teste celkove úspešnejší a naopak, úspešnosť žiaka v týchto položkách podmieňovala celkovú úspešnosť žiaka v teste.



Obr. 17 Point Biserial položiek v jednotlivých častiach testu MAT12 – 6306 (položky sú usporiadané vzostupne podľa stonásobku *P. Bis.*)

Tri distraktory položky č. 29 dosiahli kladnú alebo nulovú hodnotu stonásobku *P. Bis.* (Tab. 13). Päťtinu žiakov zlákal distraktor (D). Podľa vyššej kladnej hodnoty *P. Bis.* 22 predpokladáme, že to boli v značnej miere aj šikovní žiaci v teste celkove úspešní. Voľba distraktora (D) vyplývala zo správneho postupu riešenia úlohy, ale nepozorného prečítania otázky úlohy. Žiaci nevykonali posledný krok pri riešení úlohy a namiesto množstva zachyteného žiarenia uviedli vypočítané množstvo prepusteného žiarenia. Žiaci, ktorí si uvedomili aj formuláciu otázky, uviedli správnu odpoveď (B). Podľa hodnoty *P. Bis.* 26 opäť predpokladáme, že to boli v značnej miere šikovní žiaci v teste celkove úspešní. Spolu teda úlohu správne riešilo 38 % žiakov, mnohí z nich však boli pri voľbe odpovede nepozorní.

Distraktory (A) a (E) dosiahli hodnotu *P. Bis.* blízku 0. Volili si ich teda aj niektorí v teste celkove úspešnejší žiaci, ktorí použili správny postup riešenia, ale pomýlili sa pri určení počtu vrstiev, cez ktoré žiarenie bude prechádzať. Voľba distraktora (E) naznačuje aj nepozornosť pri čítaní otázky úlohy, rovnakú ako pri voľbe distraktora (D).

Najviac žiakov (viac ako polovica) si zvolila distraktor (C). Boli to žiaci celkove v teste menej úspešní, ktorí vôbec nepochopili podstatu úlohy a riešili ju myšlienkovy nesprávne.

Tab. 13 Analýza distraktorov položky č. 29 testu MAT12 – 6306

| č. 29          | A    | B    | C     | D    | E    | Bez odpovede |
|----------------|------|------|-------|------|------|--------------|
| <i>P. Bis.</i> | 2    | 26   | – 38  | 22   | 0    | – 6          |
| Podiel žiakov  | 0,05 | 0,17 | 0,52  | 0,21 | 0,04 | 0,01         |
| Počet žiakov   | 218  | 739  | 2 282 | 941  | 181  | 23           |

V položke č. 30 si správnu odpoveď (C) volilo 20 % žiakov (Tab. 14), ktorí si pri riešení úlohy vybrali správny postup a dokázali ho aj numericky správne zrealizovať. Z vyššej kladnej hodnoty 23 korelačného koeficientu *P. Bis.* usudzujeme, že to boli väčšinou v teste celkove úspešnejší žiaci.

Veľmi frekventovaná medzi žiakmi bola voľba distraktorov (D) a (E). Početnosť voľby distraktora (D) je porovnateľná s početnosťou voľby správnej odpovede (C), frekvencia výberu distraktora (E) je dokonca takmer dvakrát vyššia ako frekvencia voľby správnej odpovede (C). Podľa hodnoty korelačného koeficientu *P. Bis.* distraktorov (D) a (E) predpokladáme, že tieto distraktory si volili v prevažnej miere slabší, v teste celkove menej úspešní žiaci. Úlohu neriešili numericky, snažili sa určiť správnu odpoveď na základe úvahy. Dopustili sa však závažných myšlienkových chýb a úlohu riešili úplne nesprávne.

Najmenej frekventovaná medzi žiakmi bola voľba distraktorov (A) a (B). Predpokladáme, že žiaci riešili úlohu správnym postupom, ale počas riešenia sa v prípade distraktora (B) dopustili chyby pri práci s koeficientom podobnosti  $k$  (koeficient podobnosti  $k$  zaviedli pre dĺžku, ale pri výpočte obsahu podstavy ihlana ako obsahu štvorca určili nesprávne výraz pre obsah podstavy ako  $k \cdot a^2$  namiesto  $k^2 \cdot a^2$ ) a v prípade distraktora (A) sa žiaci pomýlili aj pri počítaní s treťou odmocninou.

Tab. 14 Analýza distraktorov položky č. 30 testu MAT12 – 6306

| č. 30          | A    | B    | C    | D    | E     | Bez odpovede |
|----------------|------|------|------|------|-------|--------------|
| <i>P. Bis.</i> | – 3  | 2    | 23   | – 10 | – 10  | – 6          |
| Podiel žiakov  | 0,07 | 0,15 | 0,20 | 0,19 | 0,38  | 0,01         |
| Počet žiakov   | 303  | 651  | 870  | 854  | 1 657 | 49           |

### 3.4 Distribúcia úspešností a citlivosť položiek

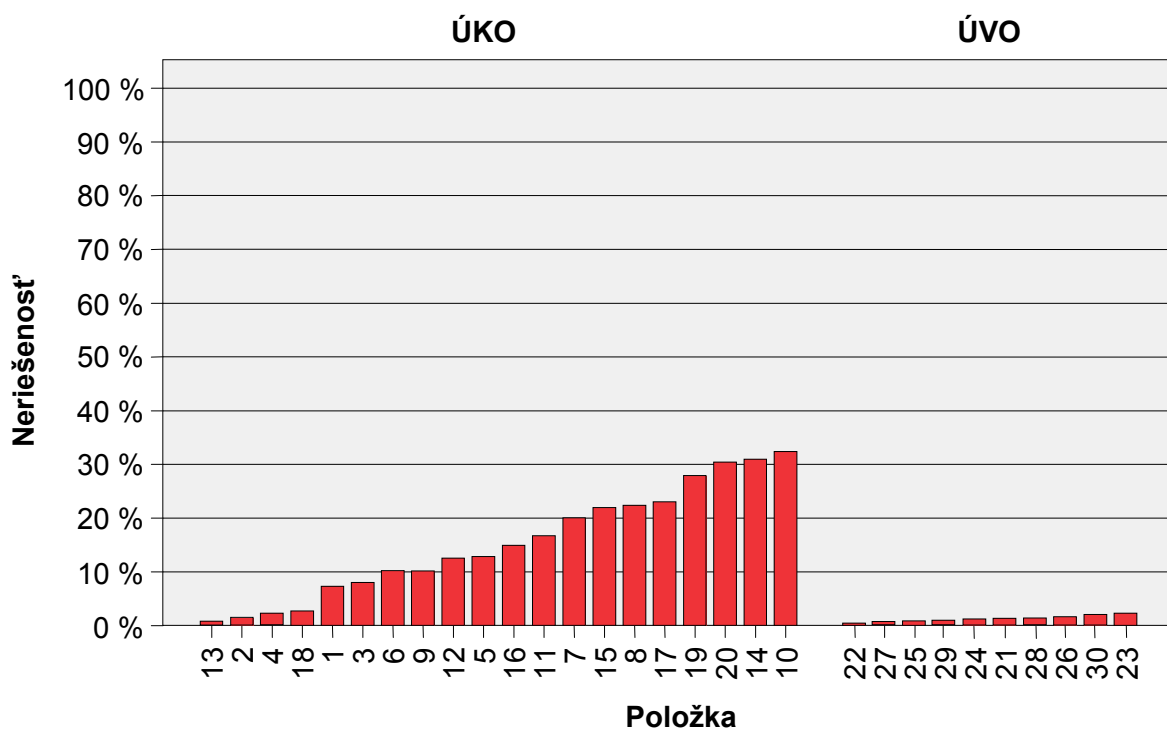
Citlivosť všetkých položiek testu bola vyhovujúca. Osem položiek malo hodnotu citlivosti od 20 % do 50 %, citlivosť ostatných dvadsiatich dvoch položiek bola vyššia ako 50 %.

Položky č. 2, 4, 13 a 16 výrazne oddelili poslednú výkonnostnú skupinu, položky č. 3 a 18 posledné dve, tri výkonnostné skupiny. Niektoré z týchto položiek boli na celkovú výkonnosť žiakov citlivé málo až nedostatočne, pretože pre ostatné skupiny žiakov boli rovnako ľahké. Položky č. 15, 19, 20, 29 a 30 a položky č. 10, 14, 17 a 23 naopak rozlíšili iba prvú alebo prvé dve, tri výkonnostné skupiny. Ostatné skupiny žiakov dosiahli približne rovnakú úspešnosť bez ohľadu na celkovú úspešnosť v teste. Niektoré položky dobre diferencovali polovicu výkonnostného spektra, napríklad položky č. 18 a 24 slabších žiakov, položky č. 7, 8, 11 a 27 úspešnejších žiakov. Ostatné položky plynule rozlíšili všetky výkonnostné skupiny v závislosti od hodnoty citlivosti. Ideálnymi boli napríklad položky č. 1, 5, 21 a 26.

Grafy distribúcie úspešností žiackych odpovedí jednotlivých položiek uvádzame pri súhrnnej charakteristike položiek v kapitole 3.6.

### 3.5 Neriešenosť položiek

Na Obr. 18 je znázornený podiel žiakov, ktorí na jednotlivé položky testu neuviedli odpoveď.



Obr. 18 Neriešenosť položiek v jednotlivých častiach testu MAT12 – 6306 (položky sú usporiadané vzostupne podľa neriešenosti)

Neriešenosť položiek bola spôsobená takmer výlučne vynechanosťou. Najvyššiu, ale zanedbateľnú hodnotu nedosiahnutosti 0,3 % sme zaznamenali len pri posledných dvoch položkách testu. Z hodnôt štatistických ukazovateľov týchto položiek usudzujeme, že väčšina žiakov odpovede na tieto úlohy nevolila náhodne, ale si ich aj zdôvodnila. Úspešnosť žiakov v týchto položkách zodpovedala celkovej úspešnosti v teste. Predpokladáme, že žiaci mali dostatok času na riešenie všetkých úloh testu.

Najvyššiu neriešenosť sme zaznamenali u položiek, ktoré zároveň dosiahli najnižšiu úspešnosť. Riešenie týchto úloh vyžadovalo myšlienku, ako nájsť správnu odpoveď, alebo časovo dlhší náročnejší výpočet. Maturanti v nich mali preukázať zručnosti pri práci s premennými v algebraických výrazoch. Predpokladáme, že žiaci, ktorí na tieto úlohy neuviedli odpoveď, buď nevedeli, ako príklad vypočítať, alebo uprednostnili úlohy, ktorých riešenie mohli určiť jednoduchšie a rýchlejšie.

### 3.6 Súhrnné charakteristiky položiek

V nasledujúcej časti prinášame súhrnné charakteristiky jednotlivých položiek vo forme prehľadných tabuliek. Pri každej položke uvádzame:

- Tému – podľa Cieľových požiadaviek na vedomosti a zručnosti maturantov z matematiky.
- Testovanú myšlienkovú operáciu – podľa špecifikačnej tabuľky zostavenej autormi testových položiek.
- Predpokladanú obťažnosť – podľa špecifikačnej tabuľky zostavenej autormi testových položiek.
- Zadanie
- Riešenie
- Štatistické vyhodnotenie – obsahuje priemernú úspešnosť celkovú, žiakov GYM a SOŠ, chlapcov a dievčat, neriešenosť, citlivosť a stonásobok hodnoty korelačného koeficientu *P. Bis.* (CTT), obťažnosť a rozlišovaciu schopnosť (IRT).
- Graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí.
- Najčastejšie odpovede, frekvenciu ich výskytu a predpokladanú príčinu uvedenia danej odpovede pri ÚKO a frekvenciu voľby ponúkaných odpovedí, ich stonásobok hodnoty korelačného koeficientu *P. Bis.*, predpokladanú príčinu voľby danej možnosti a graf závislosti pravdepodobnosti výberu odpovede od úrovne schopnosti žiaka pri ÚVO.
- Komentár – hodnotiace vyjadrenia, ktoré interpretujú namerané údaje štatistických ukazovateľov.

Štatistické vyhodnotenia sú uvedené podľa hodnôt variantu testu MAT12 – 6306.

## Príklad č. 1

Téma: 1.4 Rovnice, nerovnice a ich sústavy

Testované myšlienkové operácie: zložitejšie myšlienkové operácie

Predpokladaná obťažnosť: stredne ťažká úloha

Zadanie:

Rovnica  $\sqrt{44 - x} = 2 - x$  má práve jeden koreň v množine reálnych čísel. Určte tento koreň.

Riešenie:

(1) Určíme, pre ktoré hodnoty  $x$  má rovnica zmysel, t.j. je definovaný výraz pod odmocninou. Výraz pod odmocninou musí byť nezáporný, preto  $44 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 44$ .

(2) Rovnicu budeme riešiť umocnením, aby sme odstránili odmocninu. Ľavá strana rovnice je nezáporná, preto aj pravá strana rovnice by mala byť nezáporná, čo je splnené pre  $2 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2$ . Na základe (1) a (2) budeme riešiť rovnicu pre  $x \in (-\infty; 2)$ .

(3) Umocnením pôvodnej rovnice  $(\sqrt{44 - x})^2 = (2 - x)^2$  získame  $44 - x = 4 - 4x + x^2$ , odkiaľ  $x^2 - 3x - 40 = 0$ . Riešením kvadratickej rovnice sú  $x_1 = -5$  a  $x_2 = 8$ .

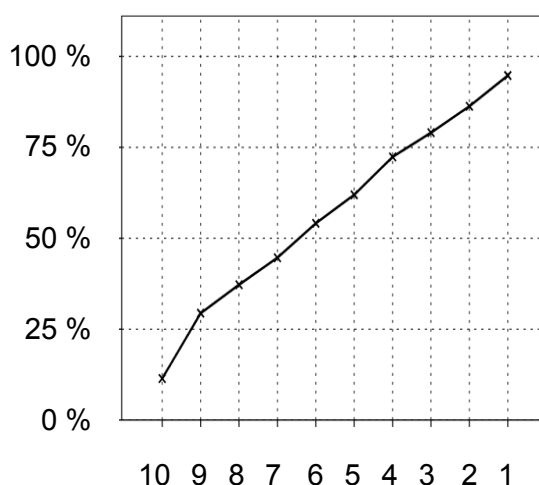
(4) Vypočítaný koreň  $x_1$  vyhovuje podmienke v (2), koreň  $x_2$  nevyhovuje. Zistenie môžeme overiť aj skúškou koreňov vypočítaných v (3) dosadením do pôvodnej rovnice. Pre  $x_1 = -5$  získame správnu rovnosť  $7 = 7$ , pre  $x_2 = 8$  získame nesprávnu rovnosť  $6 = -6$ .

(5) Koreňom rovnice je číslo  $-5$ .

Štatistické vyhodnotenie:

|                 |           |        |
|-----------------|-----------|--------|
| úspešnosť       | celková   | 57,1 % |
|                 | žiaci GYM | 67,9 % |
|                 | žiaci SOŠ | 37,7 % |
|                 | chlapci   | 55,8 % |
|                 | dievčatá  | 59,6 % |
| neriešenosť     |           | 8,4 %  |
| citlivosť       |           | 70,1 % |
| P. Bis.         |           | 44,5   |
| obťažnosť (IRT) |           | -0,267 |

Graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí:



rozlišovacia schopnosť (IRT)

0,850

| Najčastejšie odpovede a frekvencia ich výskytu:                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| odpoveď                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | frekvencia | predpokladaná príčina uvedenej odpovede                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| – 5                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 57,1 %     | správna odpoveď                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| 8                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | 17,5 %     | Žiaci v (2) zabudli určiť podmienku nezápornosti pravej strany rovnice pred umocnením alebo podmienku vôbec neurčili, prípadne nevykonali skúšku správnosti v (4) a vybrali si jeden z vypočítaných koreňov. Pre číslo 8 sa možno rozhodli preto, že je to kladné číslo a v rovnici sa nachádzala odmocnina, ktorá je definovaná pre nezáporné čísla. Môžeme zrejme predpokladať, že žiaci správne umocnili rovnicu a vypočítali korene kvadratickej rovnice v (3). |
| –                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | 8,4 %      | neuvedená odpoveď                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| 5                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | 2,1 %      | Pravdepodobne numerická chyba pri výpočte koreňov kvadratickej rovnice v (3) alebo správne vyriešenie úlohy, len pri zápise výsledku do odpovedového hárka žiaci nenapísali k číslu 5 znamienko mínus.                                                                                                                                                                                                                                                              |
| 40                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 0,7 %      | Nesprávne umocnenie dvojčlena na pravej strane rovnice v (3). Žiaci po chybnom umocnení na $44 - x = 4 + 2x$ vypočítali po niekoľkých numerických chybách nesprávny koreň $x = 40$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                |
| 7                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | 0,7 %      | Myšlienková chyba: žiaci ako odpoveď uviedli nie vypočítaný koreň – 5, ale hodnotu výrazu na oboch stranách rovnice po dosadení koreňa rovnice – 5, zrejme preto, že ako posledný výpočet pri riešení úlohy vykonávali v (4) skúšku správnosti.                                                                                                                                                                                                                     |
| <p>Komentár:</p> <p>Úloha vyžadovala schopnosť správne umocniť dvojčlen na druhú, určiť korene úplnej kvadratickej rovnice a nutnosť vykonať skúšku správnosti alebo určiť podmienky pri riešení rovnice s odmocninou umocnením. Konštatujeme, že takmer štyri pätiny žiakov zvládli riešenie rovnice s odmocninou správnym umocnením, ale asi štvrtina z nich nevykonala skúšku správnosti alebo sa dopustila nepozornosti pri vyslovení záveru riešenia úlohy. Úloha podľa predpokladov bola stredne ťažká pre všetky skupiny žiakov, vecne signifikantne mierne nižšiu úspešnosť dosiahli žiaci SOŠ. Úloha výborne rozlíšila žiakov, mala výbornú citlivosť, hodnotu <i>P. Bis.</i> a priebeh grafu distribúcie úspešností žiackych odpovedí. Veľkú rozlišovaciu schopnosť úlohy potvrdilo aj vyhodnotenie výsledkov žiakov IRT metódou.</p> |            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |

## Príklad č. 2

Téma: 1.2 Čísla, premenné a výrazy

Testované myšlienkové operácie: reprodukcia a jednoduché myšlienkové operácie

Predpokladaná obťažnosť: ľahká úloha

Zadanie:

Tri kladné čísla sú v pomere 2 : 3 : 4. Súčet čísel je 99. Určte súčin týchto troch čísel.

Riešenie:

(1) Neznáme tri čísla vyjadríme pomocou zadaného pomeru a neznámej  $x$ . Prvé číslo bude  $2x$ , druhé  $3x$  a tretie  $4x$ .

(2) Zostavíme rovnicu vyjadrujúcu podľa zadania súčet neznámych čísel, z ktorej vypočítame hodnotu neznámej  $x$ :

$$2x + 3x + 4x = 99, \text{ odkiaľ } x = 11.$$

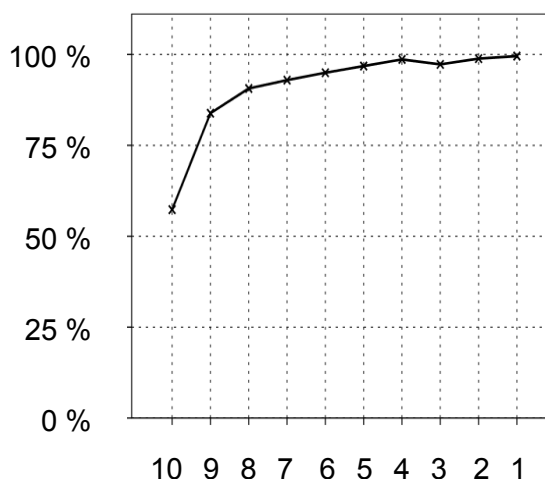
(3) Podľa (1) prvé číslo je  $2x = 2 \cdot 11 = 22$ , druhé číslo je  $3x = 3 \cdot 11 = 33$  a tretie číslo je  $4x = 4 \cdot 11 = 44$ .

(4) Súčin troch čísel je  $22 \cdot 33 \cdot 44 = 31\,944$ .

Štatistické vyhodnotenie:

|                 |           |         |
|-----------------|-----------|---------|
| úspešnosť       | celková   | 91,1 %  |
|                 | žiaci GYM | 94,3 %  |
|                 | žiaci SOŠ | 85,3 %  |
|                 | chlapci   | 91,1 %  |
|                 | dievčatá  | 91,0 %  |
| neriešenosť     |           | 2,3 %   |
| citlivosť       |           | 28,6 %  |
| P. Bis.         |           | 30,8    |
| obťažnosť (IRT) |           | - 1,881 |

Graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí:



| Najčastejšie odpovede a frekvencia ich výskytu:                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |            |                                                                                                                                                |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| odpoveď                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | frekvencia | predpokladaná príčina uvedenej odpovede                                                                                                        |
| 31 944                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 91,1 %     | správna odpoveď                                                                                                                                |
| –                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 2,3 %      | neuvedená odpoveď                                                                                                                              |
| 35 904                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 0,9 %      | Nezistili sme príčinu uvedenia tejto odpovede.                                                                                                 |
| 11                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | 0,8 %      | Myšlienková chyba: Žiaci ukončili riešenie úlohy v (2) a ako odpoveď uviedli veľkosť jedného „dielu“ z neznámych čísel, hodnotu neznámej $x$ . |
| 31,94                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 0,3 %      | Myšlienková chyba: Žiaci oddelili v správnom výsledku tri desatinné miesta.                                                                    |
| <p>Komentár:</p> <p>Riešenie úlohy vyžadovalo znalosť postupného pomeru a skúsenosť počítania s ním. Z vyhodnotených výsledkov vidíme, že podľa predpokladu úloha bola pre všetky skupiny veľmi až extrémne ľahká. Preto úloha mala nízku citlivosť, rozlíšila iba desatinu v teste celkove najslabších žiakov. Pre ostatných žiakov bola úloha rovnako ľahká. Ich úspešnosť sa pohybovala od 90 % do 100 %.</p> |            |                                                                                                                                                |

## Príklad č. 3

Téma: 2.1 Funkcia a jej vlastnosti, postupnosti

Testované myšlienkové operácie: zložitejšie myšlienkové operácie

Predpokladaná obťažnosť: ľahká úloha

Zadanie:

Daná je funkcia  $f: y = \sqrt{\frac{x-3}{4-x}}$ . Určte číslo, pre ktoré funkcia  $f$  nadobúda hodnotu 1.

Riešenie:

(1) Podľa zadania hľadáme to  $x$ , pre ktoré funkcia  $f$  nadobudne hodnotu  $y = 1$ . Dosadíme preto do predpisu funkcie  $f$  za  $y$  číslo 1.

(2) Získame rovnicu  $\sqrt{\frac{x-3}{4-x}} = 1$ , ktorú vyriešime umocnením za predpokladu nezápornosti oboch strán rovnice. Získame rovnicu  $\frac{x-3}{4-x} = 1$ , upravíme na  $x - 3 = 4 - x$ , následne zjednodušíme na  $2x = 7$ , odkiaľ  $x = \frac{7}{2}$ .

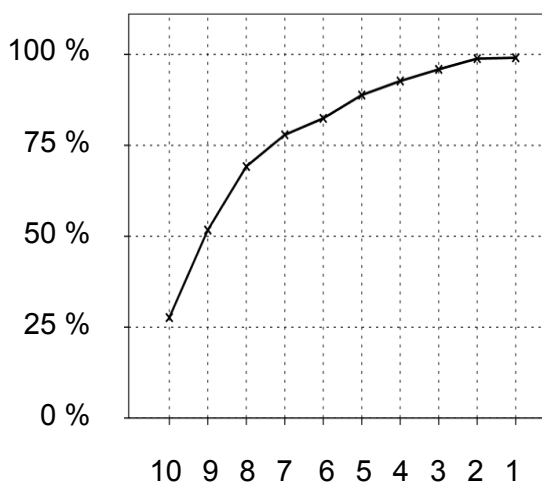
(3) Overíme, že po dosadení hodnoty  $x = \frac{7}{2}$  vypočítanej v (2) do predpisu funkcie  $f$  nadobudne funkcia  $f$  skutočne hodnotu  $y = 1$ .

(4) Hľadané číslo je  $\frac{7}{2} = 3,5$ .

Štatistické vyhodnotenie:

|                 |           |         |
|-----------------|-----------|---------|
| úspešnosť       | celková   | 78,4 %  |
|                 | žiaci GYM | 88,2 %  |
|                 | žiaci SOŠ | 60,8 %  |
|                 | chlapci   | 75,7 %  |
|                 | dievčatá  | 83,5 %  |
| neriešenosť     |           | 8,8 %   |
| citlivosť       |           | 59,3 %  |
| P. Bis.         |           | 43,8    |
| obťažnosť (IRT) |           | - 1,020 |

Graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí:



|                              |       |
|------------------------------|-------|
| rozlišovacia schopnosť (IRT) | 1,083 |
|------------------------------|-------|

| Najčastejšie odpovede a frekvencia ich výskytu:                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |            |                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| odpoveď                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | frekvencia | predpokladaná príčina uvedenej odpovede                                                                                                                                                                                                                                            |
| 3,5                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 78,4 %     | správna odpoveď                                                                                                                                                                                                                                                                    |
| –                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 8,8 %      | neuvedená odpoveď                                                                                                                                                                                                                                                                  |
| 3                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 2,6 %      | Žiaci zrejme riešili úlohu pokusným dosadzovaním alebo úvahou. Hľadali asi číslo, pre ktoré čitateľ (odpoveď 4) alebo menovateľ (odpoveď 3) zlomku pod odmocninou nadobúda hodnotu 1. V prípade nájdeneho čísla 4 si neuvedomili, že hodnota menovateľa je 0, čo nie je prípustné. |
| 4                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 1,9 %      |                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
| 0,5                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 1,2 %      | Numerická chyba v (2): Žiaci chybným odčítaním čísla – 3 upravili rovnicu $x - 3 = 4 - x$ na $2x = 1$ , odkiaľ $x = \frac{1}{2} = 0,5$ .                                                                                                                                           |
| 35                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 0,6 %      | Žiaci zrejme postupovali správne a dopočítali správny výsledok, ale do odpovedového hárka výsledok chybné zapísali, nerešpektovali polohu desatinnej čiarky.                                                                                                                       |
| – 3,5                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 0,5 %      | Numerická chyba v (2): Žiaci odčítaním čísla 4 a neznámej $x$ upravili rovnicu $x - 3 = 4 - x$ na rovnicu $-7 = -2x$ , odkiaľ nedôslednosťou pri práci so znamienkami mínus nesprávne vypočítali $x = -\frac{7}{2} = -3,5$ .                                                       |
| <p>Komentár:</p> <p>Úloha bola zameraná na znalosť základných pojmov z oblasti funkcií. Väčšina žiakov počítala úlohu správnym postupom a nedopustila sa ani numerickej chyby. Najnižšiu priemernú úspešnosť dosiahla skupina žiakov SOŠ, rozdiel priemernej úspešnosti žiakov SOŠ v porovnaní so žiakmi GYM bol stredne vecne významný. Úloha výborne rozlíšila posledné tri skupiny výkonnostného spektra, pre ostatných žiakov bola úloha takmer rovnako ľahká.</p> |            |                                                                                                                                                                                                                                                                                    |

## Príklad č. 4

Téma: 1.3 Teória čísel

Testované myšlienkové operácie: zložitejšie myšlienkové operácie

Predpokladaná obťažnosť: stredne ťažká úloha

Zadanie:

Pavol si zapísal na papier šesťciferné telefónne číslo. Zistil, že je deliteľné bez zvyšku číslami 3, 4 a 5. Po týždni telefónne číslo potreboval, ale nevedel po sebe prečítať posledné dve cifry. Nájdite nečitateľné dvojčiferné číslo AB zo zapísaného telefónneho čísla 714 5AB.

Riešenie:

(1) Číslo je deliteľné bez zvyšku piatimi, ak na mieste jednotiek namiesto B má cifru 0 alebo 5. Ďalej preto budeme hľadať telefónne číslo v tvare 714 5A0 alebo 714 5A5.

(2) Číslo je deliteľné bez zvyšku štyrmi, ak jeho posledné dvojčísle je deliteľné štyrmi. Keďže žiadne dvojčiferné číslo zakončené cifrou 5 nie je deliteľné štyrmi, možnosť 714 5A5 už ďalej nebudeme uvažovať a v čísle 714 5A0 nahradíme písmeno A cifrou tak, aby vzniklo dvojčísle deliteľné štyrmi: 714 520, 714 540, 714 560 alebo 714 580.

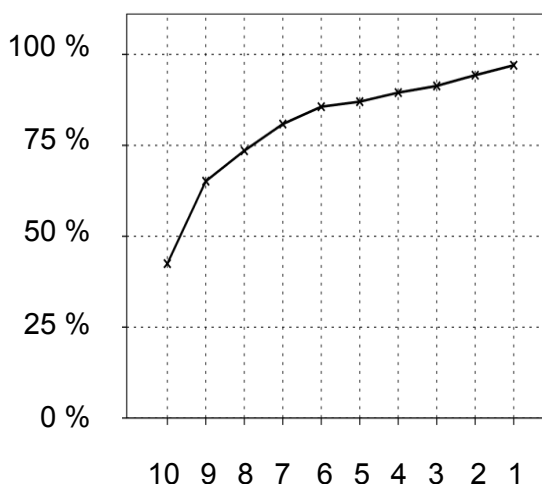
(3) Číslo je deliteľné tromi, ak súčet jeho cifier je deliteľný tromi. Súčet cifier vhodných čísel v (2) bez cifry na pozícii A je 17. Súčet cifier štyroch kandidátov na správne telefónne číslo z (2) je postupne 19, 21, 23 a 25, z nich deliteľný tromi je iba súčet cifier 21 čísla 714 540.

(4) Hľadaným dvojčiferným číslom je číslo 40.

Štatistické vyhodnotenie:

|                 |           |         |
|-----------------|-----------|---------|
| úspešnosť       | celková   | 80,7 %  |
|                 | žiaci GYM | 85,0 %  |
|                 | žiaci SOŠ | 72,8 %  |
|                 | chlapci   | 78,6 %  |
|                 | dievčatá  | 84,5 %  |
| neriešenosť     |           | 3,1 %   |
| citlivosť       |           | 41,8 %  |
| P. Bis.         |           | 31,3    |
| obťažnosť (IRT) |           | - 1,512 |

Graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí:



| Najčastejšie odpovede a frekvencia ich výskytu:                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| odpoveď                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | frekvencia | predpokladaná príčina uvedenej odpovede                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
| 40                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 80,7 %     | správna odpoveď                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
| 60                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 9,7 %      | Neznalosť kritéria deliteľnosti čísla tromi. Žiaci hľadali číslo, ktorého posledné dvojčísle je deliteľné tromi, preto z možných kandidátov určených v (2) vybrali ako správne riešenie v (3) číslo 714 560 s posledným dvojčíslím 60 deliteľným tromi bez zvyšku.                                                                                                                                                                                              |
| –                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 3,1 %      | neuvedená odpoveď                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
| 714 560                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 2,3 %      | Nesprávne pochopenie zadania úlohy. Žiaci vyriešili úlohu správne, ale neporozumeli poslednej vete zadania úlohy („Nájdite nečitateľné <b>dvojciferné číslo AB</b> zo zapísaného telefónneho čísla 714 5AB.“) a do odpovedového hárka uviedli ako odpoveď celé telefónne číslo. Ďalšou možnosťou je aj nie úplné sústredenie žiakov, ktorí počas riešenia úlohy pracovali s celým telefónnym číslom a preto zrejme aj ako odpoveď uviedli celé telefónne číslo. |
| 10                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 0,7 %      | Nedodržanie podmienky deliteľnosti čísla štyrmi. Žiaci zrejme po určení správnej cifry na pozícii jednotiek v (1) pokračovali aplikáciou podmienky deliteľnosti hľadaného čísla tromi. Našli prvú možnosť 714 510 doplnením cifry 1. Následne zrejme predpokladali, že párne číslo je zároveň deliteľné aj štyrmi.                                                                                                                                              |
| 25                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 0,5 %      | Nedodržanie podmienky deliteľnosti hľadaného čísla štyrmi. Žiaci zrejme predpokladali, že súčet cifier 24 nájdeného čísla 714 525, deliteľný štyrmi, je postačujúci aj na deliteľnosť nájdeného čísla štyrmi.                                                                                                                                                                                                                                                   |
| <p>Komentár:</p> <p>Úloha využívajúca poznatky z deliteľnosti prirodzených čísel sa dala riešiť aj bez použitia „veľkej matematiky“. 80 % žiakov správne aplikovalo kritéria deliteľnosti prirodzených čísel na zadanie úlohy. 10 % žiakov použilo nesprávne kritérium deliteľnosti tromi. Niekoľko žiakov si nepozorne prečítalo zadanie úlohy a ako odpoveď zapísali celé telefónne číslo. Nepotvrdil sa predpoklad vyššej obťažnosti a náročnosti myšlienkových operácií potrebných na vyriešenie úlohy. Pre väčšinu žiakov bola úloha takmer veľmi ľahká. Preto mala úloha nízku citlivosť, dobre odlíšila iba najslabšiu skupinu žiakov.</p> |            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |

## Príklad č. 5

Téma: 1.4 Rovnice, nerovnice a ich sústavy

Testované myšlienkové operácie: zložitejšie myšlienkové operácie

Predpokladaná obťažnosť: stredne ťažká úloha

Zadanie:

Na ktorom mieste sa umiestnil Peter v pretekoch v behu na 5 000 metrov, ak devätina všetkých súťažiacich dobehla do cieľa pred Petrom a päť šiestín všetkých súťažiacich za Petrom?

