NÚCEM

NÁRODNÝ ÚSTAV CERTIFIKOVANÝCH MERANÍ VZDELÁVANIA

Maturitná skúška 2011

Správa
o výsledkoch externej časti
maturitnej skúšky

z matematiky

Mgr. Zuzana Juščáková, PhD.
Mgr. Pavol Kelecsényi

Bratislava 2011

OBSAH

Vysvetlivky

MS	–	maturitná skúška
EČ MS	–	externá časť maturitnej skúšky
GYM	–	gymnáziá
SOŠ	–	stredné odborné školy
ÚKO	–	úloha s krátkou odpoveďou (otvorená), hodnotí sa výsledok riešenia
ÚVO	–	úloha s výberom odpovede (uzavretá) z piatich možností
BA	–	Bratislavský kraj
TT	–	Trnavský kraj
TN	–	Trenčiansky kraj
NR	–	Nitriansky kraj
ZA	–	Žilinský kraj
BB	–	Banskobystrický kraj
PO	–	