Riešenie:

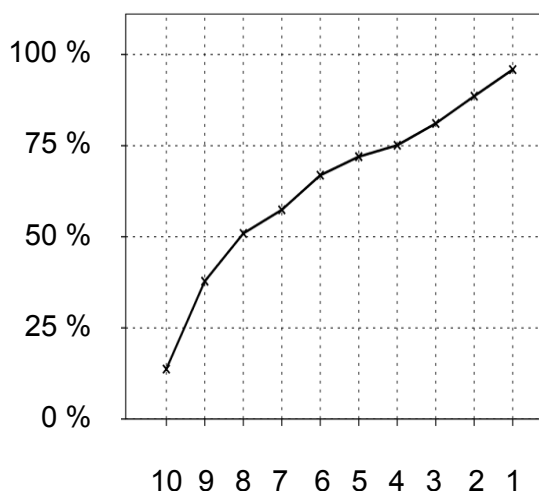
(1) Vypočítame počet všetkých súťažiacich a následne podľa informácií v zadaní úlohy určíme poradie Petra v cieli. Počet všetkých súťažiacich označíme  $x$ . Devätinu súťažiacich, ktorí dobehli do cieľa pred Petrom, zapíšeme výrazom  $\frac{x}{9}$ , päť šiestín súťažiacich, ktorí dobehli po Petrovi, zapíšeme výrazom  $\frac{5x}{6}$ .

(2) Zostavíme rovnicu vyjadrujúcu súčet všetkých súťažiacich, ktorí dobehli do cieľa. Spočítame počet súťažiacich, ktorí dobehli pred Petrom, Petra a súťažiacich, ktorí dobehli po Petrovi:  $\frac{x}{9} + 1 + \frac{5x}{6} = x$ . Riešením rovnice je  $x = 18$ . Ak všetkých súťažiacich v cieli bolo 18, devätina pred Petrom bola devätina z osemnástich, čo sú dvaja súťažiaci a Peter za nimi dobehol do cieľa tretí.

Štatistické vyhodnotenie:

|             |           |        |
|-------------|-----------|--------|
| úspešnosť   | celková   | 63,9 % |
|             | žiaci GYM | 69,3 % |
|             | žiaci SOŠ | 54,3 % |
|             | chlapci   | 64,8 % |
|             | dievčatá  | 62,3 % |
| neriešenosť |           | 12,8 % |
| citlivosť   |           | 66,5 % |
| P. Bis.     |           | 41,1   |

Graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí:



|                 |         |                              |       |
|-----------------|---------|------------------------------|-------|
| obťažnosť (IRT) | - 0,564 | rozlišovacia schopnosť (IRT) | 0,760 |
|-----------------|---------|------------------------------|-------|

| Najčastejšie odpovede a frekvencia ich výskytu:                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| odpoveď                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | frekvencia | predpokladaná príčina uvedenej odpovede                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
| 3                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 63,9 %     | správna odpoveď                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
| –                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 12,8 %     | neuvedená odpoveď                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| 7                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 3,9 %      | Žiaci pokusne určili celkový počet účastníkov pretekov. V zadaní prečítali devätiny a šestiny a zároveň si uvedomili, že počet súťažiacich je prirodzené číslo a preto predpokladali, že menovatele zlomkov majú byť deliteľmi celkového počtu účastníkov súťaže. Celkový počet pretekárov stanovili ako súčin $9 \cdot 6 = 54$ . Následne vypočítali počet pretekárov v cieľi pred Petrom ako devätinu z 54, čo bolo 6 súťažiacich. Peter potom podľa tejto úvahy dobehol za nimi na siedmom mieste. |
| 2                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 3,7 %      | Žiaci počítali správne, ale v závere riešenia výpočet devätiny zo všetkých pretekárov považovali za výsledok úlohy a Petrovo poradie v cieľi.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
| 5                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 2,5 %      | Žiaci pokusne určili celkový počet účastníkov pretekov. V zadaní prečítali devätiny a šestiny a zároveň si uvedomili, že počet súťažiacich je prirodzené číslo a preto predpokladali, že menovatele zlomkov majú byť deliteľmi celkového počtu účastníkov súťaže. Celkový počet pretekárov stanovili na 36. Následne vypočítali počet pretekárov v cieľi pred Petrom ako devätinu z 36, čo boli 4 súťažiaci. Peter potom podľa tejto úvahy dobehol za nimi na piatom mieste.                          |
| 18                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 2,3 %      | Žiaci vypočítali počet všetkých súťažiacich a uviedli ho ako správnu odpoveď namiesto Petrovho poradia v cieľi pretekov.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
| <p>Komentár:</p> <p>Správne riešenie úlohy vyžadovalo znalosť zostavenia a riešenia lineárnej rovnice podľa slovného zadania úlohy. Mnohí žiaci zrejme úlohu neriešili pomocou zostavenia rovnice, ale celkový počet účastníkov pretekov sa snažili určiť úvahou. Pri tomto postupe však mohli nájsť viacero možností, ktoré spočiatku mohli vyhovovať niektorým údajom zo zadania, ale celková skúška by ich bola vylúčila. Nepotvrdila sa predpokladaná obťažnosť úlohy. Skupiny žiakov, s výnimkou žiakov SOŠ, riešili úlohu s úspešnosťou vyššou ako 60 %. Úloha mala dobrú citlivosť, rozlíšila najmä polovicu v teste celkove menej úspešnejších žiakov.</p> |            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |

## Príklad č. 6

Téma: 3.1 Základné rovinné útvary

Testované myšlienkové operácie: zložitejšie myšlienkové operácie

Predpokladaná obťažnosť: ľahká úloha

Zadanie:

V trojuholníku  $ABC$  sú veľkosti vnútorných uhlov  $\alpha = 80^\circ$  a  $\beta = 70^\circ$ . Určte v stupňoch veľkosť uhla medzi výškou na stranu  $c$  a výškou na stranu  $a$ .

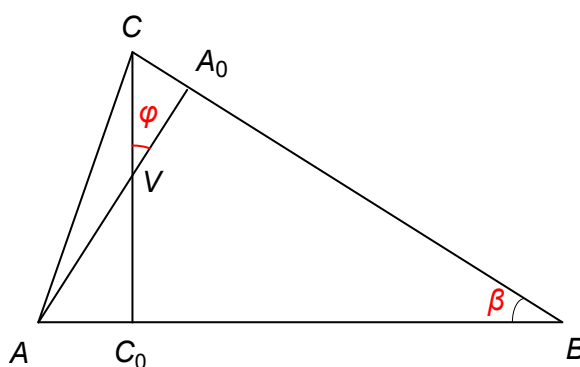
Riešenie:

(1) Podľa definície uhla dvoch priamok určíme hľadaný uhol  $\varphi$  ako menší z dvojice uhlov medzi výškami na strany  $c$  a  $a$  napríklad v pravouhlom trojuholníku  $VCA_0$ .

(2) V pravouhlom trojuholníku  $CC_0B$  s pravým uhlom pri vrchole  $C_0$  (páta výšky) určíme  $\angle BCC_0 = 180^\circ - 90^\circ - \beta = 20^\circ$ .

(3) Veľkosť hľadaného uhla  $\varphi$  určíme v pravouhlom trojuholníku  $VA_0C$  s pravým uhlom pri vrchole  $A_0$  (páta výšky):  $\varphi = 180^\circ - 90^\circ - 20^\circ = 70^\circ$ .

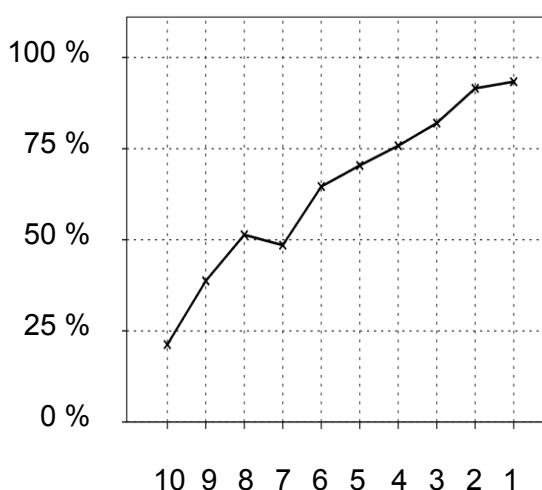
(4) Veľkosť uhla medzi výškou na stranu  $c$  a výškou na stranu  $a$  je  $70^\circ$ .



Štatistické vyhodnotenie:

|             |           |        |
|-------------|-----------|--------|
| úspešnosť   | celková   | 63,8 % |
|             | žiaci GYM | 73,6 % |
|             | žiaci SOŠ | 46,0 % |
|             | chlapci   | 62,0 % |
|             | dievčatá  | 67,0 % |
| neriešenosť |           | 10,4 % |
| citlivosť   |           | 62,5 % |
| P. Bis.     |           | 39,1   |

Graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí:



|                 |         |                              |       |
|-----------------|---------|------------------------------|-------|
| obťažnosť (IRT) | - 0,577 | rozlišovacia schopnosť (IRT) | 0,719 |
|-----------------|---------|------------------------------|-------|

| Najčastejšie odpovede a frekvencia ich výskytu: |            |                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|-------------------------------------------------|------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| odpoveď                                         | frekvencia | predpokladaná príčina uvedenej odpovede                                                                                                                                                                                                                                            |
| 70                                              | 63,8 %     | správna odpoveď                                                                                                                                                                                                                                                                    |
| –                                               | 10,4 %     | neuvedená odpoveď                                                                                                                                                                                                                                                                  |
| 110                                             | 5,5 %      | Žiaci počítali správne, ale do odpovedového hárka zapísali väčší z dvojice uhlov, ktoré určujú výšky trojuholníka. Definícia uhla dvoch priamok však jasne a presne vymedzuje veľkosť uhla dvoch priamok ako veľkosť menšieho z dvojice susedných uhlov, ktoré dve priamky určujú. |
| 30                                              | 3,9 %      | Predpokladáme, že žiaci úlohu nepočítali, ale riešenie sa snažili stanoviť pokusne na základe obrázka pod zadaním úlohy. Takto určili výsledky 20 a 30. Výsledok 60 určili ako väčší z uhlov k susednému uhlu s veľkosťou 30°.                                                     |
| 60                                              | 2,5 %      |                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
| 20                                              | 2,4 %      |                                                                                                                                                                                                                                                                                    |

Komentár:

Úloha vyžadovala znalosť riešenia metrických úloh v trojuholníku (špeciálne v pravouhlom) a znalosť súčtu veľkostí vnútorných uhlov v trojuholníku. Takmer 70 % žiakov riešilo úlohu správnym postupom a bez numerickej chyby. Necelých 10 % žiakov úlohu neriešilo výpočtom, ale stanovilo veľkosť hľadaného uhla pokusne podľa nákresu pod zadaním úlohy. Ostatní žiaci sa dopustili pri riešení úlohy numerickej alebo myšlienkovvej chyby. Mnohí žiaci ako výsledok uvádzali väčší z dvojice susedných uhlov, ktoré určujú výšky trojuholníka. Neuvedomili si alebo nevedeli, že veľkosť uhla dvoch priamok je definovaný ako uhol z intervalu (0°; 90°). Desatina žiakov na túto ľahkú úlohu neuviedla odpoveď.

Úloha mala dobrú citlivosť, dobre rozlíšila všetky výkonnostné skupiny žiakov. Nižšiu priemernú úspešnosť v porovnaní so susednými výkonnostnými skupinami dosiahli žiaci siedmej výkonnostnej skupiny. Zaostali aj žiaci SOŠ v porovnaní so žiakmi GYM

## Príklad č. 7

Téma: 2.2 Lineárna a kvadratická funkcia, aritmetická postupnosť

Testované myšlienkové operácie: reprodukcia a jednoduché myšlienkové operácie

Predpokladaná obťažnosť: ľahká úloha

Zadanie:

Grafom kvadratickej funkcie  $f: y = x^2 + 7x + 6$  je parabola s vrcholom  $V[v_1; v_2]$ . Vypočítajte súradnicu  $v_2$  vrcholu paraboly.

Riešenie:

(1) Kvadratický trojčlen v predpise funkcie  $f$  upravíme na druhú mocninu dvojčlena, z ktorého určíme súradnice vrcholu paraboly:

$$f: y = x^2 + 7x + 6 = x^2 + 7x + \left(\frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 + 6 = \left(x + \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} + \frac{24}{4} = \left(x + \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$$

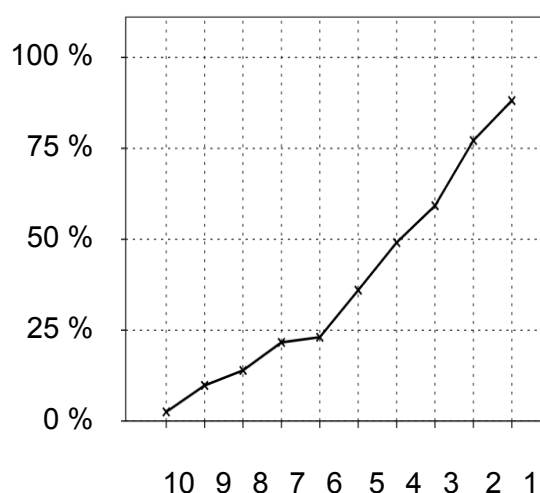
(2) Funkcia  $f$  nadobudne najmenšiu hodnotu, ak výraz v zátvorke bude mať najmenšiu možnú hodnotu. V prípade druhej mocniny to je hodnota 0, ktorú výraz v zátvorke nadobudne pre  $x = -\frac{7}{2}$ . Hodnota funkcie  $f$  sa pre  $x = -\frac{7}{2}$  rovná  $y = 0 - \frac{25}{4} = -\frac{25}{4}$ .

(3) Vrchol paraboly (bod, v ktorom funkcia  $f$  nadobúda najmenšiu hodnotu), má súradnice  $\left[-\frac{7}{2}; -\frac{25}{4}\right]$ . Riešením úlohy je preto číslo  $v_2 = -\frac{25}{4} = -6,25$ .

Štatistické vyhodnotenie:

|                 |           |        |
|-----------------|-----------|--------|
| úspešnosť       | celková   | 38,0 % |
|                 | žiaci GYM | 52,1 % |
|                 | žiaci SOŠ | 12,7 % |
|                 | chlapci   | 34,4 % |
|                 | dievčatá  | 44,9 % |
| neriešenosť     |           | 20,2 % |
| citlivosť       |           | 76,5 % |
| P. Bis.         |           | 50,0   |
| obťažnosť (IRT) |           | 0,395  |

Graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí:



| Najčastejšie odpovede a frekvencia ich výskytu:                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| odpoveď                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | frekvencia | predpokladaná príčina uvedenej odpovede                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| - 6,25                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 38,0 %     | správna odpoveď                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
| -                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 20,2 %     | neuvedená odpoveď                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
| - 6                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 7,0 %      | Myšlienková chyba: Žiaci nepochopili zadanie úlohy a vypočítali prvú súradnicu nulového bodu paraboly – priesečníka grafu funkcie s osou $x$ . Z rovnice $0 = x^2 + 7x + 6$ po úprave na tvar $0 = (x + 6) \cdot (x + 1)$ určili ako výsledok úlohy číslo - 6.                                                                                               |
| 6                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 6,3 %      | Chyba pozornosti: Žiaci v (1) po pričítaní čísla $\left(\frac{7}{2}\right)^2$ do predpisu funkcie $f$ zabudli odčítať rovnaké číslo $\left(\frac{7}{2}\right)^2$ , aby zostala zachovaná rovnosť. Získali predpis funkcie $f: y = \left(x + \frac{7}{2}\right)^2 + 6$ , odkiaľ určili súradnice vrcholu paraboly $\left[-\frac{7}{2}; 6\right]$ a odpoveď 6. |
| - 1                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 3,1 %      | Myšlienková chyba: Žiaci nepochopili zadanie úlohy a vypočítali prvú súradnicu nulového bodu paraboly – priesečníka grafu funkcie s osou $x$ . Z rovnice $0 = x^2 + 7x + 6$ po úprave na tvar $0 = (x + 6) \cdot (x + 1)$ určili ako výsledok úlohy číslo - 1.                                                                                               |
| 6,25                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 2,5 %      | Chyba pozornosti: Žiaci zrejme úlohu správne vyriešili, ale pri zápise odpovede do odpovedňového hárka zabudli napísať znamienko mínus.                                                                                                                                                                                                                      |
| <p>Komentár:</p> <p>Úloha vyžadovala schopnosť akýmkoľvek spôsobom vypočítať súradnice vrcholu paraboly. Túto základnú rutinnú úlohu stredoškolskej matematiky, ktorú je možné riešiť viacerými rôznymi spôsobmi, zvládli správne iba asi dve pätiny žiakov. Až pätina žiakov na túto ľahkú úlohu vyžadujúcu iba jednoduché myšlienkové operácie neuviedla odpoveď. Veľa žiakov ani nevedelo, čo má vlastne počítať, prípadne pri správnom výpočte sa dopustili numerických chýb. Očakávame, že maturant z matematiky by mal byť schopný počítať so zlomkami s menovateľom 2 alebo 4 bez numerických chýb. Úlohu správne vyriešil približne každý druhý žiak GYM, ale iba asi každý ôsmy žiak SOŠ (stredne vecne významný rozdiel). Dievčatá boli úspešnejšie ako chlapci (mierne vecne významný rozdiel). Úloha mala veľkú triediacu silu, mala najvyššiu hodnotu citlivosti a <i>P. Bis.</i> spomedzi všetkých položiek v teste.</p> |            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |

## Príklad č. 8

Téma: 4.5 Telesá

Testované myšlienkové operácie: zložitejšie myšlienkové operácie

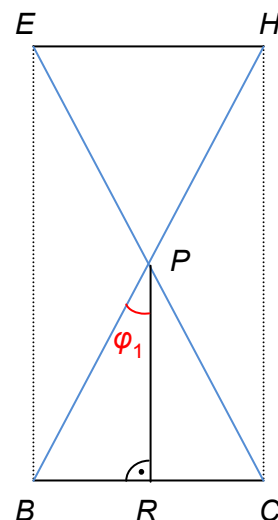
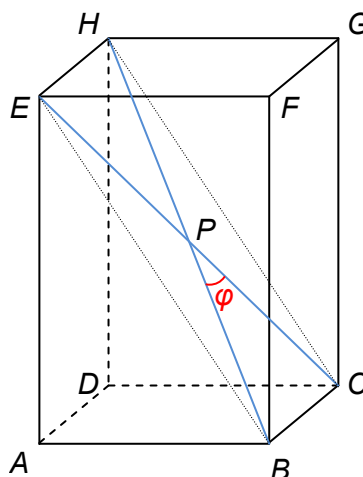
Predpokladaná obťažnosť: stredne ťažká úloha

Zadanie:

Kváder  $ABCDEFGH$  má rozmery  $|AB| = 5$  cm,  $|BC| = 4$  cm a  $|BF| = 6$  cm. Vypočítajte v stupňoch veľkosť uhla telesových uhlopriečok  $BH$  a  $CE$ .

Riešenie:

(1) Hľadaný uhol uhlopriečok (menší z dvojice) označíme  $\varphi$ . Vypočítame ho pomocou uhla  $\varphi_1$  v pravouhlom trojuholníku  $BRP$ , kde  $P$  je priesečník telesových uhlopriečok kvádra,  $R$  je stred hrany  $BC$ , dĺžka  $PR$  je polovica dĺžky  $BE$  a  $\varphi_1$  je polovica hľadaného uhla  $\varphi$ .



(2) Vypočítame dĺžku  $BE$  v pravouhlom trojuholníku  $ABE$ :

$|BE|^2 = |AB|^2 + |AE|^2$ , po dosadení  $|BE|^2 = 5^2 + 6^2$ , odkiaľ  $|BE| = \sqrt{61}$  cm.

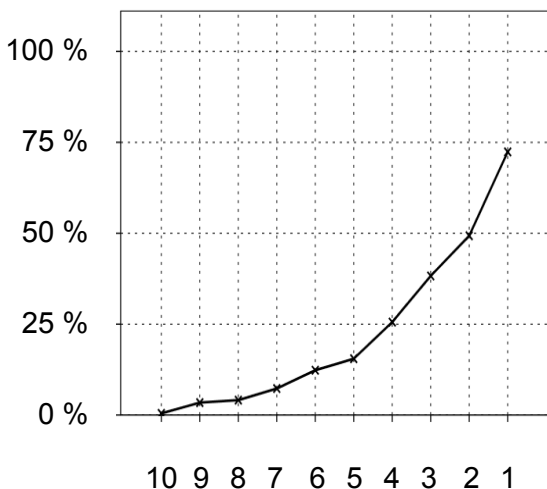
(3) V pravouhlom trojuholníku  $BRP$  poznáme dĺžku  $|PR| = \frac{1}{2}|BE| = \frac{\sqrt{61}}{2}$  cm a keďže  $R$  je stred  $BC$ , tak aj dĺžku  $|BR| = \frac{1}{2}|BC| = 2$  cm.

(4) V pravouhlom trojuholníku  $BRP$  vypočítame funkciou tangens veľkosť uhla  $\varphi_1$ :

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{|BR|}{|PR|} = \frac{2}{\frac{\sqrt{61}}{2}} = \frac{4}{\sqrt{61}} = \frac{4\sqrt{61}}{61}. \text{ Potom } \varphi_1 \doteq 27,12^\circ.$$

(5) Hľadaný uhol telesových uhlopriečok kvádra má veľkosť  $\varphi = 2\varphi_1 \doteq 2 \cdot 27,12^\circ \doteq 54,24^\circ$ .

(6) Veľkosť uhla telesových uhlopriečok je možné vypočítať aj inými spôsobmi, napríklad kosínusovou vetou v trojuholníku  $BCP$  po predchádzajúcom vypočítaní dĺžok telesových uhlopriečok kvádra.

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |            |                                                                                                           |                                                                                    |  |       |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|--|-------|
| Štatistické vyhodnotenie:                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |            |                                                                                                           | Graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí:                                     |  |       |
| úspešnosť                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | celková    | 22,9 %                                                                                                    |  |  |       |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | žiaci GYM  | 31,6 %                                                                                                    |                                                                                    |  |       |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | žiaci SOŠ  | 7,0 %                                                                                                     |                                                                                    |  |       |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | chlapci    | 21,6 %                                                                                                    |                                                                                    |  |       |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | dievčatá   | 25,1 %                                                                                                    |                                                                                    |  |       |
| neriešenosť                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |            | 22,7 %                                                                                                    |                                                                                    |  |       |
| citlivosť                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |            | 58,9 %                                                                                                    |                                                                                    |  |       |
| P. Bis.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |            | 44,7                                                                                                      |                                                                                    |  |       |
| obťažnosť (IRT)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |            | 0,994                                                                                                     | rozlišovacia schopnosť (IRT)                                                       |  | 1,021 |
| Najčastejšie odpovede a frekvencia ich výskytu:                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |            |                                                                                                           |                                                                                    |  |       |
| odpoveď                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | frekvencia | predpokladaná príčina uvedenej odpovede                                                                   |                                                                                    |  |       |
| 54,24                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 22,9 %     | správna odpoveď                                                                                           |                                                                                    |  |       |
| –                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 22,7 %     | neuvedená odpoveď                                                                                         |                                                                                    |  |       |
| 45                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 4,4 %      | Predpokladáme, že žiaci úlohu neriešili výpočtom. Odpovede zrejme určili na základe nakresleného obrázka. |                                                                                    |  |       |
| 60                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 3,0 %      |                                                                                                           |                                                                                    |  |       |
| 90                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 1,8 %      |                                                                                                           |                                                                                    |  |       |
| Komentár:                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |            |                                                                                                           |                                                                                    |  |       |
| Úloha vyžadovala schopnosť riešiť metrickú úlohu v telese, transformovať ju na planimetrickú úlohu a vedieť ju dopočítať vo vhodnom pravouhlom trojuholníku pomocou goniometrických funkcií. Úloha bola pre žiakov obťažnejšia než sa očakávalo. Úloha bola pre všetky skupiny žiakov takmer veľmi obťažná, pre žiakov SOŠ bola dokonca extrémne obťažná. Žiaci gymnázií boli v porovnaní so žiakmi SOŠ viac ako štyrikrát úspešnejší. Takmer štvrtina žiakov na úlohu neuviedla odpoveď. Úloha dobre rozlíšila v teste celkove úspešnejšiu polovicu žiakov. Ostatných päť výkonnostných skupín rozlíšila nedostatočne, pretože pre nich bola úloha veľmi obťažná. |            |                                                                                                           |                                                                                    |  |       |

## Príklad č. 9

Téma: 1.2 Čísla, premenné a výrazy

Testované myšlienkové operácie: zložitejšie myšlienkové operácie

Predpokladaná obťažnosť: stredne ťažká úloha

Zadanie:

Jana chcela zistiť súčet prvých päťdesiatich celých kladných čísel. Pri sčítaní jedno číslo náhodou vynechala. Dostala súčet deliteľný číslom 60. Určte číslo, ktoré Jana pri sčítaní vynechala.

Riešenie:

(1) Prvých päťdesiat celých kladných čísel (t. j. prirodzených čísel) môžeme považovať za členy konečnej aritmetickej postupnosti s diferenciou  $d = 1$ , prvým členom  $a_1 = 1$  a päťdesiatym členom  $a_{50} = 50$ . Súčet prvých päťdesiatich členov tejto postupnosti je  $s_{50} = \frac{50}{2} \cdot (a_1 + a_{50}) = 25 \cdot (1 + 50) = 25 \cdot 51 = 1275$ .

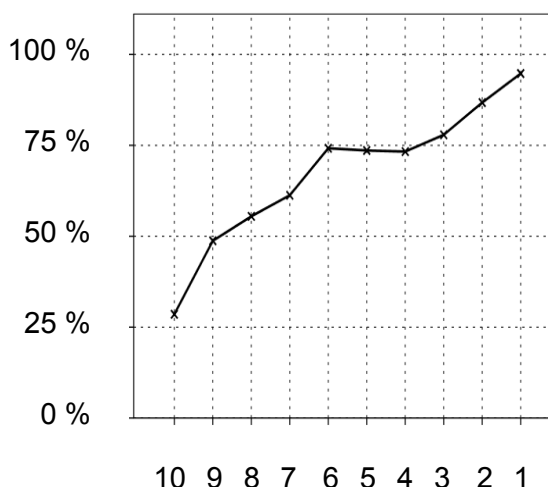
(2) Keďže jedno číslo Jana zabudla, jej súčet je menší ako 1 275 práve o hodnotu vynechaného čísla a je deliteľný číslom 60. Ak najväčšie číslo v súčte môže byť 50 a súčet je deliteľný číslom 60, stačí nájsť najväčší násobok čísla 60 menší ako maximálny súčet 1275 a to bude hodnota Janinho súčtu. Tým je číslo  $1200 + 60 = 1260$ . Rozdiel v získaných súčtoch je spôsobený vynechaným číslom, ktorým je číslo  $1275 - 1260 = 15$ .

(3) Jana pri sčítaní vynechala číslo 15.

Štatistické vyhodnotenie:

|             |           |        |
|-------------|-----------|--------|
| úspešnosť   | celková   | 67,4 % |
|             | žiaci GYM | 70,4 % |
|             | žiaci SOŠ | 62,1 % |
|             | chlapci   | 67,9 % |
|             | dievčatá  | 66,6 % |
| neriešenosť |           | 10,5 % |
| citlivosť   |           | 52,1 % |
| P. Bis.     |           | 31,8   |

Graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí:



obťažnosť (IRT)

– 0,891

rozlišovacia schopnosť (IRT)

0,555

| Najčastejšie odpovede a frekvencia ich výskytu:                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |            |                                                                                                                                                                                                                                      |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| odpoveď                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | frekvencia | predpokladaná príčina uvedenej odpovede                                                                                                                                                                                              |
| 15                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 67,4 %     | správna odpoveď                                                                                                                                                                                                                      |
| –                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 10,5 %     | neuvedená odpoveď                                                                                                                                                                                                                    |
| 30                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 3,4 %      | Žiaci zrejme pri výpočte urobili numerickú chybu.                                                                                                                                                                                    |
| 50                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 2,6 %      | Žiaci v (1) určili nesprávne súčet, za posledné číslo považovali 49 a vypočítali $s_{50} = 25 \cdot (1 + 49) = 25 \cdot 50 = 1\,250$ . V (2) potom rozdielom vypočítali $1\,250 - 1\,200 = 50$ ako chýbajúce číslo.                  |
| 25                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 2,4 %      | Žiaci v (1) zle vypočítali súčet všetkých čísel. Zabudli započítať posledné číslo 50 a dostali súčet 1 225. V (2) potom určili rozdielom $1\,225 - 1\,200 = 25$ odpoveď 25.                                                          |
| 45                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 1,3 %      | Žiaci sa zrejme poplietli a stratili prehľad, či ich vypočítaný súčet je väčší alebo menší ako hľadaný súčet. K vypočítanému súčtu v (1) <i>dopočítali</i> 45, aby získali najbližší násobok čísla 60, ktorý určili ako číslo 1 320. |
| <p>Komentár:</p> <p>Úloha vyžadovala znalosť aritmetickej postupnosti a spôsobu výpočtu súčtu jej niekoľkých prvých členov. Dve tretiny žiakov uviedli správnu odpoveď. Úloha pre žiakov nebola až taká obťažná, ako sa predpokladalo. Všetky skupiny ju riešili s približne rovnakou priemernou úspešnosťou. Desatina žiakov na úlohu neuviedla odpoveď. Asi 1,3 % žiakov si neuvedomilo kontext úlohy a ako odpoveď uviedlo číslo väčšie ako 50. Úloha dobre odlišila najmä poslednú, v teste celkove najmenej úspešnú skupinu žiakov.</p> |            |                                                                                                                                                                                                                                      |

## Príklad č. 10

Téma: 3.2 Analytická geometria v rovine

Testované myšlienkové operácie: zložitejšie myšlienkové operácie

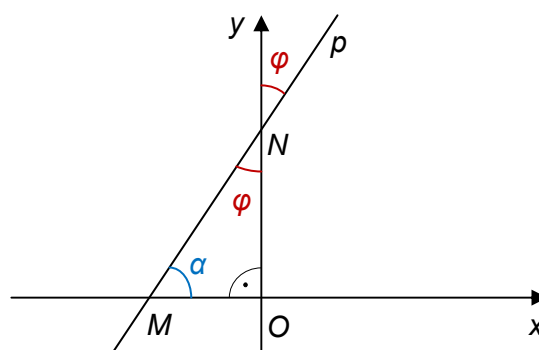
Predpokladaná obťažnosť: stredne ťažká úloha

Zadanie:

Daná je priamka  $p$  určená rovnicou  $y = \frac{7}{2}x + 2012$ . Vypočítajte v stupňoch veľkosť uhla priamky  $p$  s osou  $y$ .

Riešenie:

(1) Zo zadania vieme vyčítať smernicu priamky  $k = \frac{7}{2}$ , ktorá je hodnotou tangensu smerového uhla  $\alpha$  priamky  $p$  (uhol priamky s kladnou časťou osi  $x$ ). Preto  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{7}{2}$ , odkiaľ  $\alpha \doteq 74,05^\circ$ .



(2) Hľadaný uhol  $\varphi$  priamky  $p$  s osou  $y$  určíme v pravouhlom trojuholníku  $MON$ , kde  $M$  je priesečník priamky  $p$  s osou  $x$  a  $N$  je priesečník priamky  $p$  s osou  $y$ :  $\varphi = 180^\circ - 90^\circ - \alpha \doteq 180^\circ - 90^\circ - 74,05^\circ \doteq 15,95^\circ$ .

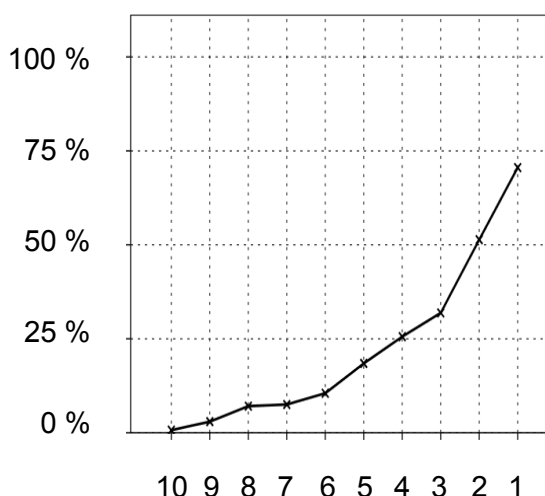
Veľkosť uhla priamky  $p$  s osou  $y$  je  $15,95^\circ$ .

(3) Iný spôsob: Vypočítame súradnice priesečníkov  $M$  a  $N$ , následne dĺžky odvesien pravouhlého trojuholníka  $MON$  a pomocou funkcie tangens veľkosť hľadaného uhla  $\varphi$ .

Štatistické vyhodnotenie:

|             |           |        |
|-------------|-----------|--------|
| úspešnosť   | celková   | 22,7 % |
|             | žiaci GYM | 30,5 % |
|             | žiaci SOŠ | 8,6 %  |
|             | chlapci   | 21,5 % |
|             | dievčatá  | 24,8 % |
| neriešenosť |           | 32,8 % |
| citlivosť   |           | 59,1 % |
| P. Bis.     |           | 43,3   |

Graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí:



obťažnosť (IRT)

1,034

rozlišovacia schopnosť (IRT)

0,964

| Najčastejšie odpovede a frekvencia ich výskytu:                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |            |                                                                                                                                                                  |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| odpoveď                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | frekvencia | predpokladaná príčina uvedenej odpovede                                                                                                                          |
| –                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 32,8 %     | neuvedená odpoveď                                                                                                                                                |
| 15,95                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 22,7 %     | správna odpoveď                                                                                                                                                  |
| 74,05                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 8,1 %      | Žiaci riešili úlohu správnym postupom a bez numerických chýb, ale s myšlienkovou chybou. Ako odpoveď uviedli veľkosť uhla priamky $p$ s kladnou časťou osi $x$ . |
| 45                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 2,5 %      | Žiaci zrejme riešili úlohu úvahou alebo odhadovali výsledok z načrtnutého obrázka. Pri odpovedi 90 však nedomysleli, že priamka by bola rovnobežná s osou $x$ .  |
| 90                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 2,2 %      |                                                                                                                                                                  |
| 16                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 1,6 %      | Žiaci riešili úlohu správnym postupom a bez numerických chýb, ale pri zápise svojej odpovede do odpovedového hárka výsledok zaokrúhlili na celé stupne.          |
| <p>Komentár:</p> <p>Úloha vyžadovala znalosť významu jednotlivých členov v parametrickej rovnici priamky, rozumieť pojmu smernica priamky alebo vedieť vypočítať súradnice priesečníkov priamky so súradnicovými osami a následne vypočítať veľkosť vnútorného uhla v trojuholníku. Úloha bola pre žiakov náročnejšia, ako sa predpokladalo. Úloha bola takmer veľmi obtiažná pre väčšinu žiakov, pre žiakov SOŠ bola dokonca extrémne obtiažná. Zrejme neobjavili žiadny postup, ktorým by sa dopracovali k riešeniu úlohy. Takmer tretina žiakov na úlohu neuviedla odpoveď. 8,1 % žiakov úlohu riešilo, ale zrejme im nebolo úplne jasné, čo vypočítali, pretože ako odpoveď uviedli veľkosť uhla priamky <math>p</math> s kladnou časťou osi <math>x</math>. Úloha dobre rozlíšila dve v teste celkove najúspešnejšie skupiny žiakov. Polovicu v teste celkove menej úspešných žiakov úloha nerozlíšila, pretože pre týchto žiakov bola úloha extrémne obtiažná a riešili ju s nízkou úspešnosťou.</p> |            |                                                                                                                                                                  |

## Príklad č. 11

Téma: 5.1 Kombinatorika a pravdepodobnosť

Testované myšlienkové operácie: zložitejšie myšlienkové operácie

Predpokladaná obťažnosť: stredne ťažká úloha

Zadanie:

Na medzinárodnej konferencii zasadá 40 účastníkov. Každý účastník ovláda aspoň jeden z jazykov: anglický jazyk, nemecký jazyk alebo francúzsky jazyk. Desať účastníkov ovláda len anglický jazyk, sedem účastníkov len nemecký jazyk a deväť účastníkov len francúzsky jazyk. Vypočítajte, aká je pravdepodobnosť, že dvaja náhodne vybraní účastníci konferencie ovládajú aspoň dva z uvedených jazykov. Výsledok zapíšte ako číslo z intervalu  $\langle 0;1 \rangle$ .

Riešenie:

I. spôsob pochopenia zadania: Každý z dvoch náhodne vybraných účastníkov konferencie ovláda aspoň dva cudzie jazyky.

(1) Práve jeden cudzí jazyk ovláda podľa zadania  $10 + 7 + 9 = 26$  účastníkov. Ak každý účastník konferencie ovláda aspoň jeden cudzí jazyk, tak každý zo zvyšných  $40 - 26 = 14$  účastníkov ovláda aspoň dva cudzie jazyky. Z nich môžeme ľubovoľných dvoch vybrať

$$\binom{14}{2} = \frac{14!}{12! \cdot 2!} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12!}{12! \cdot 2 \cdot 1} = 91 \text{ spôsobmi.}$$

(2) Počet možností, ako môžeme zo 40 účastníkov vybrať ľubovoľných dvoch, vypočítame

$$\text{kombinačným číslom } \binom{40}{2} = \frac{40!}{38! \cdot 2!} = \frac{40 \cdot 39 \cdot 38!}{38! \cdot 2 \cdot 1} = 780.$$

(3) Hľadanú pravdepodobnosť vypočítame ako podiel počtu vhodných možností výberu vhodných účastníkov z (2) a počtu všetkých možností výberu ľubovoľných dvoch účastníkov

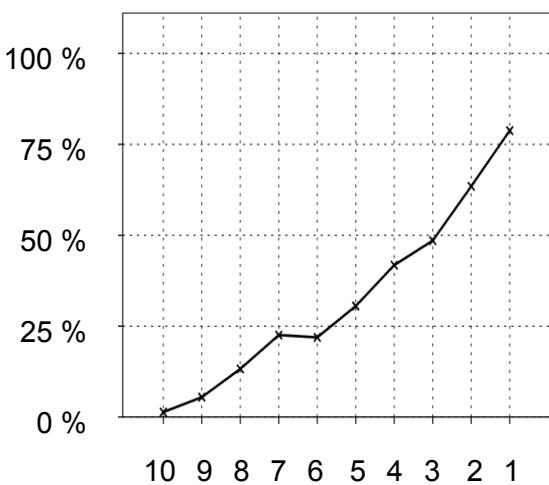
$$\text{z (3) ako } P = \frac{91}{780} \doteq 0,12.$$

II. spôsob pochopenia zadania: Dvaja náhodne vybraní účastníci konferencie ovládajú spolu aspoň dva cudzie jazyky.

(4) Uvedený stav nastane vždy, s výnimkou možností, keď obaja ovládajú jeden ten istý jazyk, čo je  $\binom{10}{2} + \binom{7}{2} + \binom{9}{2} = \frac{10!}{8! \cdot 2!} + \frac{7!}{5! \cdot 2!} + \frac{9!}{7! \cdot 2!} = 45 + 21 + 36 = 102$  možností.

$$\text{Hľadaná pravdepodobnosť potom bude } P = 1 - \frac{102}{780} \doteq 0,87.$$

(5) Hľadaná pravdepodobnosť je 0,12 alebo 0,87.

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |            |                                                                                                                                                                                                         |                                                                                    |  |       |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|--|-------|
| Štatistické vyhodnotenie:                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |            |                                                                                                                                                                                                         | Graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí:                                     |  |       |
| úspešnosť                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | celková    | 32,7 %                                                                                                                                                                                                  |  |  |       |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | žiaci GYM  | 43,0 %                                                                                                                                                                                                  |                                                                                    |  |       |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | žiaci SOŠ  | 14,3 %                                                                                                                                                                                                  |                                                                                    |  |       |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | chlapci    | 30,1 %                                                                                                                                                                                                  |                                                                                    |  |       |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | dievčatá   | 37,8 %                                                                                                                                                                                                  |                                                                                    |  |       |
| neriešenosť                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |            | 17,4 %                                                                                                                                                                                                  |                                                                                    |  |       |
| citlivosť                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |            | 67,7 %                                                                                                                                                                                                  |                                                                                    |  |       |
| P. Bis.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |            | 43,8                                                                                                                                                                                                    |                                                                                    |  |       |
| obťažnosť (IRT)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |            | 0,650                                                                                                                                                                                                   | rozlišovacia schopnosť (IRT)                                                       |  | 0,862 |
| Najčastejšie odpovede a frekvencia ich výskytu:                                                                                                                                                                                                                                                                                               |            |                                                                                                                                                                                                         |                                                                                    |  |       |
| odpoveď                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | frekvencia | predpokladaná príčina uvedenej odpovede                                                                                                                                                                 |                                                                                    |  |       |
| 0,12                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 32,2 %     | správna odpoveď                                                                                                                                                                                         |                                                                                    |  |       |
| 0,35                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 17,7 %     | Myšlienková chyba: Žiaci počítali hľadanú pravdepodobnosť ako podiel počtu účastníkov ovládajúcich aspoň dva jazyky a počtu všetkých účastníkov ( $\frac{14}{40} = 0,35$ ) a nie počtu vhodných dvojíc. |                                                                                    |  |       |
| –                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 17,4 %     | neuvedená odpoveď                                                                                                                                                                                       |                                                                                    |  |       |
| 0,14                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 2,3 %      | Myšlienková chyba: Žiaci zrejme vydělili počet účastníkov ovládajúcich aspoň dva jazyky stomi (získali desatinné číslo).                                                                                |                                                                                    |  |       |
| 0,65                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 1,8 %      | Myšlienková chyba: Žiaci počítali pravdepodobnosť ako podiel počtu účastníkov ovládajúcich jeden jazyk a počtu všetkých účastníkov ( $\frac{10+7+9}{40} = 0,65$ ) a nie počtu vhodných dvojíc.          |                                                                                    |  |       |
| 0,87                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 0,5 %      | správna odpoveď                                                                                                                                                                                         |                                                                                    |  |       |
| Komentár:                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |            |                                                                                                                                                                                                         |                                                                                    |  |       |
| Úloha vyžadovala schopnosť identifikovať druh kombinatorickej úlohy a počítať s kombinačnými číslami. Oveľa úspešnejší boli žiaci GYM než žiaci SOŠ (stredne vecne významný rozdiel) a dievčatá ako chlapci (mierne vecne významný rozdiel). Úloha dobre rozlíšila všetky výkonnostné skupiny žiakov, mala dobrú hodnotu citlivosti a P. Bis. |            |                                                                                                                                                                                                         |                                                                                    |  |       |

## Príklad č. 12

Téma: 5.2 Štatistika

Testované myšlienkové operácie: zložitejšie myšlienkové operácie

Predpokladaná obťažnosť: stredne ťažká úloha

Zadanie:

Priemerný vek všetkých členov rodiny (mamy, otca a detí) je 23 rokov. Priemerný vek rodičov je 45,5 roka. Určte počet detí v tejto rodine, ak priemerný vek všetkých detí je 14 rokov.

Riešenie:

(1) Priemerný vek členov rodiny by sme určili ako súčet veku každého člena rodiny delený počtom členov rodiny. Neznámy počet detí označíme neznámou  $x$ , rodičia sú dvaja.

(2) Zostavíme podľa (1) rovnicu vyjadrujúcu priemerný vek členov rodiny:

$$\frac{14 \cdot x + 45,5 \cdot 2}{x+2} = 23.$$

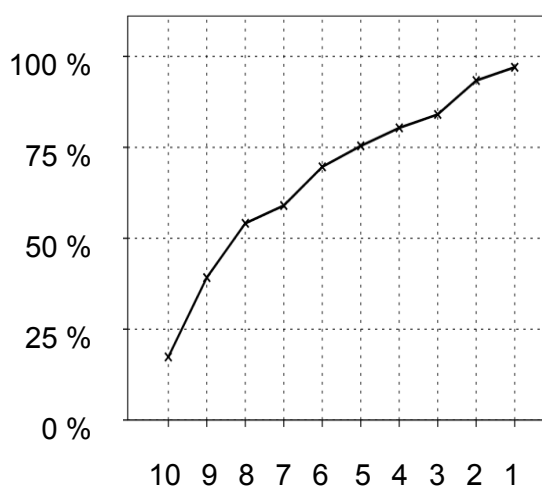
Po zjednodušení získame rovnicu  $14x + 91 = 23x + 46$ , z ktorej vypočítame  $x = 5$ .

(3) V tejto rodine je 5 detí.

Štatistické vyhodnotenie:

|                 |           |         |
|-----------------|-----------|---------|
| úspešnosť       | celková   | 66,9 %  |
|                 | žiaci GYM | 71,7 %  |
|                 | žiaci SOŠ | 58,4 %  |
|                 | chlapci   | 68,6 %  |
|                 | dievčatá  | 63,8 %  |
| neriešenosť     |           | 12,4 %  |
| citlivosť       |           | 66,9 %  |
| P. Bis.         |           | 42,9    |
| obťažnosť (IRT) |           | - 0,663 |

Graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí:



|                              |  |       |
|------------------------------|--|-------|
| rozlišovacia schopnosť (IRT) |  | 0,817 |
|------------------------------|--|-------|

| Najčastejšie odpovede a frekvencia ich výskytu: |            |                                                                                                                                                                                                                                      |
|-------------------------------------------------|------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| odpoveď                                         | frekvencia | predpokladaná príčina uvedenej odpovede                                                                                                                                                                                              |
| 5                                               | 66,9 %     | správna odpoveď                                                                                                                                                                                                                      |
| –                                               | 12,4 %     | neuvedená odpoveď                                                                                                                                                                                                                    |
| 3                                               | 9,3 %      | Žiaci zrejme riešili úlohu odhadom alebo pokusným dosadzovaním reálneho počtu detí rodine. Väčšina zrejme pri dosadzovaní a overovaní svojho odhadu urobila numerickú chybu alebo svoj odhad ani neskontrolovala skúškou správnosti. |
| 2                                               | 4,3 %      |                                                                                                                                                                                                                                      |
| 4                                               | 3,1 %      |                                                                                                                                                                                                                                      |

Komentár:

Úloha vyžadovala znalosť pojmu aritmetický priemer a základných výpočtov zo štatistiky. Dve tretiny žiakov uviedli správnu odpoveď. Odhad stredne obťažnej úlohy sa nepotvrdil. Úloha dosiahla veľmi dobré hodnoty štatistických ukazovateľov – citlivosti, korelačného koeficientu *P. Bis.* a neriešenosti. Úloha dobre rozlíšila všetkých žiakov, najlepšie posledné dve výkonnostné skupiny.

## Príklad č. 13

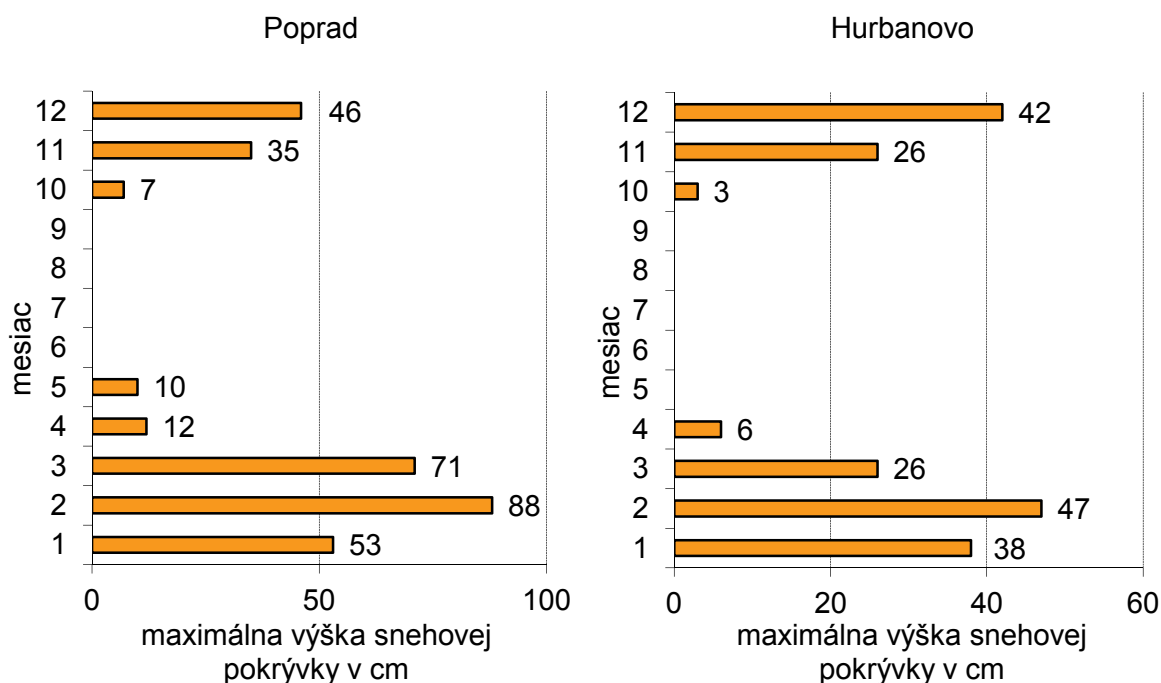
Téma: 5.2 Štatistika

Testované myšlienkové operácie: zložitejšie myšlienkové operácie

Predpokladaná obťažnosť: stredne ťažká úloha

Zadanie:

Grafy na obrázkoch znázorňujú maximálnu výšku snehovej pokrývky nameranú každý mesiac meteorologickými stanicami v Poprade a v Hurbanove. Vypočítajte, o koľko centimetrov je priemerná maximálna výška snehovej pokrývky za mesiace november (11), december (12), január (1), február (2) a marec (3) v Poprade väčšia ako v Hurbanove.



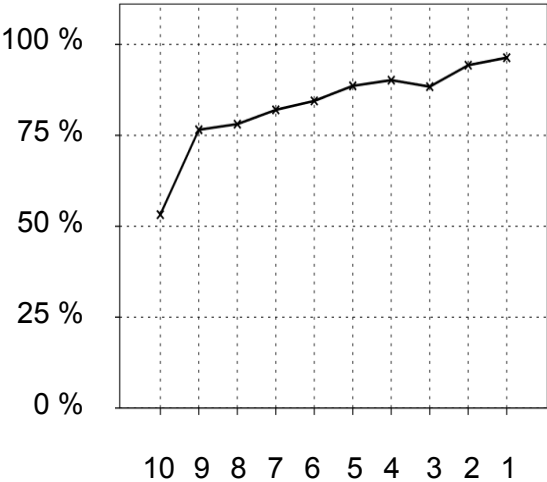
Riešenie:

(1) Priemerná maximálna výška snehovej pokrývky v centimetroch za požadovaných 5 mesiacov v Poprade je  $\frac{53+88+71+35+46}{5} = \frac{293}{5} = 58,6$ .

(2) Priemerná maximálna výška snehovej pokrývky v centimetroch za požadovaných 5 mesiacov v Hurbanove je  $\frac{38+47+26+26+42}{5} = \frac{179}{5} = 35,8$ .

(3) Rozdiel vypočítaných hodnôt v (1) a (2) je  $58,6 - 35,8 = 22,8$ , čo je požadovaný údaj zo zadania úlohy vypočítaný v centimetroch.

(4) Riešením úlohy je číslo 22,8.

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |            |                                                                                                                                                                                                                                           |                                                                                    |  |       |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|--|-------|
| Štatistické vyhodnotenie:                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |            |                                                                                                                                                                                                                                           | Graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí:                                     |  |       |
| úspešnosť                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | celková    | 83,2 %                                                                                                                                                                                                                                    |  |  |       |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | žiaci GYM  | 85,6 %                                                                                                                                                                                                                                    |                                                                                    |  |       |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | žiaci SOŠ  | 79,0 %                                                                                                                                                                                                                                    |                                                                                    |  |       |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | chlapci    | 83,2 %                                                                                                                                                                                                                                    |                                                                                    |  |       |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | dievčatá   | 83,3 %                                                                                                                                                                                                                                    |                                                                                    |  |       |
| neriešenosť                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |            | 2,0 %                                                                                                                                                                                                                                     |                                                                                    |  |       |
| citlivosť                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |            | 30,4 %                                                                                                                                                                                                                                    |                                                                                    |  |       |
| P. Bis.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |            | 23,4                                                                                                                                                                                                                                      |                                                                                    |  |       |
| obťažnosť (IRT)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |            | – 2,044                                                                                                                                                                                                                                   | rozlišovacia schopnosť (IRT)                                                       |  | 0,512 |
| Najčastejšie odpovede a frekvencia ich výskytu:                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |            |                                                                                                                                                                                                                                           |                                                                                    |  |       |
| odpoveď                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | frekvencia | predpokladaná príčina uvedenej odpovede                                                                                                                                                                                                   |                                                                                    |  |       |
| 22,8                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 83,2 %     | správna odpoveď                                                                                                                                                                                                                           |                                                                                    |  |       |
| –                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 2,0 %      | neuvedená odpoveď                                                                                                                                                                                                                         |                                                                                    |  |       |
| 114                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | 1,9 %      | Myšlienková chyba: Žiaci v (1) a (2) spočítali iba súčet maximálnych výšok snehových pokrývok za požadovaných 5 mesiacov, nevypočítali ich priemer vydelením piatimi. Následne v (3) vypočítali iba rozdiel hodnôt zistených v (1) a (2). |                                                                                    |  |       |
| 1,64                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 1,0 %      | Myšlienková chyba: Žiaci vydělili súčet maximálnych výšok snehových pokrývok za uvedené mesiace vypočítané v oboch mestách $293 : 179 \div 1,64$ .                                                                                        |                                                                                    |  |       |
| 23                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 0,6 %      | Žiaci sa v (1) alebo (2) pomýlili pri súčte v čitateli o 1 alebo správne vypočítaný údaj v (3) zaokrúhlili na celé centimetre.                                                                                                            |                                                                                    |  |       |
| Komentár:                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |            |                                                                                                                                                                                                                                           |                                                                                    |  |       |
| Pri riešení úlohy bolo potrebné správne pochopiť zadanie úlohy a vypočítať aritmetický priemer. Nepotvrdil sa predpoklad stredne obťažnej úlohy. Úloha bola pre všetky skupiny žiakov veľmi ľahká. Rozlišovacia sila úlohy bola preto slabá, dobre odlíšila iba v teste celkove najmenej úspešnú desatinu žiakov. Korelácia úspešnosti žiakov položky s položkou č. 12, ktorá tiež obsahovala výpočet aritmetického priemeru, bola nízka ( $r = 0,164$ ). Problém so zostavením rovnice v úlohe č. 12 bol teda podstatnejší ako výpočet priemeru. |            |                                                                                                                                                                                                                                           |                                                                                    |  |       |

## Príklad č. 14

Téma: 1.4 Rovnice, nerovnice a ich sústavy

Testované myšlienkové operácie: zložitejšie myšlienkové operácie

Predpokladaná obťažnosť: stredne ťažká úloha

Zadanie:

Obchodník kúpil 500 kg hrozna za 750 €. Hrozno roztriedil na kvalitnejšie a menej kvalitné. Kvalitnejšie hrozno predal so ziskom 20 %, menej kvalitné so stratou 6 %. Celkový zisk obchodníka z predaja všetkého hrozna bol 91,50 €. Vypočítajte, koľko kilogramov kvalitnejšieho hrozna obchodník predal.

Riešenie:

(1) Obchodník kúpil 1 kg hrozna za  $750 : 500 = 1,5$  €. Hmotnosť kvalitnejšieho hrozna v kilogramoch označíme  $x$ , hmotnosť menej kvalitného potom bude  $(500 - x)$  kilogramov.

(2) Predajom  $x$  kilogramov kvalitnejšieho hrozna obchodník získal  $0,2 \cdot 1,5 = 0,3$  € za každý kilogram, naopak predajom menej kvalitných  $(500 - x)$  kilogramov hrozna stratil  $0,06 \cdot 1,5 = 0,09$  € za každý kilogram. Takto celkovo získal 91,50 €. Cenovú bilanciu predaja hrozna zapíšeme rovnicou  $0,3 \cdot x - 0,09 \cdot (500 - x) = 91,50$ .

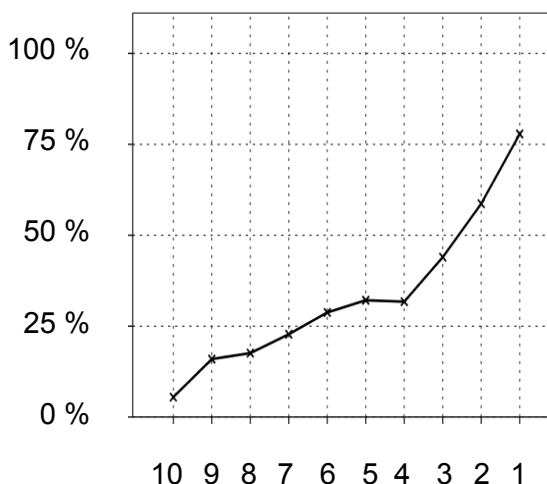
(3) Rovnicu z (2) zjednodušíme na  $0,3x - 45 + 0,09x = 91,50$  a na  $0,39x = 136,50$ . Odtiaľ vypočítame  $x = 350$ , čo je podľa (1) hmotnosť kvalitnejšieho hrozna v kilogramoch.

(4) Obchodník predal 350 kilogramov kvalitnejšieho hrozna.

Štatistické vyhodnotenie:

|             |           |        |
|-------------|-----------|--------|
| úspešnosť   | celková   | 33,5 % |
|             | žiaci GYM | 35,7 % |
|             | žiaci SOŠ | 29,5 % |
|             | chlapci   | 35,6 % |
|             | dievčatá  | 29,5 % |
| neriešenosť |           | 30,6 % |
| citlivosť   |           | 57,5 % |
| P. Bis.     |           | 35,7   |

Graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí:



|                 |       |                              |       |
|-----------------|-------|------------------------------|-------|
| obťažnosť (IRT) | 0,777 | rozlišovacia schopnosť (IRT) | 0,615 |
|-----------------|-------|------------------------------|-------|

| Najčastejšie odpovede a frekvencia ich výskytu:                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |            |                                                                                                                                                                                                                                                        |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| odpoveď                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | frekvencia | predpokladaná príčina uvedenej odpovede                                                                                                                                                                                                                |
| 350                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 33,5 %     | správna odpoveď                                                                                                                                                                                                                                        |
| –                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 30,6 %     | neuvedená odpoveď                                                                                                                                                                                                                                      |
| 100                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 2,6 %      | Žiaci sa zrejme pri výpočte dopustili numerickej chyby alebo zle pochopili zadanie úlohy.                                                                                                                                                              |
| 61                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 1,0 %      |                                                                                                                                                                                                                                                        |
| 305                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 0,8 %      | Myšlienková chyba pri pochopení zadania: Obchodníkov zisk 91,50 € priradili iba predaju kvalitnejšieho hrozna so ziskom 20 %, neuvážili, že výsledný zisk bol súčtom zisku z predaja kvalitnejšieho hrozna a straty z predaja menej kvalitného hrozna. |
| 150                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 0,8 %      | Žiaci zrejme postupovali správne a nedopustili sa numerickej chyby, ale buď nemali jasne stanovené, ktorú hmotnosť počítajú alebo boli nepozorní a ako odpoveď uviedli hmotnosť menej kvalitného hrozna.                                               |
| <p>Komentár:</p> <p>Úloha vyžadovala schopnosť vypočítať slovnú úlohu, či už pomocou zostavenia rovnice s neznámou alebo úvahou, zručnosť pri počítaní s percentami a pri zápise výrazov s premennými. Tretina žiakov uviedla správnu odpoveď. Takmer rovnaký počet žiakov neuviedol odpoveď. Všetky skupiny žiakov dosiahli veľmi podobné porovnateľné výsledky. Úloha výrazne odlíšila prvé tri skupiny v teste celkovo úspešnejších žiakov.</p> |            |                                                                                                                                                                                                                                                        |

## Príklad č. 15

Téma: 4.5 Telesá

Testované myšlienkové operácie: zložitejšie myšlienkové operácie

Predpokladaná obťažnosť: stredne ťažká úloha

Zadanie:

Štvorcová podstava pravidelného ihlana  $ABCDV$  (pozrite obrázok) má obsah  $144 \text{ cm}^2$ . Veľkosť uhla bočných stien  $ABV$ ,  $BCV$ ,  $CDV$  a  $ADV$  s podstavou je  $40^\circ$ . Určte v centimetroch kubický objem ihlana  $ABCDV$ .

Riešenie:

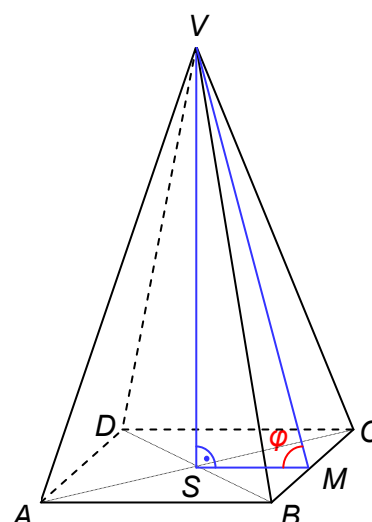
(1) Ak obsah štvorcovej podstavy je  $144 \text{ cm}^2$ , tak hrana podstavy je  $12 \text{ cm}$ . Uhol bočnej steny  $BCV$  s podstavou je  $\varphi = |\sphericalangle SMV| = 40^\circ$ ,  $S$  je stred podstavy,  $M$  je stred  $BC$ .

(2) Výšku ihlana  $v = |SV|$  vypočítame v pravouhlom trojuholníku  $VSM$  v centimetroch:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{|SV|}{|SM|}, \text{ odkiaľ } |SV| = |SM| \cdot \operatorname{tg} \varphi = 6 \cdot \operatorname{tg} 40^\circ = v.$$

(3) Objem ihlana je  $V = \frac{1}{3} S_p v = \frac{1}{3} \cdot 144 \cdot 6 \cdot \operatorname{tg} 40^\circ$ , odkiaľ  $V \doteq 241,66 \text{ cm}^3$ .

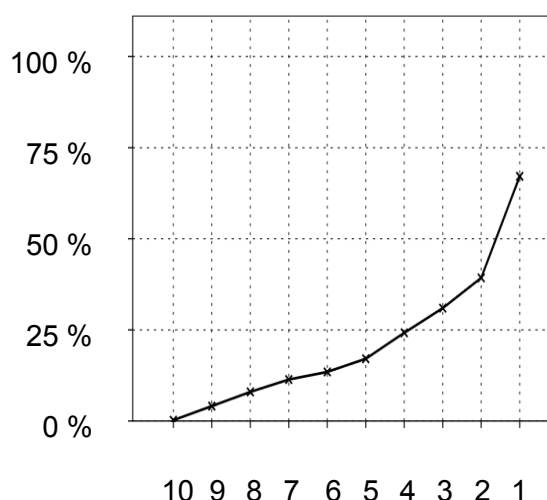
(4) Objem pravidelného ihlana  $ABCDV$  v centimetroch kubických je  $241,66$ .



Štatistické vyhodnotenie:

|             |           |        |
|-------------|-----------|--------|
| úspešnosť   | celková   | 21,6 % |
|             | žiaci GYM | 27,2 % |
|             | žiaci SOŠ | 11,4 % |
|             | chlapci   | 22,5 % |
|             | dievčatá  | 19,9 % |
| neriešenosť |           | 22,1 % |
| citlivosť   |           | 51,0 % |
| P. Bis.     |           | 38,1   |

Graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí:



obťažnosť (IRT)

1,202

rozlišovacia schopnosť (IRT)

0,809

| Najčastejšie odpovede a frekvencia ich výskytu:                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |            |                                                                                                                                                                                                   |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| odpoveď                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | frekvencia | predpokladaná príčina uvedenej odpovede                                                                                                                                                           |
| –                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 22,1 %     | neuvedená odpoveď                                                                                                                                                                                 |
| 241,66                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 21,6 %     | správna odpoveď                                                                                                                                                                                   |
| 341,76                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 13,7 %     | Myšlienková chyba v (1): žiaci nesprávne určili uhol bočnej steny s podstavou ako uhol bočnej hrany a podstavy, napr. $\angle SCV$ . Ďalšie výpočty (v nesprávnom trojuholníku) vykonali správne. |
| 241,44                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 2,1 %      | Nepresný výpočet. Žiaci postupovali správne, ale v (2) hodnotu vypočítanej výšky ihlana zaokrúhlili na dve desatinné miesta na 5,03. V (3) potom získali iba približnú hodnotu objemu ihlana.     |
| 240                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 1,7 %      | Nepresný výpočet. Žiaci postupovali správne, ale v (2) hodnotu vypočítanej výšky ihlana zaokrúhlili na celé centimetre na 5. V (3) potom vypočítali iba približnú hodnotu objemu ihlana.          |
| 724,98                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 0,9 %      | Chyba z nepozornosti: Žiaci počítali správne, ale v (3) nevydelili vypočítaný objem číslom 3.                                                                                                     |
| <p>Komentár:</p> <p>Úloha vyžadovala schopnosť správne identifikovať uhol bočnej steny a podstavy ihlana, následne previesť stereometrickú úlohu na planimetrickú, prehľad vo vzťahoch pre objemy a povrchy telies a zručnosť vo výpočte dĺžok strán v pravouhlom trojuholníku s využitím goniometrických funkcií. Dôležitá bola aj schopnosť počítat presne, prípadne využívať pamäť kalkulačky a vypočítané údaje v priebehu riešenia úlohy nezaokrúhľovať. Opäť sa ukázalo, že bežná, nie veľmi obtiažná stereometrická úloha vyžadujúca výpočet v telese s následnou správnou identifikáciou vhodného pravouhlého trojuholníka na planimetrické dopočítanie, je pre značnú časť žiakov veľmi obtiažná až neriešiteľná. Počet žiakov, ktorí na úlohu neuviedli odpoveď, bol väčší ako počet žiakov, ktorí uviedli správnu odpoveď. Približne 18 % žiakov počítalo úlohu s nesprávne identifikovaným uhlom zo zadania v kombinácii s nevhodným zaokrúhľovaním vypočítaných údajov a numerickými chybami. Približne 6 % žiakov si v priebehu štúdia pri počítaní úloh z trigonometrie zrejme neosvojilo nutnosť počítania s presnými hodnotami goniometrických funkcií z dôvodu vypočítania čo najpresnejšieho výsledku. Úlohu správne dopočítal iba asi každý ôsmy žiak SOŠ. Úloha dobre rozlíšila najmä najlepšiu desatinu žiakov, pre menej úspešnú polovicu žiakov bola rovnako takmer neriešiteľná. Výsledky IRT analýzy potvrdili, že úloha by dobre rozlišovala najmä úspešnejších žiakov, s úrovňou schopnosti vyššou ako 1.</p> |            |                                                                                                                                                                                                   |

## Príklad č. 16

Téma: 1.3 Teória čísel

Testované myšlienkové operácie: zložitejšie myšlienkové operácie

Predpokladaná obťažnosť: stredne ťažká úloha

Zadanie:

V trojcifernom čísle je počet desiatok o štyri väčší ako počet jednotiek. Ak v tomto čísle vymeníme posledné dve cifry a získané číslo sčítame s pôvodným číslom, dostaneme súčet 310. Určte pôvodné trojciferné číslo.

Riešenie:

(1) Počet jednotiek v pôvodnom trojcifernom čísle označíme neznámou  $x$ , podľa zadania počet desiatok pôvodného čísla bude  $(x + 4)$ . Hodnota pôvodného čísla je potom  $\overline{1(x+4)x} = 100 \cdot 1 + 10 \cdot (x + 4) + 1 \cdot x = 140 + 11x$ .

(2) Po výmene posledných dvoch cifier pôvodného čísla dostaneme nové číslo s hodnotou  $\overline{1x(x+4)} = 100 \cdot 1 + 10 \cdot x + 1 \cdot (x + 4) = 104 + 11x$ .

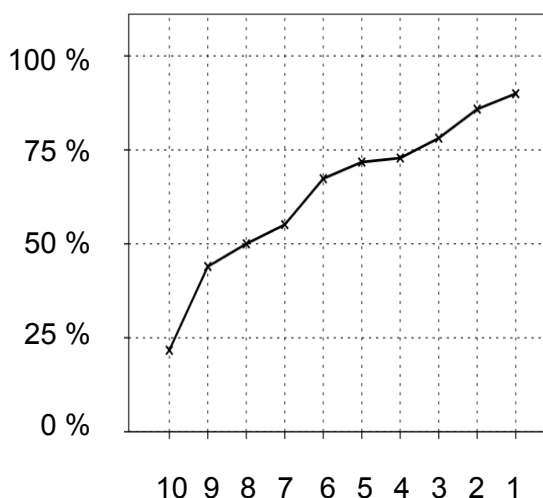
(3) Podľa zadania zostavíme rovnicu vyjadrujúcu súčet oboch čísel rovný číslu 310, z ktorej vypočítame neznámu  $x$ :  $140 + 11x + 104 + 11x = 310$ , odkiaľ  $22x = 66$  a  $x = 3$ .

(4) Podľa (3) a (1) je pôvodné číslo  $\overline{1(x+4)x} = \overline{1(3+4)3} = 173$ . Úlohu možno riešiť aj pokusne s cifrou 1 na mieste stoviek a hľadaním cifry o štyri väčšej na mieste stoviek ako na mieste jednotiek. Možností nie je veľa.

Štatistické vyhodnotenie:

|             |           |        |
|-------------|-----------|--------|
| úspešnosť   | celková   | 63,7 % |
|             | žiaci GYM | 66,8 % |
|             | žiaci SOŠ | 58,1 % |
|             | chlapci   | 64,1 % |
|             | dievčatá  | 62,8 % |
| neriešenosť |           | 14,7 % |
| citlivosť   |           | 55,1 % |
| P. Bis.     |           | 33,5   |

Graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí:



|                 |         |                              |       |
|-----------------|---------|------------------------------|-------|
| obťažnosť (IRT) | - 0,676 | rozlišovacia schopnosť (IRT) | 0,568 |
|-----------------|---------|------------------------------|-------|

| Najčastejšie odpovede a frekvencia ich výskytu:                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |            |                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| odpoveď                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | frekvencia | predpokladaná príčina uvedenej odpovede                                                                                                                                                                                                                                                    |
| 173                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 63,7 %     | správna odpoveď                                                                                                                                                                                                                                                                            |
| –                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 14,7 %     | neuvedená odpoveď                                                                                                                                                                                                                                                                          |
| 182                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 9,4 %      | Žiaci urobili zásadnú chybu pri čítaní zadania, keď časť vety „o štyri väčší“ prečítali alebo pochopili ako „štyrikrát väčší“. Preto našli vhodnú cifru 2 a k nej štyrikrát väčšiu cifru 8.                                                                                                |
| 155                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 1,8 %      | Žiaci našli číslo, z ktorého po výmene uvedených cifier a následnom sčítaní dvoch čísel získali správny súčet, ale nedodržali podmienku pre hľadané dve cifry, uvedenú v zadaní.                                                                                                           |
| 128                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 1,7 %      | Žiaci urobili zásadnú chybu pri čítaní zadania, keď časť vety „o štyri väčší“ prečítali alebo pochopili ako „štyrikrát väčší“. Preto našli vhodnú cifru 2 a k nej štyrikrát väčšiu cifru 8. Ďalšiu chybu urobili, keď podľa zadania nesprávne umiestnili väčšiu cifru na miesto jednotiek. |
| 137                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 1,1 %      | Žiaci našli správne cifry, ale do odpoveďového hárka uviedli číslo, ktoré vzniklo po výmene cifier.                                                                                                                                                                                        |
| <p>Komentár:</p> <p>Úloha vyžadovala znalosť pozičnej desiatkovej sústavy a skúsenosť s riešením úloh z teórie čísel pomocou rovníc alebo trpezlivosť pri hľadaní možných výsledkov a overovaní ich správnosti. Predpokladáme, že väčšina žiakov riešila úlohu pokusne. Takmer dve tretiny žiakov vyriešili úlohu správne. Približne 13 % žiakov našlo číslo, ktoré po výmene cifier a sčítaní s pôvodným číslom poskytlo správny súčet, ale cifry v čísle nevyhovovali podmienke zadania úlohy. Niekoľko žiakov bolo nepozorných pri zápise odpovede a namiesto pôvodného čísla ako odpoveď zapísali nové číslo s vymenenými ciframi.</p> <p>Úspešnosť všetkých skupín žiakov bola približne rovnaká. Necelých 15 % žiakov na úlohu neuviedlo odpoveď. Úloha najlepšie odlíšila poslednú skupinu žiakov v teste celkove najmenej úspešnú.</p> |            |                                                                                                                                                                                                                                                                                            |

## Príklad č. 17

Téma: 4.4 Lineárne útvary v priestore – metrické úlohy

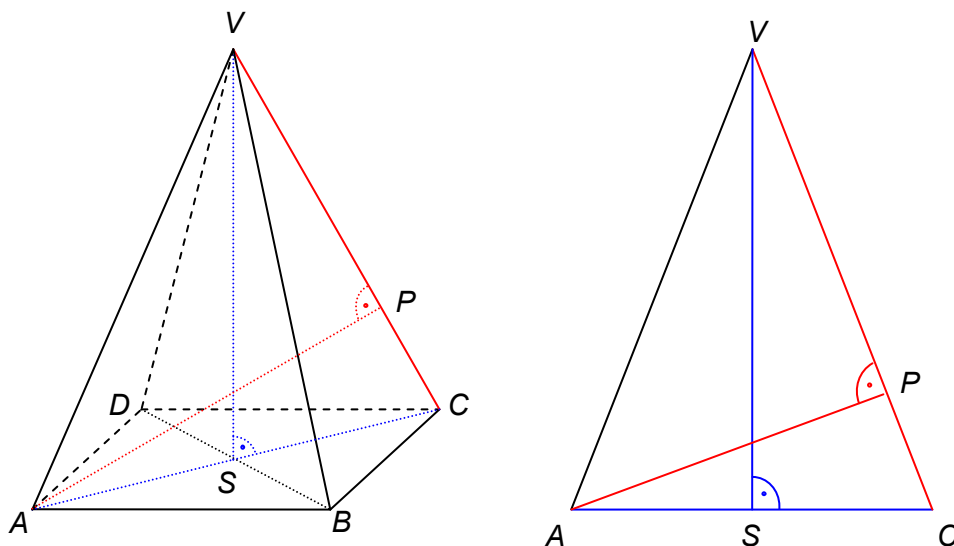
Testované myšlienkové operácie: zložitejšie myšlienkové operácie

Predpokladaná obťažnosť: stredne ťažká úloha

Zadanie:

Pravidelný ihlan  $ABCDV$  so štvorcovou podstavou (pozrite obrázok) má výšku 8 cm. Bočné hrany  $AV$ ,  $BV$ ,  $CV$  a  $DV$  majú dĺžku 10 cm. Určte v centimetroch vzdialenosť vrcholu  $A$  od bočnej hrany  $CV$ .

Riešenie:



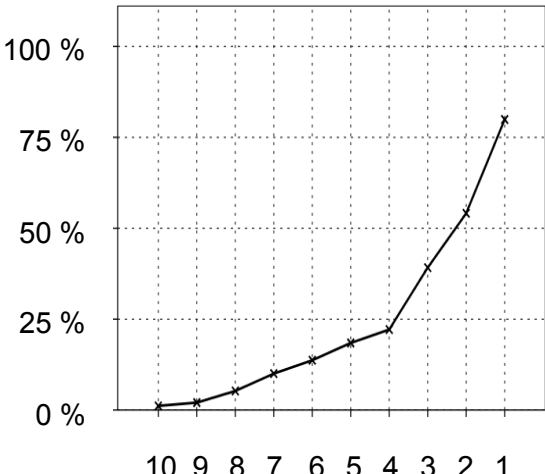
(1) Vrchol  $A$  a bočná hrana  $CV$  určujú rovinu  $ACV$ . Vzdialenosť vrcholu  $A$  od hrany  $CV$  určíme v rovine  $ACV$  ako vzdialenosť bodu  $A$  od kolmého priemetu bodu  $A$  do hrany  $CV$ , ktorým je bod  $P$ . Preto  $|A; CV| = |AP|$ , pričom  $AP$  je výškou na stranu  $CV$  v trojuholníku  $ACV$ . Dĺžku  $AP$  vypočítame pomocou určenia obsahu trojuholníka  $ACV$  dvomi rôznymi spôsobmi využitím dvoch rôznych strán trojuholníka a k nim príslušných výšok.

(2) Dĺžku úsečky  $AC$  určíme pomocou jej polovičnej dĺžky  $SC$  v pravouhlom trojuholníku  $VSC$  Pytagorovou vetou:  $|SC|^2 = |CV|^2 - |SV|^2 \rightarrow |SC|^2 = 10^2 - 8^2$ , odkiaľ  $|SC| = 6$  cm. Potom  $|AC| = 2 \cdot |SC| = 2 \cdot 6 \text{ cm} = 12 \text{ cm}$ .

(3) Zostavíme rovnicu vyjadrujúcu rovnosť obsahov trojuholníka  $ACV$  rôzne zapísaných:

$$\frac{|CV| \cdot |AP|}{2} = \frac{|AC| \cdot |SV|}{2} \rightarrow |AP| = \frac{|AC| \cdot |SV|}{|CV|} = \frac{12 \cdot 8}{10} = \frac{48}{5} = 9,6 = |A; CV|, \text{ dĺžky sú v cm.}$$

(4) Vzdialenosť vrcholu  $A$  od bočnej hrany  $CV$  ihlana  $ABCDV$  v centimetroch je 9,6.

|                                                 |            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |                                                                                    |  |       |
|-------------------------------------------------|------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|--|-------|
| Štatistické vyhodnotenie:                       |            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | Graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí:                                     |  |       |
| úspešnosť                                       | celková    | 24,6 %                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |  |  |       |
|                                                 | žiaci GYM  | 33,4 %                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                    |  |       |
|                                                 | žiaci SOŠ  | 8,8 %                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                                                    |  |       |
|                                                 | chlapci    | 24,8 %                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                    |  |       |
|                                                 | dievčatá   | 24,3 %                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                    |  |       |
| neriešenosť                                     |            | 23,1 %                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                    |  |       |
| citlivosť                                       |            | 65,4 %                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                    |  |       |
| P. Bis.                                         |            | 47,8                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |                                                                                    |  |       |
| obťažnosť (IRT)                                 |            | 0,884                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | rozlišovacia schopnosť (IRT)                                                       |  | 1,097 |
| Najčastejšie odpovede a frekvencia ich výskytu: |            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |                                                                                    |  |       |
| odpoveď                                         | frekvencia | predpokladaná príčina uvedenej odpovede                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                                                    |  |       |
| 9,6                                             | 24,6 %     | správna odpoveď                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |                                                                                    |  |       |
| –                                               | 23,1 %     | neuvedená odpoveď                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                                                    |  |       |
| 12                                              | 15,6 %     | Myšlienková chyba: Žiaci za hľadanú vzdialenosť považovali dĺžku úsečky AC. Neuvedomili si, že vzdialenosť v geometrii je vždy najkratšia možná, kolmá, a preto by úsečky AC a CV boli na seba kolmé, ale to by už nemohli byť súčasťou ihlana.                                                                                                                                                                                                                                 |                                                                                    |  |       |
| 10,91                                           | 4,8 %      | Myšlienková chyba: Žiaci určili kolmý priemet bodu A do hrany CV (bod P) ako stred bočnej hrany CV. Následne počítali hľadanú vzdialenosť  AP  ako dĺžku odvesny pravouhlého trojuholníka ACP s pravým uhlom pri C: $ AP  = \sqrt{ AC ^2 -  CP ^2}$ , odkiaľ $ AP  = \sqrt{12^2 - 5^2} = \sqrt{119} \doteq 10,91$ cm alebo ako dĺžku odvesny pravouhlého trojuholníka APV s pravým uhlom pri P: $ AP  = \sqrt{ AV ^2 -  VP ^2} = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} \doteq 8,66$ cm. |                                                                                    |  |       |
| 8,66                                            | 2,6 %      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |                                                                                    |  |       |
| 10                                              | 2,2 %      | Myšlienková chyba: Žiaci za hľadanú vzdialenosť považovali vzdialenosť vrcholu A od bodu V, teda dĺžku úsečky AV. Uvažovali tak zrejme na základe nákresu pri zadaní úlohy, v ktorom úsečky AV a CV sa zdajú byť takmer kolmé. Žiaci si však tento predpoklad nepotvrdili vlastným výpočtom.                                                                                                                                                                                    |                                                                                    |  |       |

## Komentár:

Úloha vyžadovala znalosť spôsobu určenia vzdialenosti bodu od priamky v priestore, schopnosť transformácie stereometrickej úlohy na planimetrickú úlohu vo vhodnom trojuholníku, výpočet dĺžok strán v pravouhlom trojuholníku, prípadne využitie goniometrických funkcií pri výpočte dĺžok strán a veľkostí uhlov v pravouhlom trojuholníku. Najväčším problémom pre žiakov bolo správne určenie úsečky, ktorá bude v pravidelnom ihlane  $ABCDV$  predstavovať hľadanú vzdialenosť vrcholu  $A$  od bočnej hrany  $CV$ . Túto časť úlohy zvládla a následne správne numericky dopočítala iba štvrtina žiakov. Medzi nich sa zaradil asi každý tretí žiak GYM a iba asi každý dvanásť žiak SOŠ. Takmer štvrtina žiakov na úlohu neuviedla odpoveď. Ostatní žiaci určili ako hľadanú vzdialenosť vrcholu  $A$  od bočnej hrany  $CV$  ihlana  $ABCDV$  uhlopriečku  $AC$  v podstave ihlana (15,6 %), úsečku spájajúcu vrchol  $A$  so stredom bočnej hrany  $CV$  (7,4 %) alebo samotnú bočnú hranu  $AV$  (2,2 %). Veľa žiakov následne počítalo hľadanú vzdialenosť v pravouhlom trojuholníku, v ktorom nesprávne určili preponu, odvesny a polohu pravého uhla. Podľa štatistických výsledkov asi 33 % žiakov určilo hľadanú vzdialenosť vrcholu  $A$  od bočnej hrany  $CV$  ihlana  $ABCDV$  dlhšiu ako 12 cm, čo je dĺžka uhlopriečky v podstave – najdlhšej úsečky ihlana  $ABCDV$ . Definíciou je však vzdialenosť dvoch objektov v geometrii určená ako najkratšia, kolmá spojnica medzi objektmi.

Z grafu distribúcie úspešností žiackych odpovedí vidíme, že úloha dobre rozlíšila najmä prvé tri skupiny v teste celkove najúspešnejších žiakov. Úspešnosť žiakov zvyšných skupín sa nachádzala medzi 0 % až 20 %. Dobrú triediacu silu položky v skupine úspešnejších žiakov potvrdili aj údaje spracovania výsledkov testu IRT metódou. Z vysokej hodnoty rozlišovacej schopnosti položky 1,097 pri pomerne vysokej obťažnosti položky 0,884 usudzujeme, že položka výborne rozlišovala najmä šikovnejších žiakov, s úrovňou schopnosti 1 a vyššou. Takí však patrili iba do prvých troch najúspešnejších výkonnostných skupín. Úloha dosiahla vysokú hodnotu *P. Bis.*, takže žiaci v teste celkove úspešní správne vyriešili aj túto úlohu, naopak žiaci, ktorí neodpovedali správne na úlohu, boli aj v celom teste celkove menej úspešní.

## Príklad č. 18

Téma: 1.4 Rovnice, nerovnice a ich sústavy

Testované myšlienkové operácie: tvorivý prístup

Predpokladaná obťažnosť: náročná úloha

Zadanie:

Pôvodná cena lyží sa počas cenovej akcie v obchodnom centre znížila o 30 %. Teraz, na konci zimnej sezóny, sa akciová cena lyží ešte znížila o 10 %. Vypočítajte, celkovo o koľko percent sa znížila pôvodná cena lyží na terajšiu cenu lyží.

Riešenie:

(1) Označme pôvodnú cenu lyží neznámou  $x$ . Ak sa počas cenovej akcie pôvodná cena lyží znížila o 30 %, tak ich cena je už len  $100 \% - 30 \% = 70 \%$  pôvodnej ceny, teda  $0,70 \cdot x$ .

(2) Ak sa upravená cena lyží na konci zimnej sezóny ešte znížila o 10 %, zostalo už len  $100 \% - 10 \% = 90 \%$  z ceny lyží po cenovej akcii, teda  $0,90 \cdot 0,70 \cdot x = 0,63 \cdot x$ .

(3) Cena lyží podľa (2) po dvojnásobnom znížení bola už len  $0,63 \cdot x$ , teda 63 % z pôvodnej ceny lyží. Po dvoch zlacneniach sa preto ich cena celkovo znížila o  $100 \% - 63 \% = 37 \%$ .

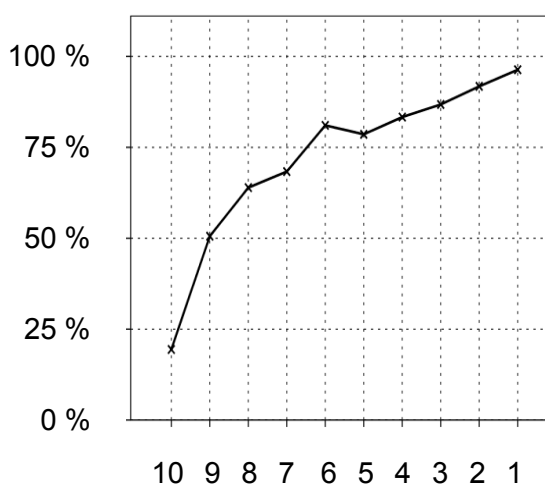
(4) Pôvodná cena lyží sa po dvoch zlacneniach celkovo znížila na terajšiu cenu o 37 %.

(5) Úloha sa dá vypočítať aj zvolením konkrétnej pôvodnej ceny lyží, z ktorej sa dajú pohodlne vypočítať percentuálne zníženia ceny, napríklad 100 € alebo 1 000 €.

Štatistické vyhodnotenie:

|             |           |        |
|-------------|-----------|--------|
| úspešnosť   | celková   | 72,0 % |
|             | žiaci GYM | 76,5 % |
|             | žiaci SOŠ | 64,0 % |
|             | chlapci   | 75,7 % |
|             | dievčatá  | 65,0 % |
| neriešenosť |           | 3,8 %  |
| citlivosť   |           | 59,1 % |
| P. Bis.     |           | 38,9   |

Graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí:



|                 |         |                              |       |
|-----------------|---------|------------------------------|-------|
| obťažnosť (IRT) | - 0,930 | rozlišovacia schopnosť (IRT) | 0,751 |
|-----------------|---------|------------------------------|-------|

| Najčastejšie odpovede a frekvencia ich výskytu:                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| odpoveď                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | frekvencia | predpokladaná príčina uvedenej odpovede                                                                                                                                                                                                                                                                                |
| 37                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 72,0 %     | správna odpoveď                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
| 40                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 9,3 %      | Myšlienková chyba: Žiaci spočítali počet percent pri dvoch zníženiach ceny lyží $30 \% + 10 \% = 40 \%$ . Neuvedomili si, že každý výpočet percent závisí od základu, z ktorého sa počet percent počíta. Základ pri percentovom počte v prípade dvoch postupných znížení ceny lyží nebol rovnaký.                      |
| 63                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 6,3 %      | Nesprávne pochopenie zadania otázky: Žiaci namiesto otázky „o koľko sa znížila cena ...“ odpovedali na otázku „na koľko sa znížila cena ...“.                                                                                                                                                                          |
| –                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 3,8 %      | neuvedená odpoveď                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| 33                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 1,4 %      | Myšlienková chyba: Žiaci zrejme správne rozhodli o rôznom základe pri dvoch percentových počtoch, ale keďže pri druhom výpočte im v zadaní úlohy chýbal konkrétny základ, vypočítali zníženie o 10 % z uvedeného čísla 30 %, čo sú 3 % a tento údaj spočítali s prvým znížením o 30 % na 33 %.                         |
| 60                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 0,5 %      | Myšlienková chyba: Žiaci spočítali počet percent pri dvoch zníženiach ceny lyží $30 \% + 10 \% = 40 \%$ a dopočítali do 100 %. Nesprávne aplikovali princípy percentového počtu a zároveň zrejme nesprávne pochopili zadanie otázky a namiesto úlohy „o koľko percent ...“ odpovedali na úlohu „na koľko percent ...“. |
| <p>Komentár:</p> <p>Riešenie úlohy vyžadovalo správne pochopenie princípu závislosti hodnoty prislúchajúcej počtu percent od základu, z ktorého počet percent určujeme. Predpoklad náročnej úlohy vyžadujúcej tvorivý prístup sa nepotvrdil. Takmer tri štvrtiny žiakov úlohu vyriešilo správne. Iba približne 10 % žiakov nesprávne aplikovalo percentový počet a neuvedomilo si odlišnosť základu. Asi 7 % žiakov nesprávne pochopilo zadanie otázky a zamenilo význam otázok „o koľko“ a „na koľko“. Žiaci GYM a SOŠ riešili úlohu s porovnateľnou úspešnosťou. Zaznamenali sme však najväčší rozdiel v úspešnosti riešenia podľa pohlavia zo všetkých úloh testu. Chlapci riešili úlohu s úspešnosťou o 10,7 % vyššou ako dievčatá. Úloha výborne odlíšila dve najmenej úspešné skupiny žiakov. Dobrú triediacu silu úlohy v skupine žiakov s nízkou úrovňou schopnosti okolo – 1 potvrdilo aj vyhodnotenie výsledkov IRT metódou.</p> |            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |

## Príklad č. 19

Téma: 2.5 Goniometrické funkcie

Testované myšlienkové operácie: zložitejšie myšlienkové operácie

Predpokladaná obťažnosť: stredne ťažká úloha

Zadanie:

Určte korene rovnice  $\sin 2x = \sin x$  z intervalu  $x \in (0; 360^\circ)$ . Do odpovedového hárka zapíšte v stupňoch súčet všetkých koreňov tejto rovnice z daného intervalu.

Riešenie:

(1) Využitím vzťahu pre sínus dvojnásobného uhla (uvedenom aj v prehľade vzťahov na zadnom liste testu) a vynímania rovníc upravíme na tvar súčinu rovného nule:

$$\sin 2x = \sin x \Leftrightarrow 2 \sin x \cos x = \sin x \Leftrightarrow 2 \sin x \cos x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x \cdot (2 \cos x - 1) = 0.$$

(2) Súčin sa rovná nule, ak ktorýkoľvek činiteľ súčinu sa rovná nule, preto vyriešime využitím jednotkovej kružnice alebo grafu goniometrických funkcií jednoduché goniometrické rovnice na intervale  $(0; 360^\circ)$ :

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x_1 = 180^\circ, \text{ (riešenie } x_0 = 0^\circ \text{ nepatrí do zadaného intervalu),}$$

$$2 \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x_2 = 60^\circ \vee x_3 = 300^\circ.$$

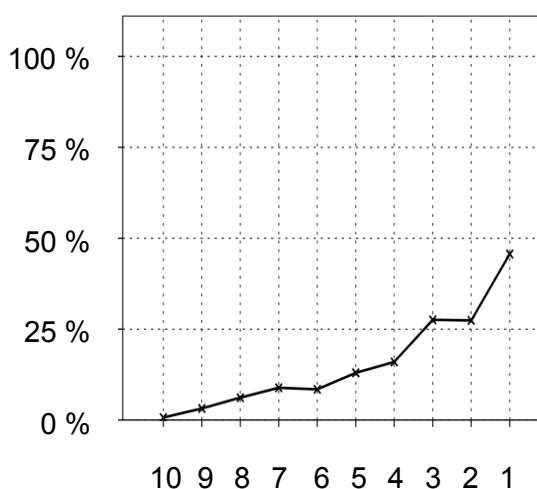
$$(3) \text{ Sčítame korene vypočítané v (2): } x_1 + x_2 + x_3 = 180^\circ + 60^\circ + 300^\circ = 540^\circ.$$

(4) Súčet všetkých koreňov rovnice  $\sin 2x = \sin x$  z intervalu  $x \in (0; 360^\circ)$  je v stupňoch 540.

Štatistické vyhodnotenie:

|                 |           |        |
|-----------------|-----------|--------|
| úspešnosť       | celková   | 15,7 % |
|                 | žiaci GYM | 19,1 % |
|                 | žiaci SOŠ | 9,6 %  |
|                 | chlapci   | 16,4 % |
|                 | dievčatá  | 14,4 % |
| neriešenosť     |           | 28,4 % |
| citlivosť       |           | 34,6 % |
| P. Bis.         |           | 29,5   |
| obťažnosť (IRT) |           | 1,823  |

Graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí:



|                              |       |
|------------------------------|-------|
| rozlišovacia schopnosť (IRT) | 0,639 |
|------------------------------|-------|

| Najčastejšie odpovede a frekvencia ich výskytu:                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| odpoveď                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | frekvencia | predpokladaná príčina uvedenej odpovede                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
| –                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 28,4 %     | neuvedená odpoveď                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
| 540                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 15,7 %     | správna odpoveď                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
| 180                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 13,5 %     | Žiaci pokusne hľadali do rovnice v zadaní bez jej úpravy číslo (uhol), ktorého sínus bude rovnaký ako sínus dvojnásobku hľadaného čísla. Našli iba číslo 180 v prvom prípade, čísla 60 a 300 v druhom prípade a číslo 0 v treťom prípade. Číslo 180 zrejme vylúčili, keďže jeho dvojnásobok 360 už nepatrí do intervalu uvedeného v zadaní. K odpovedi 360 sa mohli žiaci dopracovať aj riešením rovnice, ale dopustili sa pri jej úprave chybného vykrátenia výrazu $\sin x$ z oboch strán rovnice a dopočítali iba korene rovnice $2 \cos x = 1$ . Vo štvrtom prípade zrejme žiaci pokusným dosadzovaním našli čísla 60 a 180. |
| 360                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 13,1 %     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
| 0                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 3,2 %      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
| 240                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 2,4 %      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
| 60                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 2,1 %      | Žiaci pokusne hľadali do rovnice v zadaní bez jej úpravy číslo (uhol), ktorého sínus bude rovnaký ako sínus dvojnásobku hľadaného čísla a našli číslo 60 alebo správne upravili rovnicu a riešili dve základné goniometrické rovnice, ale vždy určili iba jeden koreň pomocou kalkulačky (0 a 60) alebo riešili rovnicu chybne vykrátením výrazu $\sin x$ z oboch strán rovnice a dopočítali iba prvý koreň rovnice $2 \cos x = 1$ .                                                                                                                                                                                             |
| <p>Komentár:</p> <p>Úloha vyžadovala znalosť spôsobu riešenia goniometrickej rovnice (použitie základných vzťahov pri úprave goniometrického výrazu, správne použitie ekvivalentných úprav rovnice a nájdenie všetkých koreňov základnej goniometrickej rovnice z daného intervalu). Ukázalo sa, že pre všetky skupiny žiakov bola úloha veľmi obťažná, pre žiakov SOŠ až extrémne obťažná. Iba asi tretina žiakov sa pokúsila úlohu vyriešiť úpravou goniometrickej rovnice, ostatní sa snažili nájsť riešenia rovnice pokusným dosadzovaním a hľadaním vhodných čísel <math>x</math>. Asi polovica žiakov, ktorí rovnicu počas riešenia upravili, následne vykrátili z oboch strán rovnice výraz, ktorý môže nadobúdať nulovú hodnotu, čím stratili niektoré korene. Veľa žiakov pri riešení základnej goniometrickej rovnice určilo iba jeden jej koreň (zrejme využitím kalkulačky) a zabudlo na symetrický koreň podľa grafu alebo jednotkovej kružnice. Až 28,4 % žiakov neuviedlo žiadnu odpoveď. Úloha by podľa predpokladu IRT metódy dobre rozlíšila žiakov s úrovňou schopnosti tesne pod 2, ale takých bolo v testovanej vzorke málo.</p> |            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |

## Príklad č. 20

Téma: 3.1 Základné rovinné útvary

Testované myšlienkové operácie: zložitejšie myšlienkové operácie

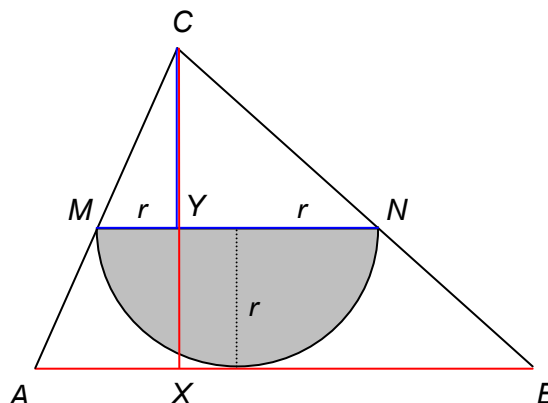
Predpokladaná obťažnosť: stredne ťažká úloha

Zadanie:

Do trojuholníka  $ABC$  je vpísaný polkruh (pozrite obrázok). Určte polomer polkruhu, ak dĺžka strany  $AB$  je 8 a výška na stranu  $AB$  je 4.

Riešenie:

(1) Úlohu výhodne vyriešime využitím podobnosti trojuholníkov. Keďže strana  $AB$  je rovnobežná s priemerom polkruhu  $MN$ , trojuholníky  $MNC$  a  $ABC$  sú podobné. Ďalej podľa zadania a z obrázka vidíme, že  $|AB| = 8$ ,  $|CX| = 4$ ,  $|MN| = 2r$ ,  $|CY| = 4 - r$ , ak označíme  $r$  hľadaný polomer polkruhu.



(2) Zapišeme do rovnice pomer podobnosti zodpovedajúcich strán podobných trojuholníkov  $MNC$  a  $ABC$ , odkiaľ vypočítame polomer polkruhu  $r$ .

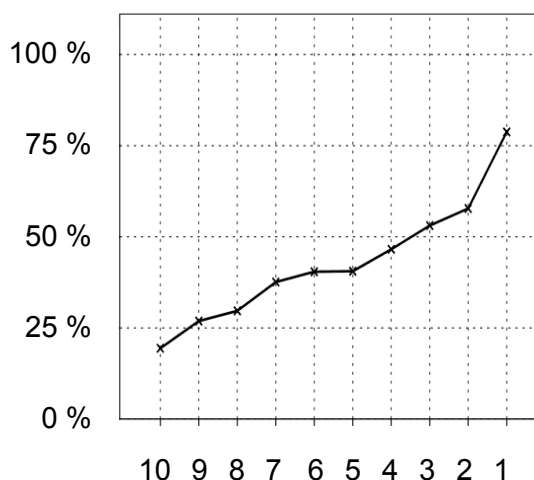
$$\frac{|MN|}{|AB|} = \frac{|CY|}{|CX|} \Leftrightarrow \frac{2r}{8} = \frac{4-r}{4} \Leftrightarrow r = 4 - r \Leftrightarrow 2r = 4 \Leftrightarrow r = 2.$$

(3) Polomer polkruhu je 2.

Štatistické vyhodnotenie:

|                 |           |        |
|-----------------|-----------|--------|
| úspešnosť       | celková   | 43,1 % |
|                 | žiaci GYM | 46,4 % |
|                 | žiaci SOŠ | 36,6 % |
|                 | chlapci   | 42,6 % |
|                 | dievčatá  | 44,0 % |
| neriešenosť     |           | 30,4 % |
| citlivosť       |           | 45,1 % |
| P. Bis.         |           | 25,2   |
| obťažnosť (IRT) |           | 0,445  |

Graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí:



| Najčastejšie odpovede a frekvencia ich výskytu: |            |                                                                                                                                                                                                                                  |
|-------------------------------------------------|------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| odpoveď                                         | frekvencia | predpokladaná príčina uvedenej odpovede                                                                                                                                                                                          |
| 2                                               | 43,1 %     | správna odpoveď                                                                                                                                                                                                                  |
| –                                               | 30,4 %     | neuvedená odpoveď                                                                                                                                                                                                                |
| 4                                               | 7,7 %      | Chyba z nepozornosti: Žiaci zrejme správne vyriešili úlohu, ale do odpoveďového hárka zapísali nie polomer, ale priemer vpísaného polkruhu.                                                                                      |
| 3                                               | 3,3 %      | Žiaci zrejme určili tieto odpovede na základe nejakej úvahy alebo približným určením z obrázka. Povzbudení údajmi zo zadania vyjadrenými prirodzeným číslom uviedli ako odpoveď tiež prirodzené číslo alebo desatinné číslo 2,5. |
| 2,5                                             | 1,9 %      |                                                                                                                                                                                                                                  |

Komentár:

Úloha vyžadovala znalosť polohových a metrických vzťahov v trojuholníku, podobnosti trojuholníkov a zručnosť pri počítaní so zlomkami. Úlohu riešili všetky skupiny žiakov s približne rovnakou úspešnosťou. Pri tejto úlohe sme zaznamenali tretí najväčší podiel žiakov, ktorí na úlohu neuviedli odpoveď. Dodatočne si všímame, že na základe zadaných číselných údajov dĺžky strany a výšky trojuholníka je riešením polomer polkruhu  $r = 2$ . Následne priemer polkruhu má dĺžku  $d = 4$ , čo je zároveň dĺžka strednej priečky trojuholníka rovnobežnej so zadanou stranou dlhou 8. Môžeme teda predpokladať, že veľa žiakov uviedlo správnu odpoveď nielen na základe svojho výpočtu alebo úvahy, ale si mohlo myslieť, že priemer vpísaného polkruhu leží na strednej priečke trojuholníka. Túto úvahu podporoval aj situačný náčrt pod zadaním úlohy, v ktorom priemer vpísaného polkruhu skutočne ležal približne na mieste strednej priečky trojuholníka. Jednoduchým vyskúšaním iných vhodných dvojíc údajov dĺžky strany a príslušnej výšky trojuholníka sa môžeme presvedčiť, že pri iných dvojiciach zadaných dĺžok už výsledný priemer a polomer vpísaného polkruhu nie sú zhodné s dĺžkou strednej priečky trojuholníka.

Žiaci, ktorí neobľubujú úlohy zamerané na podobnosť útvarov, mohli určiť polomer vpísaného polkruhu využitím obsahov útvarov. Podľa zadaných údajov obsah trojuholníka  $ABC$  sa dá vyjadriť ako súčet obsahu menšieho trojuholníka  $MNC$  a lichobežníka  $ABNM$ :

$$\frac{8 \cdot 4}{2} = \frac{2r \cdot (4-r)}{2} + \frac{(8+2r) \cdot r}{2}$$

Úloha málo rozlišovala žiakov, odlíšila iba najúspešnejšiu skupinu žiakov. Veľa žiakov zrejme nevedelo, akým postupom sa dopracovať k výsledku úlohy.

## Príklad č. 21

Téma: 5.1 Kombinatorika a pravdepodobnosť

Testované myšlienkové operácie: zložitejšie myšlienkové operácie

Predpokladaná obťažnosť: stredne ťažká úloha

Zadanie:

V osudí je 6 bielych a 4 čierne guľôčky. Náhodne z osudia vytiahneme naraz dve guľôčky. Aká je pravdepodobnosť, že vytiahnuté guľôčky budú rôznej farby?

Riešenie:

(1) Pravdepodobnosť vytiahnutia dvoch guľôčok rôznej farby budeme počítať ako podiel počtu priaznivých možností – počtu možností vytiahnutia dvoch guľôčok rôznej farby a počtu všetkých možností – počtu možností vytiahnutia akejkoľvek dvojice guľôčok.

(2) Ku každej zo šiestich bielych guľôčok môžeme vybrať jednu zo štyroch čiernych guľôčok, preto počet všetkých možností výberu dvoch guľôčok rôznej farby vypočítame podľa pravidla súčinu ako  $6 \cdot 4 = 24$ . Počet všetkých možností výberu akýchkoľvek dvoch guľôčok z desiatich guľôčok (nezáleží na poradí výberu a guľôčky neopakujeme) môžeme vypočítať

kombinačným číslom  $\binom{10}{2} = \frac{10!}{8! \cdot 2!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8!}{8! \cdot 2 \cdot 1} = 45$ .

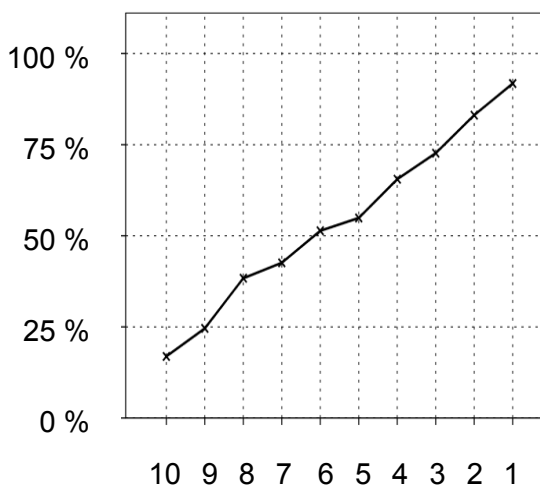
(3) Pravdepodobnosť vytiahnutia dvoch guľôčok rôznej farby je  $P = \frac{24}{45} = \frac{8}{15}$ .

(4) Správna odpoveď je možnosť (D).

Štatistické vyhodnotenie:

|                 |           |         |
|-----------------|-----------|---------|
| úspešnosť       | celková   | 54,2 %  |
|                 | žiaci GYM | 64,4 %  |
|                 | žiaci SOŠ | 35,8 %  |
|                 | chlapci   | 51,7 %  |
|                 | dievčatá  | 58,8 %  |
| neriešenosť     |           | 0,9 %   |
| citlivosť       |           | 66,7 %  |
| P. Bis.         |           | 39,4    |
| obťažnosť (IRT) |           | - 0,177 |

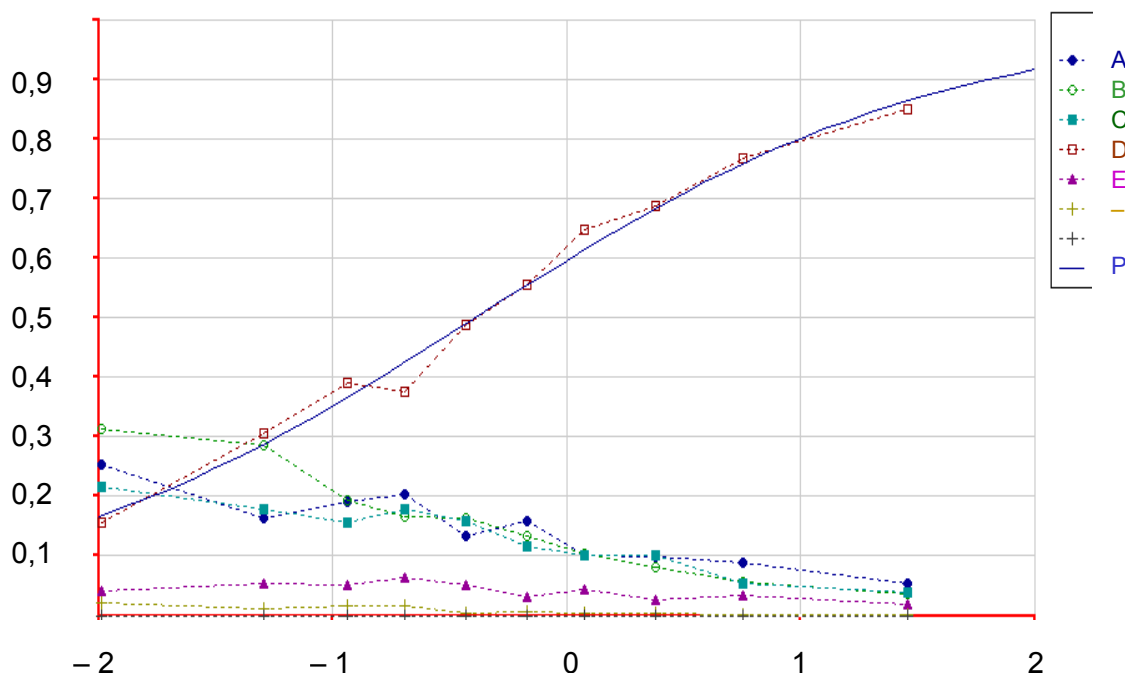
Graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí:



Odpovede a frekvencia ich výskytu:

| odpoveď             | frekvencia | P. Bis. | predpokladaná príčina uvedenej odpovede                                                                                                      |
|---------------------|------------|---------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| (D) $\frac{8}{15}$  | 54,2 %     | 39      | správna odpoveď                                                                                                                              |
| (B) $\frac{2}{5}$   | 14,6 %     | – 27    |                                                                                                                                              |
| (A) $\frac{2}{9}$   | 13,9 %     | – 11    | Žiaci v (2) nesprávne vypočítali počet možností výberu dvoch guľôčok rôznej farby ako $6 + 4 = 10$ . Získali $\frac{10}{45} = \frac{2}{9}$ . |
| (C) $\frac{7}{15}$  | 12,4 %     | – 13    | Žiaci vypočítali doplnkovú pravdepodobnosť výberu dvoch rovnakých guľôčok.                                                                   |
| (E) $\frac{24}{25}$ | 4,0 %      | – 6     |                                                                                                                                              |
| –                   | 0,9 %      | – 8     | neuvedená odpoveď                                                                                                                            |

Graf závislosti pravdepodobnosti výberu odpovede od schopnosti žiaka



Komentár:

Úloha vyžadovala znalosť z oblasti teórie pravdepodobnosti, skúsenosť pri výpočte úloh z kombinatoriky a zručnosť pri práci so zlomkami.

Výrazne vyššiu úspešnosť dosiahli žiaci GYM v porovnaní so žiakmi SOŠ (mierne vecne významný rozdiel), úspešnejšie boli aj dievčatá v porovnaní s chlapcami.

Pravdepodobnosť voľby distraktorov s rastúcou úrovňou schopnosti žiakov klesá. Správnu odpoveď (D) si vyberali prevažne v teste celkove úspešnejší žiaci, ktorí takmer nevolili distraktory. Naopak, v teste celkove menej úspešní žiaci, s úrovňou schopnosti – 1 a nižšou, si takmer v rovnakej miere vyberali všetkých päť uvádzaných možností. Skupina najmenej úspešných žiakov dokonca volila distraktory vo väčšej miere ako správnu odpoveď (D). Na základe ideálneho priebehu grafu distribúcie úspešností žiackych odpovedí a vysokej citlivosti môžeme konštatovať, že úloha rovnako dobre rozlíšila všetky výkonnostné skupiny žiakov.

## Príklad č. 22

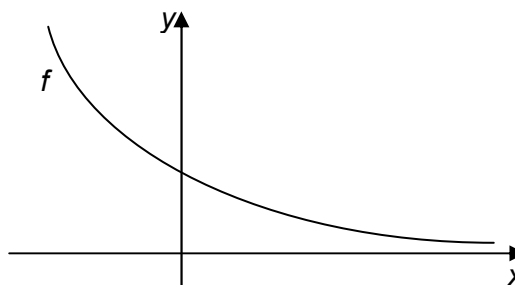
Téma: 2.1 Funkcia a jej vlastnosti, postupnosti

Testované myšlienkové operácie: zložitejšie myšlienkové operácie

Predpokladaná obťažnosť: stredne ťažká úloha

Zadanie:

Na obrázku je časť grafu funkcie  $f: y = 0,5^x$ . Rozhodnite o monotónnosti, ohraničenosti a extrémoch funkcie  $f$ .



Riešenie:

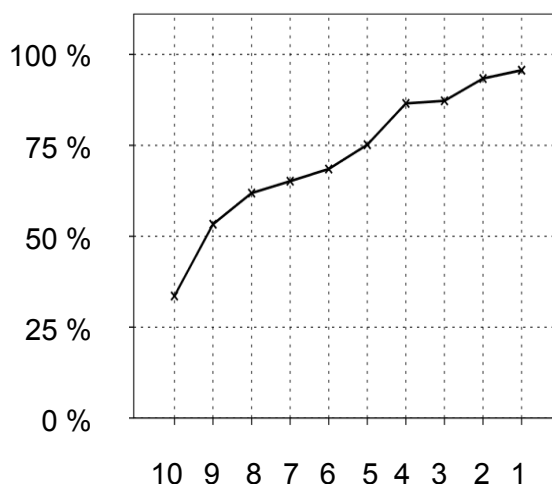
(1) Funkcia  $f$  je exponenciálna funkcia so základom  $0,5 = \frac{1}{2}$ , menším ako 1.

(2) Funkcia je na celom svojom definičnom obore klesajúca. Čím väčšie čísla budeme dosadzovať za  $x$  v exponente mocniny, tým väčšiu hodnotu bude nadobúdať menovateľ základu mocniny, pričom čitateľ bude mať stále konštantnú hodnotu 1, preto výsledná hodnota zlomku bude čoraz menšia. Funkcia  $f$  preto nemá minimum. Hodnota funkcie  $f$  však nikdy nenadobudne zápornú hodnotu, pretože základ mocniny 0,5 je kladný. Preto je funkcia zdola ohraničená akýmkoľvek číslom menším alebo rovným 0. Naopak, dosadením čoraz menších záporných čísel sa hodnota funkcie  $f$  bude čoraz viac zväčšovať, preto funkcia  $f$  nie je zhora ohraničená a nemá maximum. Správna odpoveď je preto (A).

Štatistické vyhodnotenie:

|             |           |        |
|-------------|-----------|--------|
| úspešnosť   | celková   | 72,0 % |
|             | žiaci GYM | 82,3 % |
|             | žiaci SOŠ | 53,5 % |
|             | chlapci   | 71,7 % |
|             | dievčatá  | 72,7 % |
| neriešenosť |           | 0,2 %  |
| citlivosť   |           | 51,1 % |
| P. Bis.     |           | 33,9   |

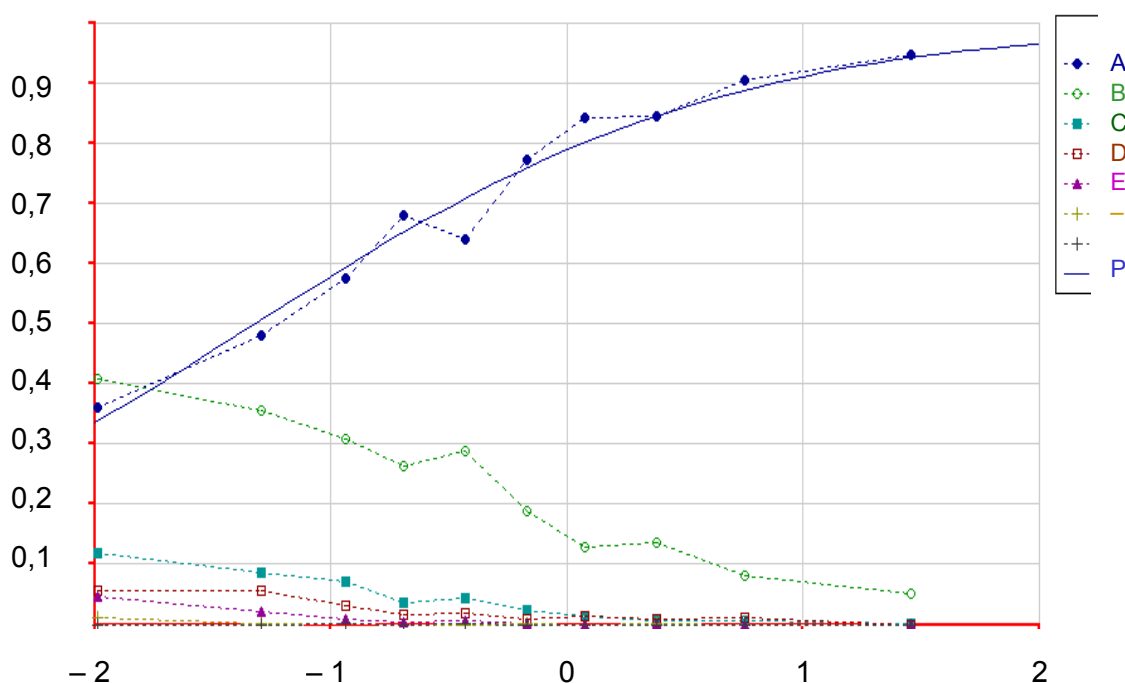
Graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí:



|                 |         |                              |       |
|-----------------|---------|------------------------------|-------|
| obťažnosť (IRT) | - 1,052 | rozlišovacia schopnosť (IRT) | 0,628 |
|-----------------|---------|------------------------------|-------|

| Odpovede a frekvencia ich výskytu:             |            |         |                                                                                                                                                                                                                                                                               |
|------------------------------------------------|------------|---------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| odpoveď                                        | frekvencia | P. Bis. | predpokladaná príčina uvedenej odpovede                                                                                                                                                                                                                                       |
| (A) klesajúca, zdola ohraničená a nemá extrém. | 72,0 %     | 34      | správna odpoveď                                                                                                                                                                                                                                                               |
| (B) klesajúca, zdola ohraničená a má minimum.  | 21,1 %     | – 21    | Žiaci zrejme na základe ohraničenosti zdola rozhodli, že funkcia má aj minimum. Predpokladáme neznalosť definície extrému.                                                                                                                                                    |
| (C) klesajúca, ohraničená a má minimum.        | 3,8 %      | – 17    | Žiaci si pozorne nevšimli oblasť grafu funkcie naľavo od osi $y$ , kde graf funkcie $f$ evidentne nie je ohraničený zhora.                                                                                                                                                    |
| (D) rastúca, zdola ohraničená a má minimum.    | 2,1 %      | – 13    | Žiaci si zle preštudovali načrtnutý graf funkcie (krivka na ňom znázornená je jednoznačne klesajúca), nedokázali podľa predpisu funkcie $f$ rozhodnúť o požadovaných vlastnostiach a zrejme si nespomenuli ani na vlastnosti exponenciálnej funkcie so základom menším ako 1. |
| (E) rastúca, ohraničená a nemá extrém.         | 0,8 %      | – 13    |                                                                                                                                                                                                                                                                               |
| –                                              | 0,2 %      | – 7     | neuvedená odpoveď                                                                                                                                                                                                                                                             |

Graf závislosti pravdepodobnosti výberu odpovede od schopnosti žiaka



## Komentár:

Úloha vyžadovala schopnosť identifikovať podľa predpisu druh funkcie a poznať jej základné vlastnosti alebo schopnosť určiť vlastnosti aj neznámej funkcie úvahami na základe predpisu funkcie. Súčasťou zadania úlohy bol aj takmer správny graf zadanej funkcie. 96,9 % žiakov správne rozhodlo o monotónnosti funkcie (táto vlastnosť funkcie bola evidentná aj z nákresu v zadaní). 95,2 % žiakov správne rozhodlo o ohraničenosti funkcie zdola. Najviac problémov mali žiaci s rozhodovaním o extrémoch funkcie. 27 % žiakov (distraktory B, C a D) rozhodlo, že funkcia  $f$  má minimum. Títo žiaci si zrejme nedostatočne osvojili vzájomný vzťah medzi ohraničenosťou (napríklad zdola) a extrémom funkcie (napríklad minimom).

Žiaci GYM boli pri riešení úlohy úspešnejší než žiaci SOŠ (stredne vecne významný rozdiel). Úspešnosť dievčat a chlapcov bola takmer rovnaká. Úloha dosiahla priemernú hodnotu citlivosti, dobre odlíšila poslednú v teste celkove najmenej úspešnú výkonnostnú skupinu žiakov, ako to vidíme na grafe distribúcie úspešností žiackych odpovedí. Správnu odpoveď si vyberali najmä žiaci v teste celkove úspešní (vysoká hodnota *P. Bis.* 34), naopak distraktory si volili celkove v teste menej úspešní žiaci (*P. Bis.* od – 13 do – 21). Najatraktívnejší pre žiakov bol distraktor (B), ktorí v skupine žiakov s úrovňou schopnosti v intervale  $\langle -2; -1 \rangle$  dosiahol takmer rovnakú pravdepodobnosť výberu ako správna odpoveď (A). Žiaci s úrovňou schopnosti 0 a vyššou si distraktory (C), (D) a (E) takmer vôbec nevyberali, iba v malej miere distraktor (B). Nízka hodnota obtiažnosti – 1,052 a rozlišovacej schopnosti 0,628 podporená nie veľmi strmým priebehom pomerne vysoko položenej krivky pravdepodobnosti výberu odpovedí poukazujú na slabšiu triediacu silu menej obtiažnej položky, ktorá výraznejšie rozlíšila iba skupinu žiakov s úrovňou schopnosti nižšou ako – 1.

## Príklad č. 23

Téma: 3.2 Analytická geometria v rovine

Testované myšlienkové operácie: zložitejšie myšlienkové operácie

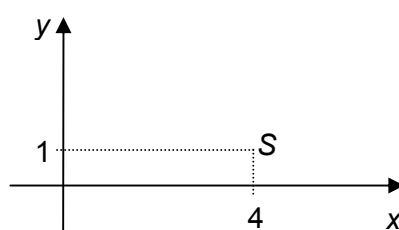
Predpokladaná obťažnosť: náročná úloha

Zadanie:

Určte všetky  $p \in \mathbb{R}$ , pre ktoré kružnica  $k: (x-4)^2 + (y-1)^2 = 17-p$  má aspoň jeden spoločný bod s osou  $x$ , ale nemá spoločný bod s osou  $y$ .

Riešenie:

(1) Zo všeobecnej rovnice kružnice určíme súradnice stredu kružnice  $S[4; 1]$  a veľkosť polomeru kružnice  $r = \sqrt{17-p}$ . Ak kružnica  $k$  má mať aspoň jeden spoločný bod s osou  $x$ , tak polomer kružnice  $k$  musí byť väčší alebo rovný 1. Ak kružnica nesmie mať spoločný bod s osou  $y$ , tak polomer kružnice musí byť menší ako 4. Podmienky zapíšeme nerovnicami, vyriešime a určíme ich spoločné riešenie.



(2)  $r \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{17-p} \geq 1 \Leftrightarrow 17-p \geq 1 \Leftrightarrow p \leq 16$ , pričom  $17-p > 0 \Leftrightarrow p < 17$ .

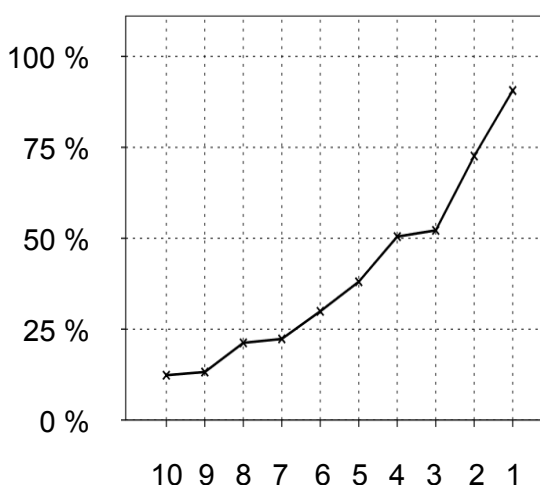
(3)  $r < 4 \Leftrightarrow \sqrt{17-p} < 4 \Leftrightarrow 17-p < 16 \Leftrightarrow p > 1$ , pričom  $17-p > 0 \Leftrightarrow p < 17$ .

(4) Všetky hodnoty  $p$  vyhovujúce podmienkam v (2) a zároveň v (3) sú  $p \in (1; 16)$ . Správna odpoveď je (B).

Štatistické vyhodnotenie:

|                 |           |        |
|-----------------|-----------|--------|
| úspešnosť       | celková   | 40,3 % |
|                 | žiaci GYM | 51,6 % |
|                 | žiaci SOŠ | 19,9 % |
|                 | chlapci   | 40,5 % |
|                 | dievčatá  | 40,0 % |
| neriešenosť     |           | 2,3 %  |
| citlivosť       |           | 68,9 % |
| P. Bis.         |           | 42,4   |
| obťažnosť (IRT) |           | 0,387  |

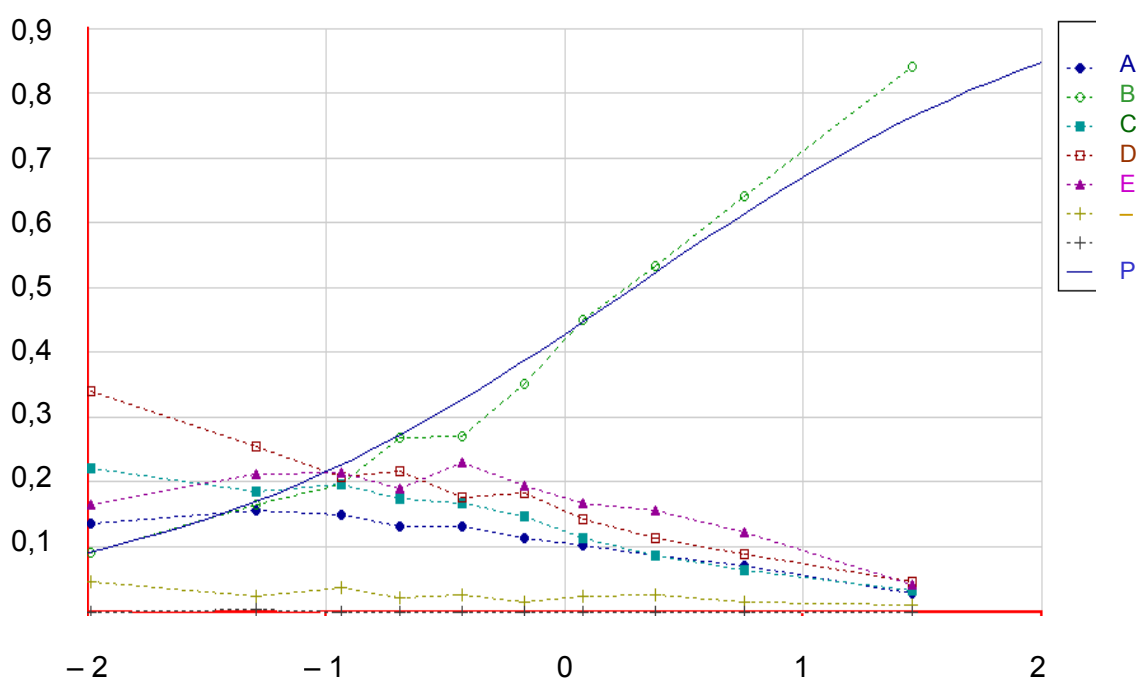
Graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí:



Odpovede a frekvencia ich výskytu:

| odpoveď             | frekvencia | P. Bis. | predpokladaná príčina uvedenej odpovede                                                                                                                                                                                                   |
|---------------------|------------|---------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| (B) $p \in (1; 16)$ | 40,3 %     | 42      | správna odpoveď                                                                                                                                                                                                                           |
| (D) $p \in (1; 16)$ | 16,9 %     | – 18    | Žiaci zrejme nesprávne určili súradnice stredu kružnice $k$ alebo postupovali správne, ale zamenili znamienka ostrej a neostrej nerovnosti v nerovniciach v (2) a (3) alebo priradili ostrej a neostrej nerovnosti opačný druh intervalu. |
| (E) $p \in (1; 16)$ | 16,5 %     | – 8     | Žiaci vyhodnotili zadanie úlohy tak, že obe podmienky v (2) a (3) zapísali rovnakou neostrou nerovnosťou alebo po zápise prvej podmienky v (2) neostrou nerovnosťou bez väčšieho zvažovania zapísali rovnako aj druhú podmienku v (3).    |
| (C) $p \in (0; 17)$ | 13,3 %     | – 18    | Žiaci zrejme postupovali správne, ale pri výpočte uvažovali len množinu celých čísel.                                                                                                                                                     |
| (A) $p \in (1; 4)$  | 10,7 %     | – 12    | Žiaci pravdepodobne urobili chybu pri úprave nerovníc s odmocninou.                                                                                                                                                                       |
| –                   | 2,3 %      | – 8     | neuvedená odpoveď                                                                                                                                                                                                                         |

Graf závislosti pravdepodobnosti výberu odpovede od schopnosti žiaka



Komentár:

Riešenie úlohy vyžadovalo správne určenie charakteristických prvkov kružnice z jej všeobecnej rovnice, správne stanovenie podmienok pre polomer danej kružnice na základe nákresu a zručnosť pri riešení jednoduchšej nerovnice s odmocninou. Môžeme predpokladať, že približne tri štvrtiny žiakov – možnosti (B), (D) a (E) – riešilo úlohu správne, ale asi polovica z nich bola počas riešenia alebo pri určovaní výsledku nepozorná a nedôsledná.

Rozdiel v úspešnosti žiakov GYM a SOŠ v prospech žiakov GYM bol stredne vecne významný. Úspešnosť chlapcov a dievčat bola rovnaká. Úloha mala výbornú citlivosť a veľmi dobre rozlíšila najmä prvých sedem výkonnostných skupín žiakov. Z grafu pravdepodobnosti výberu odpovede v závislosti od schopnosti žiakov vidíme, že žiaci s úrovňou schopnosti nižšou ako – 1 s väčšou pravdepodobnosťou volili všetky distraktory než správnu odpoveď (B). Žiaci s vyššou úrovňou schopnosti okrem správnej odpovede (B) najčastejšie volili distraktor (E).

## Príklad č. 24

Téma: 1.4 Rovnice, nerovnice a ich sústavy

Testované myšlienkové operácie: zložitejšie myšlienkové operácie

Predpokladaná obťažnosť: stredne ťažká úloha

Zadanie:

Určte reálne čísla  $a, b$  tak, aby kvadratická rovnica  $ax^2 + bx - 2 = 0$  mala korene  $-2$  a  $\frac{1}{2}$ .

Riešenie:

(1) I. spôsob: Označme korene kvadratickej rovnice  $x_1 = -2$  a  $x_2 = \frac{1}{2}$ . Dosadením koreňov do kvadratickej rovnice za neznámu  $x$  získame sústavu dvoch lineárnych rovníc:

$$\begin{aligned} a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) - 2 &= 0 & \Leftrightarrow & 4a - 2b - 2 = 0 & \Leftrightarrow & 4a - 2b - 2 = 0 & \Leftrightarrow & 5a - 10 = 0 \\ a \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + b \cdot \frac{1}{2} - 2 &= 0 & \Leftrightarrow & \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b - 2 = 0 & \cdot 4 & \Leftrightarrow & a + 2b - 8 = 0 & \Leftrightarrow & 5a - 10 = 0 \end{aligned}$$

odkiaľ  $a = 2$ . Potom napríklad  $2b = 4a - 2 = 4 \cdot 2 - 2 = 6$ , odkiaľ  $b = 3$ .

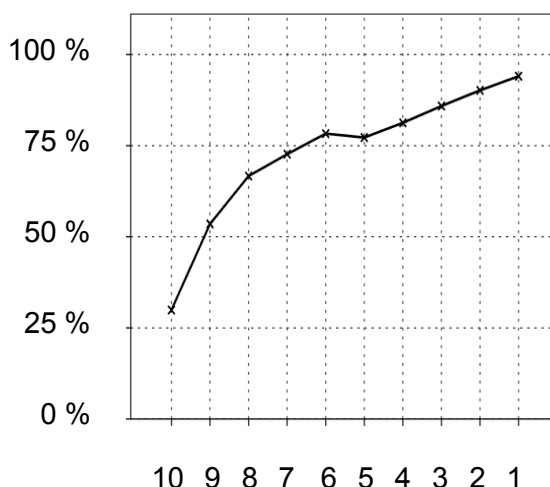
(2) II. spôsob: Každý kvadratický trojčlen môžeme vyjadriť v tvare súčinu koreňových činiteľov  $ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ . Dosadíme za korene rovnice čísla  $x_1 = -2$  a  $x_2 = \frac{1}{2}$  a získame  $a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) = a \cdot (x + 2) \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) = a \cdot \left(x^2 + \frac{3}{2}x - 1\right)$ .

Podľa zadania  $c = -2$ , preto zvolíme  $a = 2$  a dopočítame  $2 \cdot \left(x^2 + \frac{3}{2}x - 1\right) = 2x^2 + 3x - 2$ , odkiaľ  $a = 2, b = 3$ . Správna odpoveď je (C).

Štatistické vyhodnotenie:

|             |           |        |
|-------------|-----------|--------|
| úspešnosť   | celková   | 73,0 % |
|             | žiaci GYM | 79,4 % |
|             | žiaci SOŠ | 61,3 % |
|             | chlapci   | 70,6 % |
|             | dievčatá  | 77,5 % |
| neriešenosť |           | 0,7 %  |
| citlivosť   |           | 50,4 % |
| P. Bis.     |           | 31,7   |

Graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí:

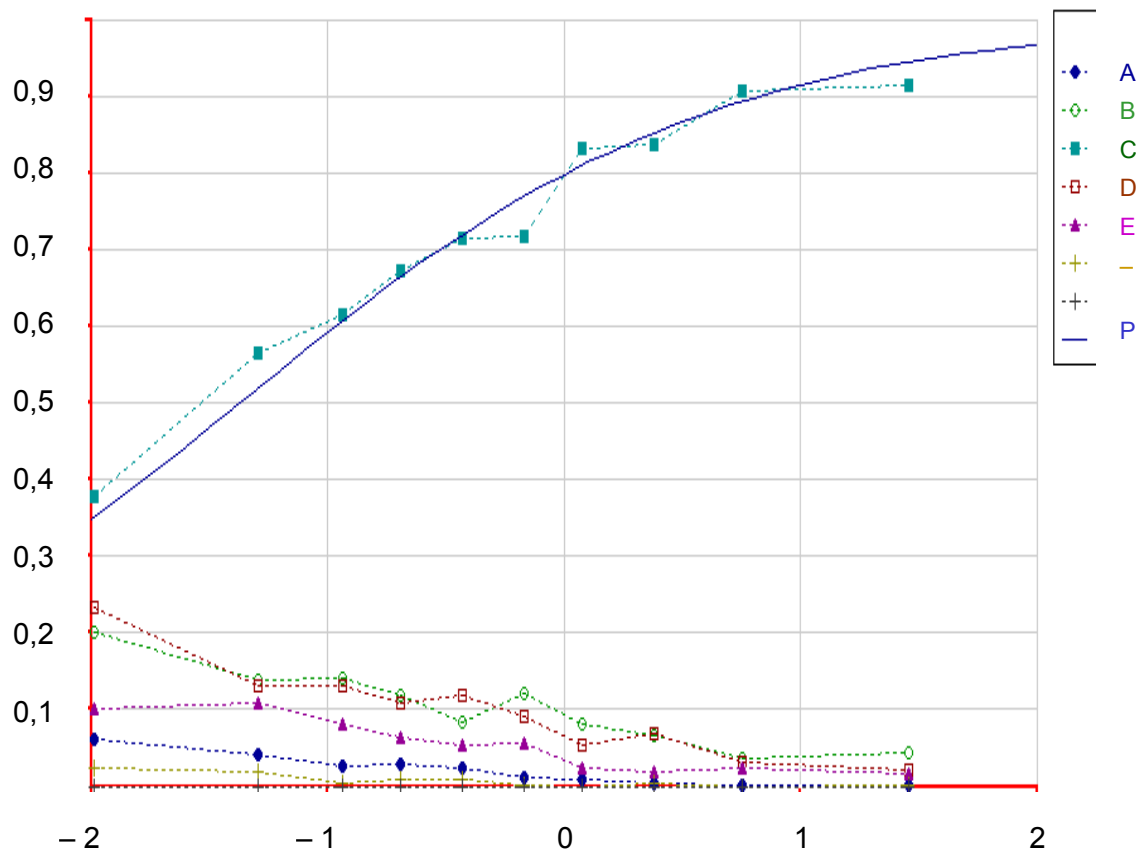


|                 |        |                              |       |
|-----------------|--------|------------------------------|-------|
| obťažnosť (IRT) | -1,154 | rozlišovacia schopnosť (IRT) | 0,592 |
|-----------------|--------|------------------------------|-------|

Odpovede a frekvencia ich výskytu:

| odpoveď              | frekvencia | P. Bis. | predpokladaná príčina uvedenej odpovede                                                                                    |
|----------------------|------------|---------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| (C) $a = 2, b = 3$   | 73,0 %     | 32      | správna odpoveď                                                                                                            |
| (B) $a = 2, b = -3$  | 9,9 %      | - 13    | Numerická chyba: Žiaci správne určili hodnotu koeficienta $a$ , ale sa pomýlili pri dopočítavaní hodnoty koeficienta $b$ . |
| (D) $a = -2, b = 3$  | 9,3 %      | - 17    | Numerická chyba: Žiaci správne určili hodnotu koeficienta $b$ , ale sa pomýlili pri dopočítavaní hodnoty koeficienta $a$ . |
| (E) $a = -2, b = -3$ | 5,2 %      | - 12    | Numerické chyby: Žiaci sa zrejme dopustili viacerých numerických chýb alebo si túto možnosť iba náhodne zvolili.           |
| (A) $a = 12, b = 9$  | 1,9 %      | - 13    | Žiaci túto možnosť volili náhodne.                                                                                         |
| –                    | 0,7 %      | - 8     | neuvedená odpoveď                                                                                                          |

Graf závislosti pravdepodobnosti výberu odpovede od schopnosti žiaka



Komentár:

Úloha vyžadovala schopnosť určiť kvadratickú rovnicu na základe znalosti koreňov rovnice, zručnosť pri umocňovaní záporných čísel a pri práci so zlomkami. Úloha sa dala riešiť viacerými spôsobmi. Mierne úspešnejší boli žiaci GYM v porovnaní so žiakmi SOŠ a dievčatá v porovnaní s chlapcami. Rozdiely však neboli vecne významné.

Z grafu distribúcie úspešností žiackych odpovedí a hodnoty citlivosti vidíme, že úloha dobre rozlíšila najmä posledné tri výkonnostné skupiny v teste celkove menej úspešných žiakov. Úloha nebola pre žiakov až taká obťažná, ako sa predpokladalo. Potvrdzuje to aj graf závislosti pravdepodobnosti výberu odpovede od schopnosti žiakov. Žiak s priemernými schopnosťami na úrovni 0 odpovedal na úlohu správne s pravdepodobnosťou až 0,8. Pravdepodobnosť určenia správnej odpovede 0,5 dosiahli už žiaci s úrovňou schopnosti – 1,154 a vyššou (hodnota obťažnosti položky podľa IRT metódy). Rozlišovacia sila položky nebola veľká, čo vidíme z nie veľmi strmého priebehu krivky pravdepodobnosti voľby správnej odpovede a nie veľmi vysokej hodnoty rozlišovacej schopnosti položky 0,592 určenej IRT metódou. Značná časť žiakov s úrovňou schopnosti 0 a nižšou uprednostnila pri výbere svojej odpovede niektorý distraktor pred správnou odpoveďou (C). Vyberali si rovnomerne všetky distraktory s pravdepodobnosťou výberu okolo 0,1. Pravdepodobnosť voľby správnej odpovede (C) sa s rastúcou hodnotou úrovne schopnosti žiakov zvyšovala.

## Príklad č. 25

Téma: 3.4 Zhodné a podobné zobrazenia

Testované myšlienkové operácie: zložitejšie myšlienkové operácie

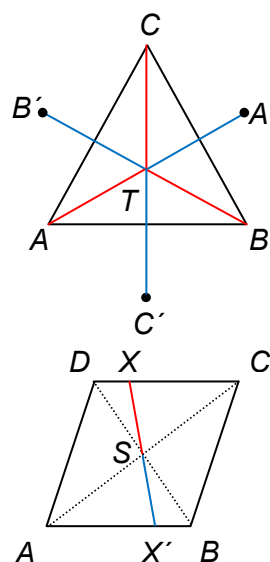
Predpokladaná obťažnosť: stredne ťažká úloha

Zadanie:

Dané sú útvary: rovnoramenný trojuholník, rovnostranný trojuholník, štvorec, kosoštvorec, rovnoramenný lichobežník, pravidelný päťuholník a pravidelný osemuholník. Vyberte možnosť, v ktorej sú z daných útvarov uvedené len všetky stredovo súmerné útvary.

Riešenie:

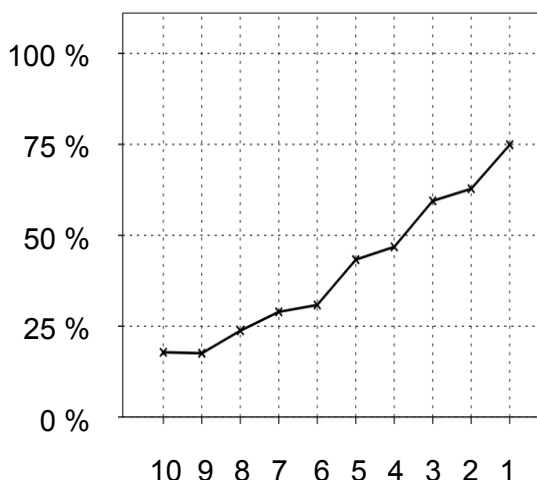
(1) Stred súmernosti útvaru  $S$  je taký bod, podľa ktorého sa každý bod útvaru zobrazí na nejaký iný bod útvaru. Žiadny trojuholník nie je stredovo súmerný. Netreba si mýliť ťažisko trojuholníka  $T$  so stredom súmernosti. Štvorec aj kosoštvorec sú stredovo súmerné, stredom súmernosti je ich priesečník uhlopriečok. Rovnoramenný lichobežník nemá stred súmernosti (priesečník uhlopriečok nie je vhodný). Stredovo súmerný je každý pravidelný  $n$ -uholník pre párne  $n$ . Preto pravidelný päťuholník nie je stredovo súmerný, pravidelný osemuholník je stredovo súmerný (stredom súmernosti je priesečník uhlopriečok spájajúcich protíahlé vrcholy pravidelného osemuholníka). Správna odpoveď je (B).



Štatistické vyhodnotenie:

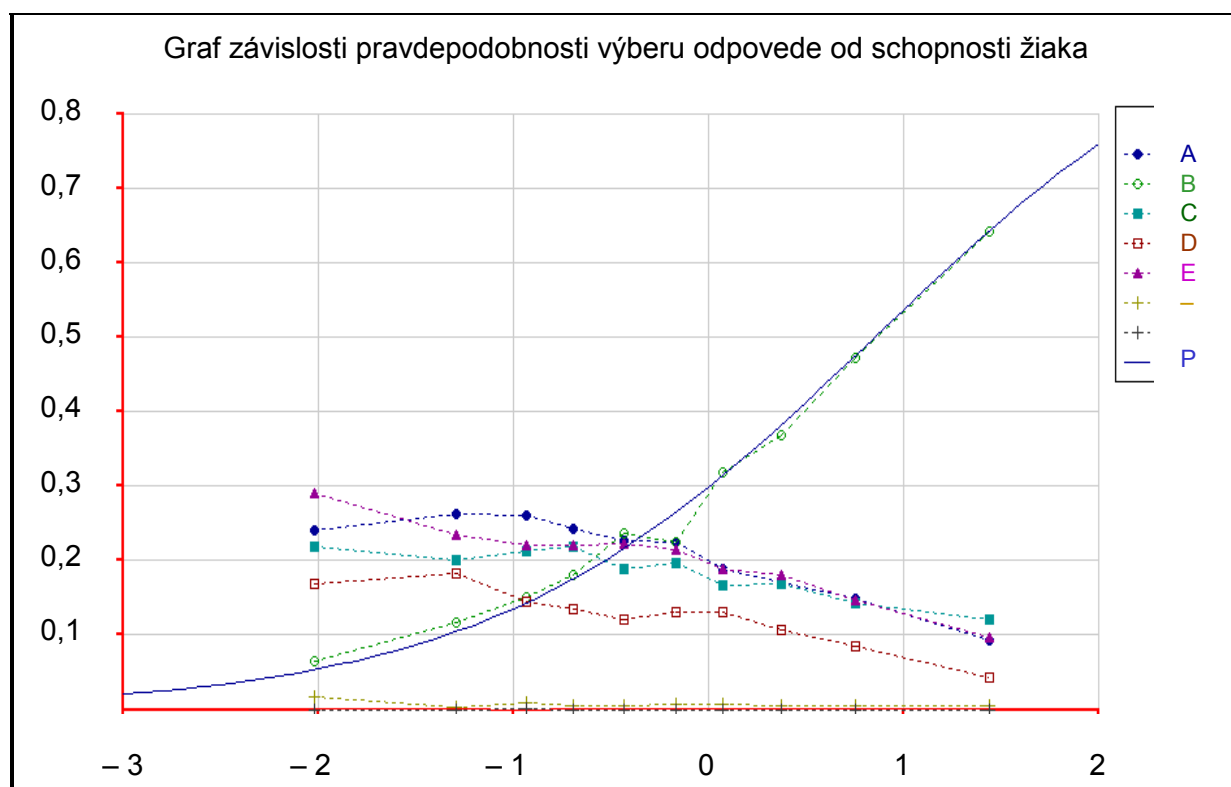
|                 |           |        |
|-----------------|-----------|--------|
| úspešnosť       | celková   | 40,6 % |
|                 | žiaci GYM | 49,5 % |
|                 | žiaci SOŠ | 24,6 % |
|                 | chlapci   | 40,7 % |
|                 | dievčatá  | 40,4 % |
| neriešenosť     |           | 0,3 %  |
| citlivosť       |           | 51,2 % |
| P. Bis.         |           | 30,3   |
| obťažnosť (IRT) |           | 0,518  |

Graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí:



|                              |  |       |
|------------------------------|--|-------|
| rozlišovacia schopnosť (IRT) |  | 0,484 |
|------------------------------|--|-------|

| Odpovede a frekvencia ich výskytu:                                                                      |            |                |                                                                                                                                                                                                  |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|----------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| odpoveď                                                                                                 | frekvencia | <i>P. Bis.</i> | predpokladaná príčina uvedenej odpovede                                                                                                                                                          |
| (B) štvorec, kosoštvorec, pravidelný osemuholník                                                        | 40,6 %     | 30             | správna odpoveď                                                                                                                                                                                  |
| (A) rovnostranný trojuholník, štvorec, pravidelný osemuholník                                           | 34,2 %     | – 18           | Žiaci určili rovnostranný trojuholník vďaka svojej symetrii ako stredovo súmerný útvar. Naopak vynechali kosoštvorec.                                                                            |
| (C) rovnostranný trojuholník, štvorec, kosoštvorec, pravidelný osemuholník                              | 16,9 %     | – 2            | Žiaci určili všetky stredovo súmerné útvary, žiadny z uvedených útvarov nevynechali, ale zaradili medzi stredovo súmerné útvary aj rovnostranný trojuholník, asi preto, že je „taký pravidelný“. |
| (D) rovnoramenný trojuholník, rovnostranný trojuholník, rovnoramenný lichobežník, pravidelný päťuholník | 5,5 %      | – 17           | Žiaci vybrali všetky uvedené „rovnoramenné“ útvary a osovo súmerný pravidelný päťuholník. Predpokladáme, že si pomýlili osovú a stredovú súmernosť.                                              |
| (E) rovnoramenný trojuholník, kosoštvorec, rovnoramenný lichobežník, pravidelný päťuholník              | 2,5 %      | – 12           | Myšlienková chyba: Opäť môžeme predpokladať, že žiaci zamenili osovú súmernosť za stredovú súmernosť a do svojej odpovede zahrnuli osovo súmerné útvary.                                         |
| –                                                                                                       | 0,3 %      | – 5            | neuvedená odpoveď                                                                                                                                                                                |



#### Komentár:

Úloha vyžadovala znalosť pojmu osovej a stredovej súmernosti a znalosť polohových vlastností rovinných útvarov. Úloha, ktorú by v nie tak dávnej minulosti zrejme vedel správne vyriešiť nejdenný žiak základnej školy, spôsobila maturantom značné problémy. 8,0 % žiakov (možnosti D a E) si pomýlilo pojem stredovej súmernosti s osovou súmernosťou a vybralo si možnosti obsahujúce osovo súmerné útvary. Zaujímavým zistením je, že 51,1 % žiakov (možnosti A a C) považovalo rovnostranný trojuholník za stredovo súmerný útvar. Teda viac ako polovica tohtoročných maturantov si myslela, že existuje stredovo súmerný trojuholník. 39,7 % žiakov (možnosti A a D) naopak za stredovo súmerný útvar nepovažovalo kosoštvorec. Úspešnosť chlapcov a dievčat bola rovnaká. Žiaci GYM dosiahli dvojnásobne vyššiu úspešnosť ako žiaci SOŠ (mierne vecne významný rozdiel). Z grafu distribúcie úspešností žiackych odpovedí vidíme, že úloha lepšie rozlíšila v teste celkovo úspešnejšiu polovicu žiakov. Rozdiel v úspešnosti menej úspešnej polovice žiakov bol iba asi 20 %. Z grafu rozloženia pravdepodobností výberu odpovede v závislosti od schopnosti žiakov vyčítame, že v skupine najmenej úspešných žiakov s úrovňou schopnosti  $-1$  a nižšou bola pravdepodobnosť voľby každého z distraktorov vyššia ako pravdepodobnosť voľby správnej odpovede (B). V skupine žiakov s úrovňou schopnosti medzi  $-1$  a  $0$  bola tiež vysoká pravdepodobnosť výberu distraktorov, ale už porovnateľná s pravdepodobnosťou voľby správnej odpovede (B). Distraktor (C) obsahujúci okrem všetkých stredovo súmerných útvarov aj rovnostranný trojuholník bol atraktívny aj pre celkovo v teste úspešnejších žiakov.

## Príklad č. 26

Téma: 3.2 Analytická geometria v rovine

Testované myšlienkové operácie: zložitejšie myšlienkové operácie

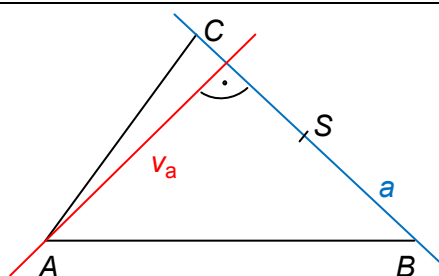
Predpokladaná obťažnosť: stredne ťažká úloha

Zadanie:

V trojuholníku  $ABC$  výška na stranu  $a$  leží na priamke určenej rovnicou  $4x + 5y + 7 = 0$ . Stred strany  $a$  je bod  $S[5; 2]$ . Určte všeobecnú rovnicu priamky, na ktorej leží strana  $a$  trojuholníka  $ABC$ .

Riešenie:

(1) Všeobecnú rovnicu priamky, na ktorej leží strana  $a$ , budeme hľadať v tvare  $mx + ny + c = 0$ , kde  $(m; n)$  sú súradnice normálového vektora priamky  $a$ .



(2) Ak normálový vektor výšky na stranu  $a$  má súradnice  $(4; 5)$ , tak normálový vektor priamky  $a$  kolmej na  $v_a$  môže mať súradnice  $(5; -4) = (m; n)$ , aby skalárny súčin dvoch vektorov sa rovnal 0. Hľadaná rovnica priamky  $a$  preto nadobúda tvar  $5x - 4y + c = 0$ .

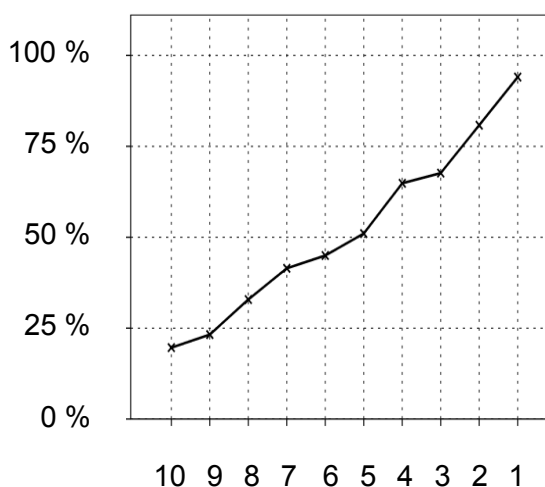
(3) Hodnotu  $c$  určíme dosadením známych súradníc bodu  $S$  ležiaceho na priamke  $a$  za  $x$  a  $y$  v rovnici priamky  $a$ :  $S[5; 2] \in a \Rightarrow 5 \cdot 5 - 4 \cdot 2 + c = 0 \Rightarrow c = -17$ , potom  $a: 5x - 4y - 17 = 0$ .

(4) Správna je odpoveď (D).

Štatistické vyhodnotenie:

|                 |           |         |
|-----------------|-----------|---------|
| úspešnosť       | celková   | 52,1 %  |
|                 | žiaci GYM | 64,0 %  |
|                 | žiaci SOŠ | 30,4 %  |
|                 | chlapci   | 50,3 %  |
|                 | dievčatá  | 55,4 %  |
| neriešenosť     |           | 1,1 %   |
| citlivosť       |           | 66,0 %  |
| P. Bis.         |           | 39,0    |
| obťažnosť (IRT) |           | - 0,090 |

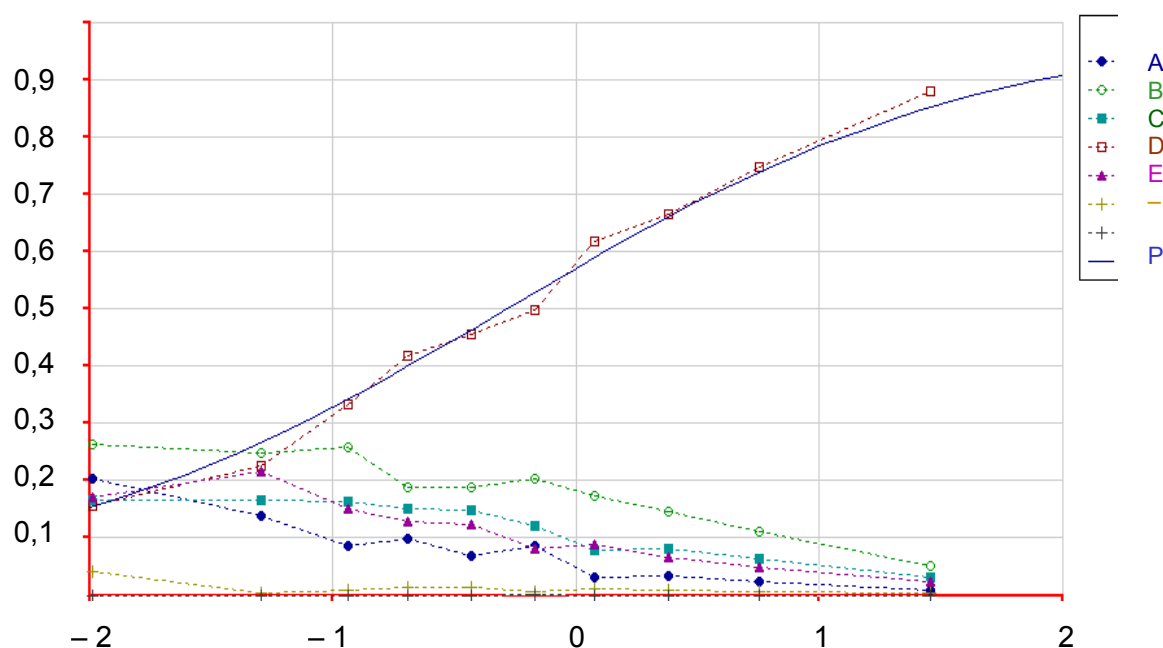
Graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí:



Odpovede a frekvencia ich výskytu:

| odpoveď                | frekvencia | P. Bis. | predpokladaná príčina uvedenej odpovede                                                                                                                                                                 |
|------------------------|------------|---------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| (D) $5x - 4y - 17 = 0$ | 52,1 %     | 39      | správna odpoveď                                                                                                                                                                                         |
| (B) $4x + 5y - 30 = 0$ | 17,7 %     | - 13    | Myšlienková chyba: Žiaci v (2) nesprávne určili súradnice normálového vektora $(m; n) = (4; 5)$ priamky $a$ , ponechali ich rovnaké, ako má priamka, na ktorej leží $v_a$ .                             |
| (C) $5x + 4y - 33 = 0$ | 11,3 %     | - 13    | Myšlienková chyba: Žiaci v (2) nesprávne určili súradnice normálového vektora $(m; n) = (5; 4)$ priamky $a$ , iba vymenili súradnice normálového vektora priamky $v_a$ , ale nezmenili jedno znamienko. |
| (E) $5x - 4y + 10 = 0$ | 10,5 %     | - 16    | Žiaci počítali správne až po (3), kde pri výpočte hodnoty $c$ zamenili $x$ za $y$ pri dosadení súradníc bodu $S$ do rovnice $a$ .                                                                       |
| (A) $4x + 5y = 0$      | 7,3 %      | - 18    | Žiaci urobili chybu ako pri (B) a navyše za $x$ a $y$ dosadili súradnice normálového vektora priamky $a$ namiesto súradníc bodu $S$ .                                                                   |
| –                      | 1,1 %      | - 6     | neuvedená odpoveď                                                                                                                                                                                       |

Graf závislosti pravdepodobnosti výberu odpovede od schopnosti žiaka



## Komentár:

Úloha vyžadovala znalosť všeobecnej rovnice priamky a významu premenných v nej sa nachádzajúcich, schopnosť určiť k danému vektoru kolmý vektor (napríklad pomocou skalárneho súčinu) a dopočítať hodnotu neznámej  $c$  vo všeobecnej rovnici priamky pomocou súradníc bodu ležiaceho na priamke. 62,6 % žiakov (možnosti D a E) správne určilo súradnice normálového vektora hľadanej priamky  $a$ . Z toho 10,5 % žiakov zlyhalo pri dopočítavaní hodnoty koeficienta  $c$  v rovnici priamky  $a$ , pretože z nevedomosti alebo nepozornosti zamenilo  $x$  a  $y$  pri dosadzovaní súradníc bodu  $S$  („usporiadanej“ dvojice). 36,3 % žiakov (možnosti A, B a C) nedokázalo správne určiť normálový vektor vo všeobecnej rovnici hľadanej priamky  $a$ . Všetky skupiny žiakov zvládli úlohu s približne rovnakou úspešnosťou. Výnimkou boli žiaci SOŠ, ktorých rozdiel priemernej úspešnosti 33,6 % v porovnaní so žiakmi GYM je stredne vecne významný.

Úloha dobre rozlíšila všetky výkonnostné skupiny žiakov, čo dokazuje aj graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí a hodnota citlivosti. Správnu odpoveď (D) si volili najmä žiaci celkove v teste úspešní ( $P. Bis.$  39). Distraktory si volili väčšinou žiaci v teste celkove menej úspešní ( $P. Bis.$  – 18 až – 13). Najatraktívnejším distraktorom pre žiakov všetkých úrovní schopnosti bol distraktor (B). Medzi žiakmi s úrovňou schopnosti – 1 a nižšou bola pravdepodobnosť voľby distraktora (B) vyššia ako pravdepodobnosť voľby správnej odpovede (D). Pravdepodobnosť voľby všetkých distraktorov s rastúcou úrovňou schopnosti žiakov klesá. Z grafu pravdepodobnosti výberu odpovede v závislosti od úrovne schopnosti žiakov tiež vidíme, že úloha bola pre žiakov podľa predpokladu stredne obťažná. Priemerný žiak s úrovňou schopnosti 0 určil správnu odpoveď s pravdepodobnosťou 0,6 a obťažnosť úlohy podľa vyhodnotenia výsledkov žiakov IRT metódou (úroveň schopnosti žiakov, ktorí vyberú správnu odpoveď s pravdepodobnosťou 0,5) bola – 0,090.

## Príklad č. 27

Téma: 1.1 Logika a množiny

Testované myšlienkové operácie: zložitejšie myšlienkové operácie

Predpokladaná obťažnosť: stredne ťažká úloha

Zadanie:

Mama, otec a ich dve deti si plánovali dovolenku. Každý člen rodiny vyslovil svoje želanie:

Mama: „Ak pôjdeme k moru, tak chcem bývať v penzióne alebo chcem mať polpenziu.“

Otec: „Ak nepôjdeme k moru, tak chcem bývať v hoteli.“

Syn: „Chcem ísť k moru a bývať v penzióne.“

Dcéra: „Chcem ísť k moru alebo bývať v hoteli.“

Nakoniec všetci išli v lete k moru, bývali v hoteli a mali polpenziu.

Určte všetkých členov rodiny, ktorým sa splnilo želanie.

Riešenie:

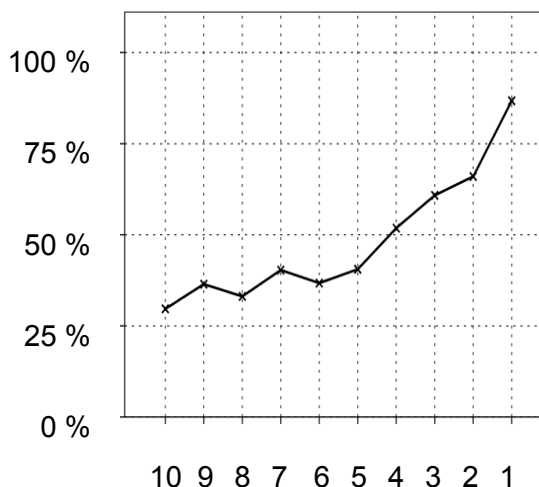
(1) Predpoklad implikácie výroku mamy sa splnil, preto na splnenie jej želania stačilo, aby aj dôsledok bol pravdivý. Ním bola alternatíva, ktorá je pravdivá, ak aspoň jedna časť je pravdivá, čo sa splnilo (polpenzia). Predpoklad implikácie výroku otca je nepravdivý, preto akákoľvek pravdivostná hodnota dôsledku výroku nemá vplyv na celkovú pravdivosť implikácie. Druhá časť synovej konjunkcie je nepravdivá a preto celá synova konjunkcia je nepravdivá – synovo želanie sa nesplnilo. Obe časti výroku dcérinej alternatívy boli splnené.

(2) Všetkým členom rodiny s výnimkou syna sa želanie splnilo. Správna odpoveď je (A).

Štatistické vyhodnotenie:

|             |           |        |
|-------------|-----------|--------|
| úspešnosť   | celková   | 48,2 % |
|             | žiaci GYM | 55,8 % |
|             | žiaci SOŠ | 34,6 % |
|             | chlapci   | 47,6 % |
|             | dievčatá  | 49,3 % |
| neriešenosť |           | 0,2 %  |
| citlivosť   |           | 43,3 % |
| P. Bis.     |           | 24,3   |

Graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí:



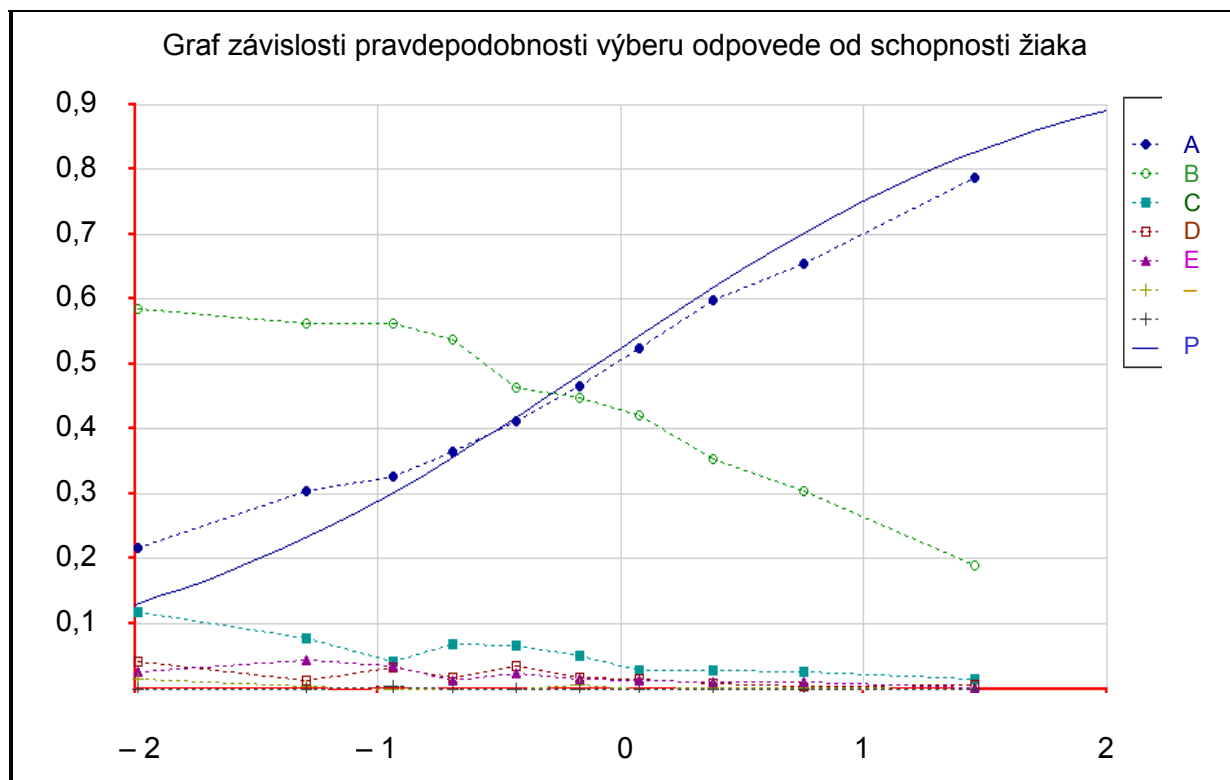
obťažnosť (IRT)

0,118

rozlišovacia schopnosť (IRT)

0,378

| Odpovede a frekvencia ich výskytu: |            |         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
|------------------------------------|------------|---------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| odpoveď                            | frekvencia | P. Bis. | predpokladaná príčina uvedenej odpovede                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
| (A) mama, otec a dcéra             | 48,2 %     | 24      | správna odpoveď                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
| (B) mama a dcéra                   | 43,0 %     | – 14    | Žiaci nesprávne vyhodnotili splnenie otcovho želania. Otcovo želanie bolo vyslovené v podobe implikácie. Predpoklad implikácie (nepôjdeme k moru) bol nepravdivý (všetci išli k moru). Žiaci potom hneď vyhodnotili otcovo želanie ako nesplnené. Ak je však predpoklad implikácie nepravdivý, tak implikácia je vždy pravdivá, bez ohľadu na pravdivosť alebo nepravdivosť dôsledku implikácie. |
| (C) dcéra                          | 5,0 %      | – 12    | Žiaci okrem otca vynechali aj mamu, pretože chcela bývať v penzióne, ale všetci bývali v hoteli a preto žiaci vyhodnotili želanie mamy ako nesplnené. Ubytovanie v hoteli však bolo súčasťou dôsledku implikácie vyjadreného formou alternatívy (penzión alebo polpenzia), ktorá je pravdivá, ak je splnená aspoň jedna zložka alternatívy.                                                      |
| (E) mama, otec a syn               | 1,8 %      | – 6     | Žiaci vynechali iba dcéru. Zrejme jej alternatívu pochopili „vo vylučovacom“ poňatí, keď si mysleli, že sa môže splniť iba jedna časť alternatívy (jedno, alebo druhé). Keďže sa splnili obe, vyhodnotili žiaci želanie dcéry ako nesplnené.                                                                                                                                                     |
| (D) syn a dcéra                    | 1,8 %      | – 10    | Žiaci vynechali oboch rodičov, možné dôvody rozhodnutia žiakov sú vysvetlené vyššie. Prekvapivo však vyhodnotili synovo želanie ako splnené. Žiaci zrejme túto odpoveď vyberali aj náhodne.                                                                                                                                                                                                      |
| –                                  | 0,2 %      | – 5     | neuvedená odpoveď                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |



## Komentár:

Úloha vyžadovala základné poznatky o pravdivostnej hodnote jednoduchých výrokov a výrokov z nich zložených. Takmer polovica žiakov správne určila pravdivostnú hodnotu všetkých štyroch výrokov. Najčastejšou chybou žiakov pri riešení úlohy bolo určenie pravdivosti implikácie, ktorej predpoklad bol nepravdivý. Až 43,0 % žiakov určilo implikáciu s nepravdivým predpokladom (výrok otca) ako nepravdivú a vybralo si distraktor (B). Žiaci GYM boli mierne úspešnejší ako žiaci SOŠ. Chlapci a dievčatá riešili úlohu s približne rovnakou priemernou úspešnosťou. Úloha dobre rozlíšila prvých päť výkonnostných skupín žiakov v teste celkovo úspešnejších. Druhú polovicu žiakov celkovo v teste menej úspešných úloha takmer nerozlíšila, dosiahli približne rovnakú priemernú úspešnosť medzi 30 % až 40 %, čo pozorujeme na grafe distribúcie úspešností žiackych odpovedí. Pravdepodobnosť voľby distraktora (B) je u žiakov všetkých úrovní schopnosti veľmi vysoká. V skupine žiakov s úrovňou schopnosti 0 a nižšou bola pravdepodobnosť voľby distraktora (B) vyššia ako 0,45 a dosiahla takmer dvojnásobok pravdepodobnosti voľby správnej odpovede (A). Pravdepodobnosť voľby distraktora (B) s rastúcou úrovňou schopnosti žiakov klesá, ale aj v skupine najšikovnejších žiakov je nad úrovňou 0,2. Problémy s určovaním pravdivosti výrokov teda majú aj najlepší žiaci. Naopak, pravdepodobnosť voľby správnej odpovede (A) sa s rastúcou úrovňou schopnosti žiakov zvyšuje. Aj žiaci s najnižšou úrovňou schopnosti si však vyberali správnu odpoveď (A) s pravdepodobnosťou vyššou ako 0,2. Tento jav potvrdila aj nie až tak vysoká hodnota *P. Bis.* správnej odpovede 24.

## Príklad č. 28

Téma: 3.1 Základné rovinné útvary

Testované myšlienkové operácie: zložitejšie myšlienkové operácie

Predpokladaná obťažnosť: stredne ťažká úloha

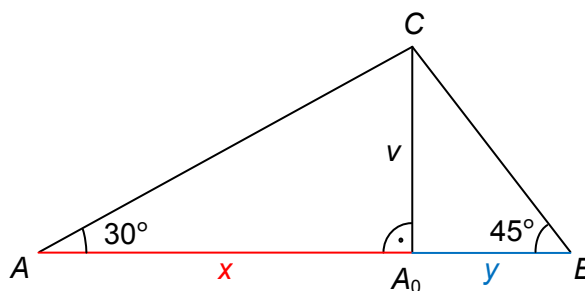
Zadanie:

V trojuholníku  $ABC$  majú vnútorné uhly ležiace pri vrcholoch  $A$  a  $B$  veľkosti  $30^\circ$  a  $45^\circ$ . Výška na stranu  $AB$  je  $1$  cm. Určte obsah trojuholníka  $ABC$ .

Riešenie:

(1) Označme v trojuholníku  $ABC$  $|\sphericalangle CAB| = \alpha = 30^\circ$ ,  $|\sphericalangle CBA| = \beta = 45^\circ$ , $|A_0C| = v = 1$  cm,  $|AA_0| = x$ ,  $|A_0B| = y$ .

Pomocou goniometrických funkcií v pravouhlých trojuholníkoch  $AA_0C$  a  $CA_0B$  určíme dĺžky úsečiek  $x$  a  $y$ .



(2) V pravouhlom trojuholníku  $AA_0C$  určíme dĺžku  $x$ :  $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{v}{x}$ , odkiaľ  $x = \frac{1 \text{ cm}}{\operatorname{tg} 30^\circ} = \sqrt{3}$  cm.

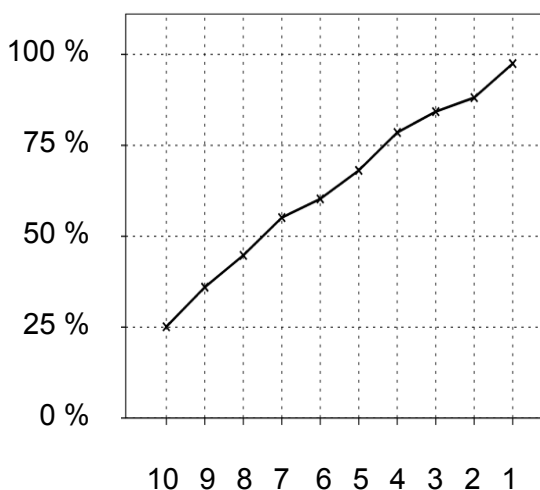
(3) V pravouhlom trojuholníku  $CA_0B$  určíme dĺžku  $y$ :  $\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{v}{y}$ , odkiaľ  $y = \frac{1 \text{ cm}}{\operatorname{tg} 45^\circ} = 1$  cm.

(4) Obsah trojuholníka  $ABC$  je  $\frac{(x+y) \cdot v}{2} = \frac{(\sqrt{3}+1) \cdot 1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \text{ cm}^2$ . Správna odpoveď je (E).

Štatistické vyhodnotenie:

|                 |           |         |
|-----------------|-----------|---------|
| úspešnosť       | celková   | 63,8 %  |
|                 | žiaci GYM | 72,4 %  |
|                 | žiaci SOŠ | 48,3 %  |
|                 | chlapci   | 63,4 %  |
|                 | dievčatá  | 64,5 %  |
| neriešenosť     |           | 1,0 %   |
| citlivosť       |           | 62,2 %  |
| P. Bis.         |           | 39,9    |
| obťažnosť (IRT) |           | – 0,570 |

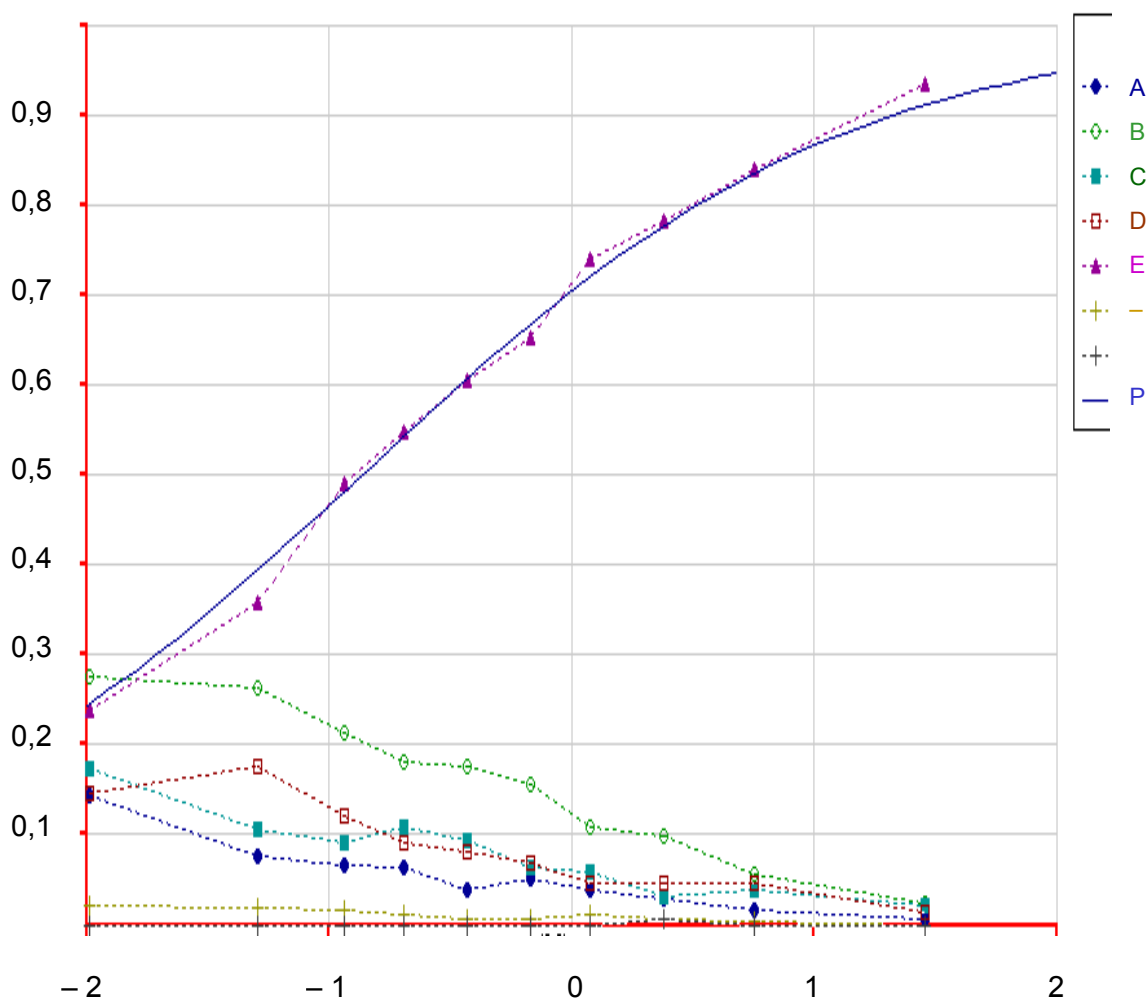
Graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí:



Odpovede a frekvencia ich výskytu:

| odpoveď                    | frekvencia | P. Bis. | predpokladaná príčina uvedenej odpovede                                                                                                                               |
|----------------------------|------------|---------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| (E) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ | 63,8 %     | 40      | správna odpoveď                                                                                                                                                       |
| (B) $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$ | 14,7 %     | – 22    | Žiaci mohli tieto odpovede vypočítať numerickými chybami, zámenou hodnôt goniometrickej funkcie tangens za sínus alebo kosínus, prípadne inými myšlienkovými chybami. |
| (D) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ | 7,9 %      | – 18    |                                                                                                                                                                       |
| (C) $\frac{\sqrt{2}+2}{2}$ | 7,5 %      | – 14    |                                                                                                                                                                       |
| (A) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ | 5,0 %      | – 11    |                                                                                                                                                                       |
| –                          | 1,1 %      | – 6     | neuvedená odpoveď                                                                                                                                                     |

Graf závislosti pravdepodobnosti výberu odpovede od schopnosti žiaka



Komentár:

Úloha vyžadovala schopnosť riešiť metrickú úlohu v trojuholníku, správne vypočítať dĺžky strán pomocou goniometrickej funkcie v pravouhlom trojuholníku a zručnosť pri počítaní s odmocninami a zlomkami. Podľa predpokladu bola úloha stredne obtiažná pre všetkých žiakov, v priemernej úspešnosti zaostali iba žiaci SOŠ (mierne vecne významný rozdiel v porovnaní so žiakmi GYM). Úloha veľmi dobre rozlíšila žiakov všetkých výkonnostných skupín, čo dokazuje graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí, hodnota citlivosti aj hodnota rozlišovacej schopnosti položky vyhodnotená IRT metódou. Priemerný žiak, s úrovňou schopnosti okolo 0, určil správnu odpoveď (E) s pravdepodobnosťou 0,7. Správnu odpoveď (E) si vybrali väčšinou žiaci v teste celkove úspešní (*P. Bis.* 40). Pravdepodobnosť výberu správnej odpovede (E) sa s rastúcou úrovňou schopnosti žiakov zvyšovala. Distraktory (najčastejšie možnosť B) si vybrali najmä žiaci v teste celkove menej úspešní (*P. Bis.* – 22 až – 11) a žiaci s nižšou úrovňou schopnosti (– 1 a nižšou).

## Príklad č. 29

Téma: 2.4 Logaritmické a exponenciálne funkcie, geometrická postupnosť

Testované myšlienkové operácie: zložitejšie myšlienkové operácie

Predpokladaná obťažnosť: stredne ťažká úloha

Zadanie:

Sklo s hrúbkou 1 mm zachytí 5 % prechádzajúceho UV žiarenia. Koľko percent prechádzajúceho UV žiarenia zachytí sklo s hrúbkou 1 cm, zostavené z takýchto 1 mm skiel?

Riešenie:

(1) Ak sklo s hrúbkou 1 mm zachytí 5 % prechádzajúceho žiarenia, tak ďalej prepustí 95 % prechádzajúceho žiarenia. Ak počiatočné množstvo prichádzajúceho žiarenia označíme  $a_0$ , potom množstvo žiarenia prepusteného prvým sklom môžeme vyjadriť ako  $a_1 = 0,95 \cdot a_0$ .

(2) Druhé sklo s hrúbkou 1 mm prepustí 95 % prichádzajúceho žiarenia prepusteného prvým sklom, teda  $a_2 = 0,95 \cdot a_1 = 0,95 \cdot 0,95 \cdot a_0 = 0,95^2 \cdot a_0$ .

(3) Sklo s hrúbkou 1 cm bude zložené z desiatich skiel s hrúbkou 1 mm. Desiatym sklom v poskladanej vrstve skiel prejde 95 % žiarenia prepusteného deviatym sklom, čo môžeme vyjadriť ako  $a_{10} = 0,95 \cdot a_9 = 0,95 \cdot 0,95^9 \cdot a_0 = 0,95^{10} \cdot a_0 \approx 0,5987 \cdot a_0$ . Desiatym sklom teda prešlo približne 59,87 % prichádzajúceho žiarenia. Preto sústava desiatich skiel zachytila  $100 \% - 59,87 \% \approx 40,13 \%$  prechádzajúceho žiarenia. Správna odpoveď je (B).

Štatistické vyhodnotenie:

|           |           |        |
|-----------|-----------|--------|
| úspešnosť | celková   | 16,8 % |
|           | žiaci GYM | 20,1 % |
|           | žiaci SOŠ | 11,0 % |
|           | chlapci   | 19,7 % |
|           | dievčatá  | 11,5 % |

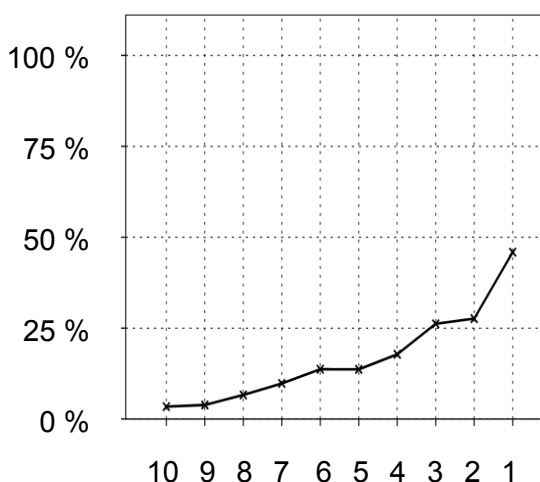
neriešenosť 0,5 %

citlivosť 33,1 %

P. Bis. 26,3

obťažnosť (IRT) 1,956

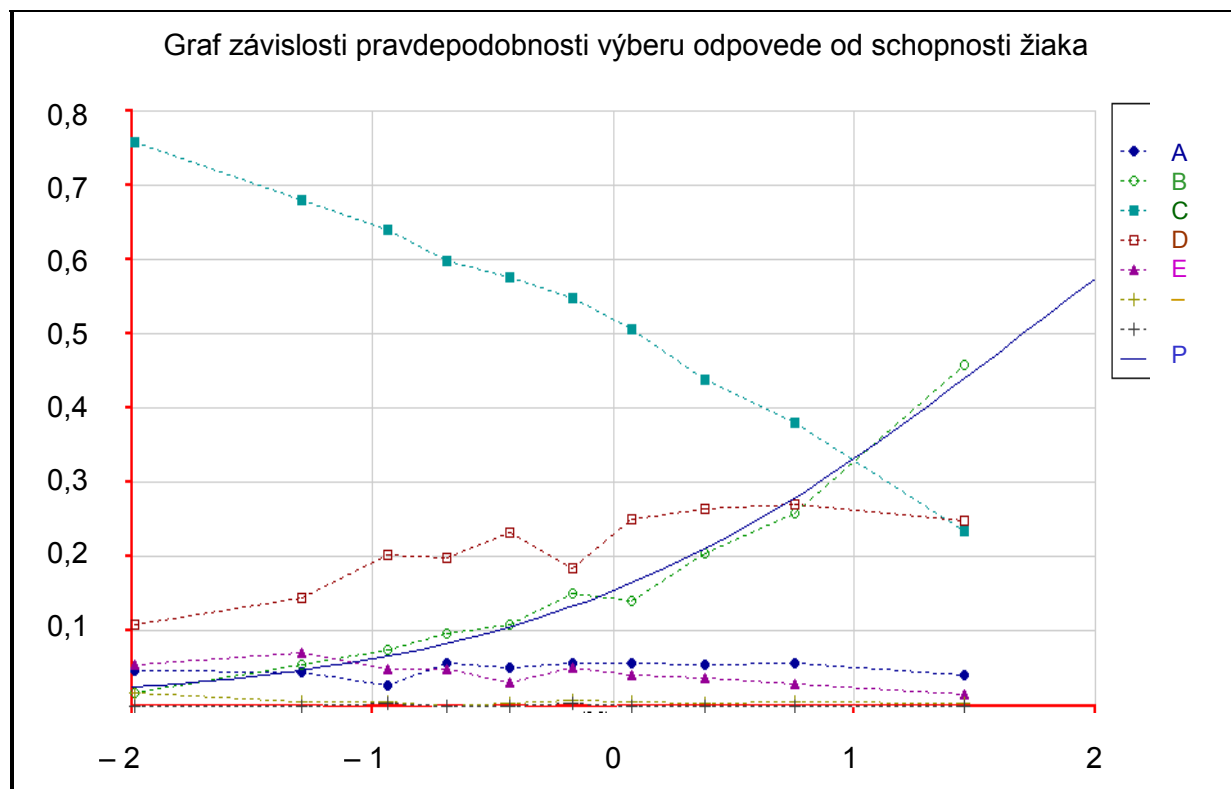
Graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí:



rozlišovacia schopnosť (IRT)

0,542

| Odpovede a frekvencia ich výskytu: |            |         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
|------------------------------------|------------|---------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| odpoveď                            | frekvencia | P. Bis. | predpokladaná príčina uvedenej odpovede                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
| (C) 50                             | 52,1 %     | – 38    | Myšlienková chyba: Žiaci si neuvedomili, že desať tenkých skiel poskladajú vedľa seba a vytvoria sústavu skiel, pričom do každého ďalšieho skla sústavy vchádza už menšie množstvo žiarenia ako do predchádzajúceho skla z dôvodu zachytenia istej časti žiarenia predchádzajúcim sklom. Žiaci jednoducho rozhodli, že ak každé z desiatich skiel zachytí 5 % žiarenia, tak celkove desať skiel zachytí $10 \cdot 5 \% = 50 \%$ žiarenia.                                                                                                                                                                                                                         |
| (D) 59,87                          | 21,5 %     | 22      | Žiaci vypočítali úlohu správne, ale neodpovedali na otázku úlohy. Žiaci vypočítali, koľko percent prechádzajúceho žiarenia sklá prepustia a tento údaj uviedli ako odpoveď. Otázka úlohy sa však pýtala na počet percent žiarenia, ktoré sklo s hrúbkou 1 cm zachytí.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| (B) 40,13                          | 16,8 %     | 26      | správna odpoveď                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| (A) 36,98                          | 5,0 %      | 2       | Myšlienková chyba: Žiaci v (3) vypočítali množstvo prepusteného žiarenia desiatym sklom ako $a_{10} = 0,95^9 \cdot a_0 \doteq 0,6302 \cdot a_0$ . V (1) chybné predpokladali, že z prvého skla sústavy ešte vychádza 100 % prechádzajúceho žiarenia. V uvedenom výpočte v exponente vidíme číslo 9, teda žiaci počítali iba deväť prechodov žiarenia cez sklo. V možnosti (A) uviedli ako odpoveď množstvo pohlteneho žiarenia cez deväť vrstiev skla, v možnosti (E) žiaci podobne ako v možnosti (D) neodpovedali na otázku, ale namiesto množstva žiarenia zachyteného prechodom cez deväť vrstiev skla uviedli ako odpoveď množstvo prechádzajúceho žiarenia. |
| (E) 63,02                          | 4,1 %      | 0       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| –                                  | 0,5 %      | – 6     | neuvedená odpoveď                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |



## Komentár:

Úloha vyžadovala znalosť určenia hodnoty konkrétneho člena geometrickej postupnosti alebo iného spôsobu určenia hodnoty prechádzajúceho a pohlteneho žiarenia. Úlohu riešilo správne 38,3 % žiakov (možnosti B a D), ale iba 16,8 % žiakov na základe svojich výpočtov zvolilo správnu odpoveď (B). Ostatní žiaci, podobne ako pri voľbe distraktora (E), boli nepozorní pri čítaní a pochopení otázky úlohy a napriek správne postupujú zvoliť nesprávnu odpoveď, zamenili pojmy prechádzajúceho a zachyteného žiarenia (spolu 25,6 % žiakov). Preto bola položka napriek predpokladom pre žiakov veľmi až extrémne obtiažná. Správnu odpoveď (B) uviedol iba asi každý piaty chlapec a žiak GYM a dokonca iba asi každé desiate dievča a asi každý desiaty žiak SOŠ. Necelá desatina žiakov sa pri riešení úlohy dopustila myšlienkového chyby, keď pri správnom postupe uvažovala iba o deviatich prechodoch žiarenia cez sklenenú vrstvu namiesto desiatich prechodov. Až 52,1 % žiakov (možnosť C) vôbec nepochopilo podstatu úlohy a uvažovalo o každej z desiatich sklenených vrstiev ako o samostatnej jednotke, do ktorej vždy vchádza rovnako veľké počiatkové množstvo žiarenia. Možnosť (C) si volili väčšinou žiaci v teste celkovo menej úspešní (*P. Bis.* – 38), ale z grafu závislosti výberu odpovede od schopnosti žiakov vidíme, že pravdepodobnosť výberu distraktora (C) je na celej škále úrovne schopnosti žiakov oveľa vyššia ako pravdepodobnosť voľby správnej odpovede (B), takže distraktor (C) volili aj žiaci v teste celkovo úspešnejší. Podobne pravdepodobnosť voľby distraktora (D) súvisiaceho so správnou odpoveďou (B) je vyššia na celej škále úrovne schopnosti žiakov.

## Príklad č. 30

Téma: 4.5 Telesá

Testované myšlienkové operácie: zložitejšie myšlienkové operácie

Predpokladaná obťažnosť: stredne ťažká úloha

Zadanie:

Pravidelný ihlan so štvorcovou podstavou rozrežeme rovinou rovnobežnou s podstavou na dve časti (pozrite obrázok). Objem vzniknutého menšieho ihlana tvorí 20 % objemu pôvodného ihlana. Podstava vzniknutého menšieho ihlana má obsah  $10 \text{ cm}^2$ . Určte v centimetroch štvorcových obsah podstavy pôvodného ihlana.

Riešenie:

(1) Pôvodný a vzniknutý menší ihlan sú podobné. Označme koeficient podobnosti  $k$ , dĺžku hrany podstavy menšieho ihlana  $a$ , výšku menšieho ihlana  $v$ . Potom dĺžka hrany podstavy pôvodného ihlana bude  $ka$ , výška ihlana bude  $kv$ .

(2) Objem menšieho ihlana vyjadríme ako  $V_m = \frac{a \cdot a \cdot v}{3}$ .

(3) Potom objem pôvodného ihlana vyjadríme ako  $V_p = \frac{ka \cdot ka \cdot kv}{3}$ , po úprave  $V_p = k^3 \cdot \frac{a \cdot a \cdot v}{3} = k^3 \cdot V_m$ .

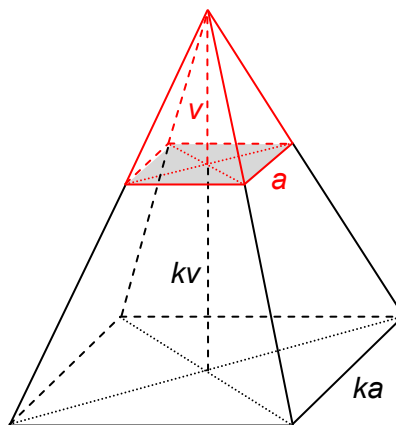
(4) Podľa zadania objem menšieho ihlana tvorí 20 % (jednu pätinu) objemu pôvodného ihlana, čo zapíšeme rovnicou, z ktorej určíme  $k$ :

$V_m = \frac{1}{5} \cdot V_p$ , po dosadení  $V_m = \frac{1}{5} \cdot k^3 \cdot V_m$ , po úprave  $k^3 = 5$ , odkiaľ  $k = \sqrt[3]{5}$ .

(5) Vypočítame obsah podstavy pôvodného ihlana pomocou  $k$ , ak obsah podstavy menšieho ihlana je  $a \cdot a = a^2 = 10 \text{ cm}^2$ :

$S_p = ka \cdot ka = k^2 \cdot a^2 = (\sqrt[3]{5})^2 \cdot 10 \text{ cm}^2 \doteq 29,24 \text{ cm}^2$ .

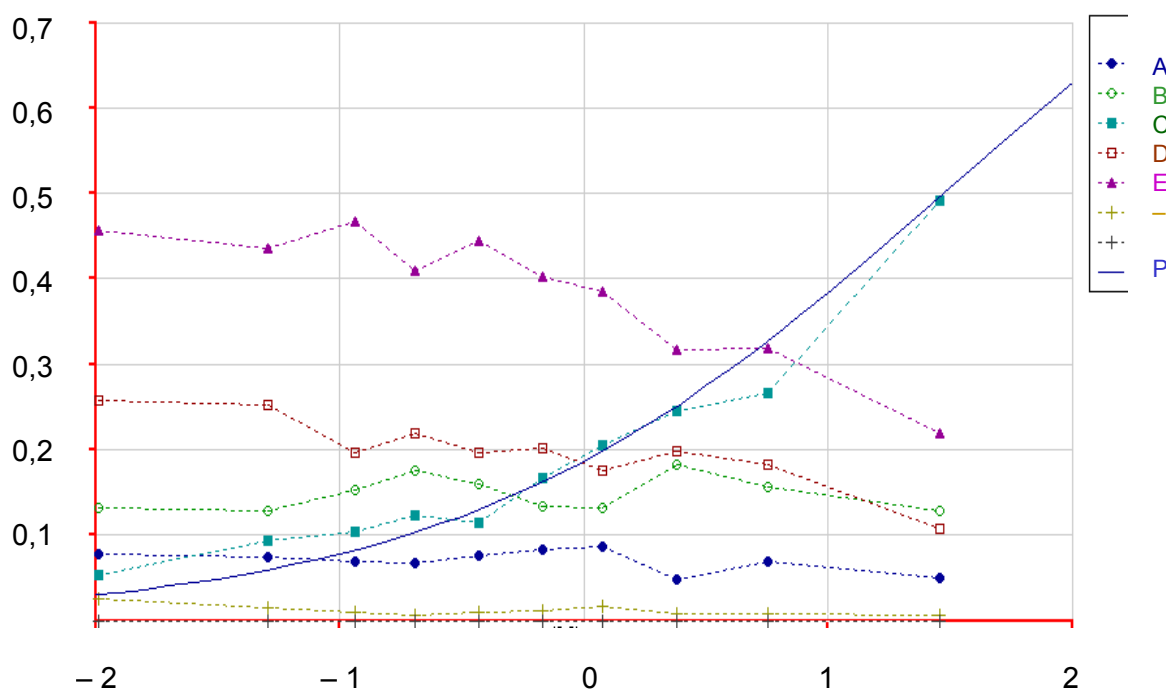
(6) Obsah podstavy pôvodného ihlana v centimetroch štvorcových je 29,24. Správna odpoveď je (C).



| Štatistické vyhodnotenie:          |            |         | Graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí:                                                                                                                                                                                                                                      |       |
|------------------------------------|------------|---------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| úspešnosť                          | celková    | 19,9 %  |                                                                                                                                                                                                                                                                                     |       |
|                                    | žiaci GYM  | 24,1 %  |                                                                                                                                                                                                                                                                                     |       |
|                                    | žiaci SOŠ  | 12,2 %  |                                                                                                                                                                                                                                                                                     |       |
|                                    | chlapci    | 22,0 %  |                                                                                                                                                                                                                                                                                     |       |
|                                    | dievčatá   | 15,9 %  |                                                                                                                                                                                                                                                                                     |       |
| neriešenosť                        |            | 1,1 %   |                                                                                                                                                                                                                                                                                     |       |
| citlivosť                          |            | 32,7 %  |                                                                                                                                                                                                                                                                                     |       |
| P. Bis.                            |            | 23,4    |                                                                                                                                                                                                                                                                                     |       |
| obťažnosť (IRT)                    |            | 1,957   | rozlišovacia schopnosť (IRT)                                                                                                                                                                                                                                                        | 0,460 |
| Odpovede a frekvencia ich výskytu: |            |         |                                                                                                                                                                                                                                                                                     |       |
| odpoveď                            | frekvencia | P. Bis. | predpokladaná príčina uvedenej odpovede                                                                                                                                                                                                                                             |       |
| (E) 50                             | 37,8 %     | – 10    | Myšlienková chyba: Žiaci predpokladali, že objemy ihlanov a obsahy podstáv ihlanov sú v rovnakom pomere. Preto ak objem menšieho ihlana bola pätina objemu pôvodného ihlana, tak aj $10 \text{ cm}^2$ bude pätina obsahu podstavy pôvodného ihlana, teda $50 \text{ cm}^2$ .        |       |
| (C) 29,24                          | 19,9 %     | 23      | správna odpoveď                                                                                                                                                                                                                                                                     |       |
| (D) 40                             | 19,5 %     | – 10    | Myšlienková chyba: Žiaci predpokladali, že ak menší ihlan je pätinou objemu celého ihlana, tak zvyšok telesa tvorí štyri pätiny objemu a teda obsah podstavy tohto telesa je štyrikrát väčší ako obsah podstavy menšieho ihlana, teda $4 \cdot 10 \text{ cm}^2 = 40 \text{ cm}^2$ . |       |
| (B) 22,36                          | 14,8 %     | 2       | Žiaci v (3) pri vyjadrení obsahu podstavy zaviedli iba jeden koeficient podobnosti:<br>$V_p = \frac{k \cdot a^2 \cdot kv}{3}$ Následne počítali v (4) s $k = \sqrt[2]{5}$ , v (5) $S_p = k \cdot a^2 = \sqrt{5} \cdot 10 \div 22,36$ .                                              |       |

|           |       |     |                                                                                                                             |
|-----------|-------|-----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| (A) 17,10 | 6,9 % | – 3 | Žiaci v (5) neumocnili hodnotu $k$ :<br>$S_p = k \cdot a^2 = \sqrt[3]{5} \cdot 10 \text{ cm}^2 \doteq 17,10 \text{ cm}^2$ . |
| –         | 1,1 % | – 6 | neuvedená odpoveď                                                                                                           |

Graf závislosti pravdepodobnosti výberu odpovede od schopnosti žiaka



## Komentár:

Úloha vyžadovala znalosť metrických vzťahov v ihlane, podobnosti útvarov a zručnosť pri práci s treťou odmocninou, či už pri úprave výrazu alebo pri výpočte kalkulačkou. Pre chlapcov a žiakov GYM bola úloha veľmi obťažná, pre dievčatá a žiakov SOŠ dokonca extrémne obťažná. Z grafu distribúcie úspešností žiackych odpovedí vidíme, že úloha odlíšila iba najúspešnejšiu desatinu žiakov, priemerná úspešnosť všetkých ostatných žiakov bola nižšia ako 25 %. Úloha bola málo citlivá, pretože bola veľmi obťažná. Na grafe závislosti výberu odpovede od schopnosti žiaka pozorujeme vysokú pravdepodobnosť výberu distraktora (E) u všetkých skupín žiakov podľa úrovne schopnosti. Vysokú pravdepodobnosť výberu si u všetkých skupín žiakov podľa úrovne schopnosti mali aj distraktory (B) a (D). Pravdepodobnosť výberu správnej odpovede (C) bola vyššia než pravdepodobnosť výberu niektorého z distraktorov až v skupine žiakov s úrovňou schopnosti vyššou ako 1. Vysoká obťažnosť úlohy sa na grafe prejavila nízkou pravdepodobnosťou výberu správnej odpovede menšou ako 0,2 u žiakov s priemernou úrovňou schopnosti 0.

## Záver

Na výsledky riešenia testu externej časti maturitnej skúšky z matematiky sa môžeme pozerat' z hľadiska kvality výkonu žiakov, ako aj z hľadiska kvality meracieho nástroja – testu, pričom tieto dva aspekty sú navzájom prepojené.

Test MAT12 riešilo 8 753 maturantov. Počet žiakov v jednotlivých krajoch bol vyrovnaný. Podľa zriaďovateľa významne viac žiakov bolo zo štátnych škôl, zvyšok boli žiaci cirkevných a súkromných škôl. V rozdelení podľa druhu školy takmer dve tretiny žiakov boli žiaci gymnázií. Podiel chlapcov a dievčat bol približne 2 : 1 v prospech chlapcov.

Priemerná úspešnosť celého súboru (národný priemer) bola 50,8 %. Ukázalo sa, že výkon žiakov podľa krajov bol vyrovnaný. Rozdiel vo výsledkoch medzi žiakmi škôl rôznych zriaďovateľov bol zanedbateľný. Z hľadiska druhu školy, výkon žiakov gymnázií (priemerná úspešnosť 57,6 %) bol stredne významne lepší, ako výkon žiakov stredných odborných škôl, ktorých priemerná úspešnosť bola 38,8 %. Gymnazisti boli vo všetkých oblastiach testu lepší ako žiaci stredných odborných škôl. Aj keď test z matematiky písalo viac chlapcov ako dievčat, v porovnaní úspešností podľa pohlavia sme nezaznamenali štatisticky významný rozdiel. Rozdiely v úspešnosti chlapcov a dievčat sa nepotvrdili ani v jednotlivých oblastiach testu. Celkovo bol test z rodového hľadiska náročnosti položiek dobre vyvážený. Súlad polročnej klasifikácie žiakov a ich výkonu v EČ MS bol primeraný. Dosiahnuté priemerné úspešnosti zodpovedali širokospektrálnej populácii, ktorá test riešila.

Úspešnosť nižšiu ako 33,0 % dosiahlo 7,5 % maturujúcich žiakov GYM a 31,3 % maturujúcich žiakov SOŠ. Podľa legislatívy platnej od školského roka 2012/2013 žiak maturujúci z matematiky (s výnimkou dobrovoľnej maturitnej skúšky) úspešne zmaturuje z matematiky iba vtedy, ak v EČ MS dosiahne úspešnosť aspoň 25,0 %. V tomto školskom roku by túto podmienku nesplnilo 782 žiakov, čo predstavuje 8,9 % všetkých maturantov z matematiky.

V záujme nezávislosti riešenia testu boli vyvinuté dva varianty, ktoré boli zo všetkých skúmaných hľadísk ekvivalentné.

Základné charakteristiky testu MAT12 nepoukazujú na závažné neštandardné vybočenia. Reliabilita testu bola primeraná, Cronbachovo  $\alpha = 0,84$  potvrdzuje vysokú presnosť merania. Aj ďalšie parametre testu svedčia o uspokojivej rozlišovacej sile testu. O kvalite testu vypovedá aj kvalita jednotlivých položiek: obťažnosť, citlivosť, neriešenosť a predovšetkým konzistentnosť položiek (medzipoložková korelácia). Charakteristiky štyroch položiek testu vykázali jednu nepriaznivú hodnotu (položka č. 2 priemernú úspešnosť vyššiu ako 90 %,

položky č. 10, 14 a 20 neriešenosť vyššiu ako 30 %), ale preukázala sa opodstatnenosť týchto položiek v teste.

Vyhodnotenie úspešnosti žiakov v jednotlivých oblastiach konštatuje primerané výsledky pri riešení príkladov známych z učebníc a zbierok úloh. Žiaci v podstate bez problémov riešili úlohy, ktoré vyžadovali jednoduchú aplikáciu poznatkov. Podrobná analýza položiek ukázala, že žiaci mali problém riešiť náročnejšie úlohy vyžadujúce vzájomné prepojenie poznatkov a využitie algebraického výpočtu. Opäť sme zaznamenali nižšiu priemernú úspešnosť žiakov pri riešení úloh z tematického celku Funkcie. Ukázali sa pretrvávajúce nedostatky pri riešení úloh z geometrie, najmä u žiakov stredných odborných škôl.

Vo vyučovaní matematiky v stredných školách je potrebné klásť dôraz na úlohy a zadania vyžadujúce tvorivý prístup žiaka, aplikáciu a vzájomné prepojenie poznatkov z rôznych oblastí matematiky, prácu s informáciami, grafmi, tabuľkami. V ešte väčšej miere je nutné precvičovať stratégiu riešenia metrických úloh v planimetrii a stereometrii. Dostatočný priestor je potrebné venovať matematizácii problémov z bežného života, precvičovaniu algebraických zručností potrebných pri vysokoškolskom štúdiu a úlohám podporujúcim pozornosť, sústredenosť a dôslednosť žiaka počas ich riešenia.

## Literatúra

1. Burjan, V.: Tvorba a využívanie školských testov vo vzdelávacom procese. Exam: Bratislava 1999.
2. Cieľové požiadavky na vedomosti a zručnosti maturantov z matematiky. ŠPÚ: Bratislava 2008.
3. Hajdúk, M.: Psychometrická analýza položiek testu EČ MS MAT12 prostredníctvom teórie odpovede na položku (IRT). Interný materiál. NÚCEM: Bratislava 2012.
4. Hendl, J.: Přehled statistických metod zpracování dát. Portál: Praha 2004.
5. Grošeková, M.: Jazykové skúšky a štandardizované testy 1. časť. In: Bulletin SAIA Slovenská akademická informačná agentúra, Informačný mesačník o štúdiu v zahraničí č. 9, ročník XIV, september 2004.  
[http://www.saia.sk/images/Bulletin%20SAIA/www9\[3\].pdf](http://www.saia.sk/images/Bulletin%20SAIA/www9[3].pdf) (20. 6. 2006)
6. Juščáková, Z. – Kelecsényi, P.: Správa o výsledkoch externej časti maturitnej skúšky z matematiky. NÚCEM: Bratislava 2010.
7. Juščáková, Z. – Kelecsényi, P.: Maturitná skúška 2011. Správa o výsledkoch externej časti maturitnej skúšky z matematiky. NÚCEM: Bratislava 2011.
8. Juščáková, Z. – Ringlerová, V.: Príručka. Vysvetlenie pojmov používaných v správach zo štatistického spracovania testov EČ MS. NÚCEM: Bratislava 2009.
9. Juščáková, Z.: Externá časť maturitnej skúšky 2012. Záverečná správa zo štatistického spracovania testu z matematiky. NÚCEM: Bratislava 2012.
10. Kolektív: Standardy pro pedagogické a psychologické testování. Testcentrum: Praha 2001.
11. Špecifikačná tabuľka testu z matematiky. Interný materiál. NÚCEM: Bratislava 2010.
12. Lapitka, M.: Tvorba a použitie didaktických testov. ŠPÚ: Bratislava 1996.
13. Ritomský, A. – Zelmanová, O.: Štatistické spracovanie a analýza dát rozsiahlych monitorovaní. Položková a multivariačná analýza s využitím systému SPSS. ŠPÚ: Bratislava 2003.
14. Ritomský, A. – Zelmanová, O. – Zelman, J.: Štatistické spracovanie a analýza dát rozsiahlych monitorovaní s využitím systému SPSS. ŠPÚ: Bratislava 2002.
15. SPSS Base 10.0 User's Guide. by SPSS Inc.: Chicago 1999.
16. SPSS Base 7.0 Syntax Reference Guide. by SPSS Inc.: Chicago 1996.
17. Turek, I.: Učiteľ a pedagogický výskum. Metodické centrum: Bratislava 1998.
18. Wimmer, G.: Štatistické metódy v pedagogickom výskume. Gaudeamus: Hradec Králové 1993.
19. URL: [http://www.scio.cz/tvorba\\_testu/teorie\\_testu/index.asp](http://www.scio.cz/tvorba_testu/teorie_testu/index.asp) (15. 6. 2006)

## Príloha – Vysvetlenie niektorých použitých pojmov

### Klasická teória testovania (classical test theory – CTT)

**Úspešnosť žiaka** je definovaná ako percentuálny podiel bodov za položky, na ktoré žiak odpovedal správne z celkového počtu bodov, ktoré mohol v teste získať. Najvyššia dosiahnutá úspešnosť niektorého žiaka v teste je **maximum**, najnižšia dosiahnutá úspešnosť je **minimum**. Aritmetický priemer úspešností všetkých žiakov riešiacich test je **priemerná úspešnosť** (národný priemer).

**Percentil** individuálneho **žiaka** určuje percentuálne poradie žiaka v celom súbore, koľko percent žiakov celého súboru dosiahlo horší výsledok ako individuálny žiak.

**Štandardná odchýlka** je priemer odchýlok úspešností všetkých žiakov od priemernej úspešnosti. Vyjadruje mieru rozptýlenia úspešností žiakov od priemernej úspešnosti. Čím je väčšia, tým väčšie sú rozdiely vo výkonoch žiakov. Pomocou štandardnej odchýlky určujeme **intervalový odhad úspešnosti populácie**

$(-1,96 \cdot \text{štandardná odchýlka}; 1,96 \cdot \text{štandardná odchýlka})$ ,

v ktorom sa umiestnilo 95 % testovaných žiakov.

**Štandardná chyba priemernej úspešnosti** určuje presnosť vypočítania priemernej úspešnosti. Čím menšia je štandardná chyba priemernej úspešnosti, tým presnejšie charakterizuje priemerná úspešnosť testovaných žiakov. Pomocou štandardnej chyby priemernej úspešnosti určujeme **interval spoľahlivosti pre priemernú úspešnosť**

$(-1,96 \cdot \text{štandardná chyba priem. úspešnosti}; 1,96 \cdot \text{štandardná chyba priem. úspešnosti})$ ,

v ktorom sa s 95 % – nou pravdepodobnosťou nachádza priemerná úspešnosť celého súboru.

**Štandardná chyba merania** je ukazovateľom presnosti merania. Čím je menšia, tým presnejšie je určený **intervalový odhad úspešnosti individuálneho žiaka**

$(\text{priemer} - 1,96 \cdot \text{štandardná chyba merania}; \text{priemer} + 1,96 \cdot \text{štandardná chyba merania})$ ,

v ktorom sa s 95 % – nou pravdepodobnosťou nachádza úspešnosť individuálneho žiaka.

**Reliabilita** testu (spoľahlivosť merania) určuje, do akej miery sa podarilo v teste vylúčiť vplyv náhodnosti, či by testovaní žiaci dosiahli rovnaké alebo podobné výsledky pri opakovanom testovaní podobnými úlohami. Koeficientom reliability testu je **Cronbachovo alfa**.

**Štatistická významnosť (signifikancia)** určuje mieru zhody alebo rozdielnosti dvoch porovnávaných skupín súboru, napríklad priemerných úspešností. Keďže štatistická významnosť sa preukáže už pri malých rozdieloch medzi úspešnosťami skupín, pre potreby pedagogických výskumov je vhodnejšia **vecná významnosť (signifikancia)** rozdielov priemerných úspešností, ktorá aj pri veľkých súboroch zohľadňuje počet žiakov v jednotlivých porovnávaných skupinách. Mieru zhody alebo rozdielnosti porovnávaných skupín podľa vecnej významnosti vyjadruje stupnica v nasledujúcej tabuľke.

Tab. 15 Klasifikácia miery vecnej významnosti

| Hodnota vecnej významnosti $r$ | Miera významnosti           |
|--------------------------------|-----------------------------|
| 0,00 – 0,10                    | žiadna                      |
| 0,11 – 0,20                    | veľmi mierna                |
| 0,21 – 0,30                    | mierna                      |
| 0,31 – 0,50                    | stredná                     |
| 0,51 – 1,00                    | silná, veľmi silná až úplná |

**Úspešnosť položky** je percentuálny podiel žiakov, ktorí správne riešili úlohu. **Obťažnosť položky** je doplnkom úspešnosti položky do hodnoty 100 %. Rozdelenie položiek podľa percentuálnej hodnoty úspešnosti uvádza nasledujúca tabuľka.

Tab. 16 Klasifikácia položiek podľa úspešnosti

| Hodnota úspešnosti | Obťažnosť položky                        |
|--------------------|------------------------------------------|
| 100,0 % – 90,0 %   | extrémne ľahká                           |
| 89,9 % – 80,0 %    | veľmi ľahká                              |
| 79,9 % – 20,0 %    | stredne obťažná (okolo 50,0 % optimálna) |
| 19,9 % – 10,0 %    | veľmi obťažná                            |
| 9,9 % – 0,0 %      | extrémne obťažná                         |

**Medzipoložková korelácia  $P. Bis.$  (Point Biserial)** určuje vzťah medzi úspešnosťou položky a úspešnosťou vo zvyšných položkách testu. Hodnoty  $P. Bis.$  uvádzame v stonásobku skutočnej hodnoty pre lepšiu čitateľnosť. Čím väčšia je kladná hodnota  $P. Bis.$  položky, tým väčší podiel v teste celkove úspešnejších žiakov a menší podiel menej úspešných žiakov odpovedalo správne na položku. Rozdelenie položiek podľa  $P. Bis.$  je v nasledujúcej tabuľke.

Tab. 17 Klasifikácia položiek podľa  $P. Bis.$ 

| Hodnota $P. Bis.$     | Rozlišovacia schopnosť položky       |
|-----------------------|--------------------------------------|
| záporná hodnota       | nerozlišuje dobrých a slabých žiakov |
| hodnota okolo 0       | veľmi slabá rozlišovacia schopnosť   |
| hodnota väčšia ako 25 | dobrá rozlišovacia schopnosť         |

**Citlivosť** (rozlišovacia sila položky) je schopnosť položky rozlíšiť dobrých a slabších žiakov. Ak všetkých žiakov rozdelíme podľa vzostupnej úspešnosti do piatich skupín (od 5 do 1), tak rozdiel úspešnosti najlepšej (1) a najslabšej (5) skupiny je hodnota citlivosti položky. Položky podľa citlivosti rozdeľuje nasledujúca tabuľka.

Tab. 18 Rozdelenie položiek podľa citlivosti

| Hodnota citlivosti | Miera citlivosti |
|--------------------|------------------|
| záporná hodnota    | kritická         |
| 0,0 % – 10,0 %     | nedostatočná     |
| 10,1 % – 20,0 %    | nízka            |
| nad 20,0 %         | vyhovujúca       |

**Distribúcia úspešností** vyjadruje vzťah medzi úspešnosťou položky a celkovou úspešnosťou žiaka v teste. Interpretuje sa grafmi, ktoré majú na osi x rozdelenie žiakov do desiatich výkonnostných skupín od najmenej úspešnej desiatej skupiny po najúspešnejšiu prvú skupinu a na osi y priemernú úspešnosť danej položky v danej výkonnostnej skupine.

**Neriešenosť** položky je percentuálny podiel žiakov, ktorí na položku neuviedli odpoveď. Určuje sa ako súčet vynechanosti a nedosiahnutosti. Žiak vynechal položku, ak na danú úlohu neodpovedal, ale na niektorú ďalšiu úlohu áno. Za nedosiahnutú považujeme položku, po ktorej žiak už žiadnu položku neriešil. Nedosiahnutosť poslednej položky určujeme ako nedosiahnutosť predposlednej položky. Za kritickú považujeme hodnotu neriešivosti vyššiu ako 50 %.

**Pri úlohách s výberom odpovede** sa vyhodnocuje osobitne každá ponúknutá odpoveď. Uvádza sa *P. Bis.* každej možnosti a percentuálny podiel žiakov, ktorí si vybrali danú možnosť (frekvencia). Tieto údaje sú uvedené aj pre skupinu žiakov, ktorí na úlohu neuviedli odpoveď. Žltou farbou je označený stĺpec (prípadne riadok) so správnou odpoveďou. Položky s výberom odpovede hodnotíme podľa nasledovných kritérií:

1. Podiel žiakov, ktorí si vybrali správnu odpoveď, by mal byť najväčší.
2. Hodnota *P. Bis.* správnej odpovede by mala byť väčšia ako 20 (optimálne 25). Väčšina v teste celkovo úspešnejších žiakov by si mala vybrať správnu odpoveď. Pri nedodržaní tohto kritéria je hodnota zvýraznená červenou farbou.
3. Hodnota *P. Bis.* nesprávnej odpovede (distraktora) by mala byť záporná. Distraktory by si mali vybrať žiaci v teste celkovo menej úspešní. Pri nedodržaní tohto kritéria je hodnota zvýraznená hnedou farbou.

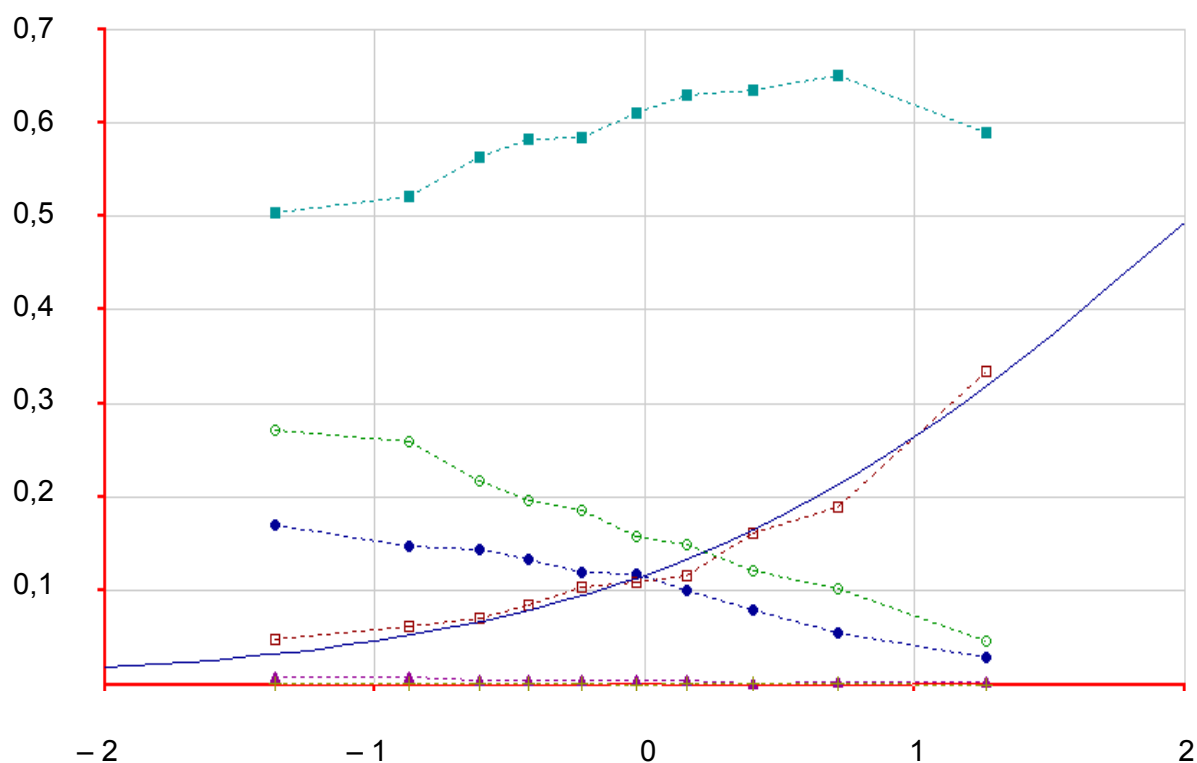
## Teória odpovede na položku (item response theory – IRT)

**Rozlišovacia schopnosť položky** vyjadruje, ako kvalitne položka rozlišuje žiakov podľa pravdepodobnosti určenia správnej odpovede na základe schopnosti žiakov. Čím väčšia je hodnota rozlišovacej schopnosti položky, tým lepšie položka rozlišuje žiakov.

**Obťažnosť položky** sa určuje ako hodnota tej úrovne schopnosti žiakov, pri ktorej pravdepodobnosť stanovenia správnej odpovede je 0,5. Priemerná obťažnosť položky je 0. Položky so zápornou hodnotou obťažnosti sú jednoduchšie, naopak čím väčšia je kladná hodnota obťažnosti položky, tým je položka náročnejšia.

IRT modelový test dokáže vypočítať aj **úroveň schopnosti** jednotlivých testovaných žiakov (schopnosť určiť správnu odpoveď na matematickú úlohu) podľa správnosti ich odpovedí na jednotlivé položky testu. Priemerná schopnosť zodpovedá hodnote 0. Záporné hodnoty vypovedajú o slabších schopnostiach žiakov, čím väčšie kladné hodnoty naopak o veľmi dobrých schopnostiach.

Obťažnosť položiek a úroveň schopnosti žiakov je možné pri interpretácii výsledkov položiek testu IRT metódou zobraziť na jednu spoločnú škálu a tak ich navzájom porovnať. V grafoch sa zobrazujú na vodorovnú os x. Na zvislú os y sa najčastejšie zobrazuje pravdepodobnosť výberu odpovede, tak ako na nasledujúcom grafe:



Modrou rastúcou krivkou je zobrazená pravdepodobnosť výberu správnej odpovede P podľa IRT testového modelu. Graf zobrazuje náročnú položku. Pravdepodobnosť 0,5 výberu

správnej odpovede podľa predpokladaného modelu majú až žiaci s úrovňou schopnosti 2 (hodnota obtiažnosti položky). Priemerní žiaci s úrovňou schopnosti 0 by vybrali správnu odpoveď s pravdepodobnosťou len o niečo vyššou ako 0,1. Rôznymi farbami a geometrickými útvarmi sú znázornené krivky pravdepodobnosti výberu distraktorov a krivka pravdepodobnosti neuvedenia odpovede (–). Tehlovočervená krivka s prázdny štvorčekom prislúcha správnej odpovedi. Takmer dokonale „kopíruje, fituje“ predpokladanú pravdepodobnosť P. Fialová krivka s plným trojuholníkom vyjadruje pravdepodobnosť neuvedenia odpovede. Ostatné krivky prislúchajú distraktorom. Pravdepodobnosť výberu distraktora znázorneného tmavozelenou krivkou s plným štvorčekom je u žiakov všetkých úrovní schopnosti veľmi vysoká, dokonca s narastajúcou úrovňou schopnosti žiakov sa pravdepodobnosť výberu distraktora zvyšuje. Tento distraktor nebol vhodne zaradený medzi možné odpovede na úlohu. Ostatné distraktory (znázornené krivkami s plným a prázdny krúžkom) sa správajú podľa predpokladov: s rastúcou úrovňou schopnosti žiakov sa pravdepodobnosť ich výberu znižuje a nadpriemerní žiaci (s úrovňou schopnosti vyššou ako 0) si volia častejšie správnu odpoveď než tieto distraktory. Zo strmosti priebehu modrej krivky predpokladanej pravdepodobnosti výberu správnej odpovede môžeme usudzovať o rozlišovacej schopnosti položky. Na uvedenom grafe rastie veľmi mierne, rozlišovacia sila položky bude preto veľmi malá. Strmšie rastie až pre úroveň schopnosti žiakov 1 a vyššiu, ale v tej oblasti už graf takmer nezaznamenáva údaje (žiaci s takými schopnosťami vo vzorke žiakov podľa vyhodnotenia neboli). Položka teda testovaných žiakov rozlišuje slabo. Dobré by rozlíšila žiakov s vysokou úrovňou schopnosti, ale takí sa testovania nezúčastnili.

Z grafu hodnôt **informačnej funkcie testu** zistíme, o ktorej skupine žiakov podľa úrovne schopnosti prináša IRT model najviac informácií. Graf **chyby merania** naopak určuje, pri ktorej skupine žiakov podľa úrovne schopnosti má IRT test najmenšiu chybu merania.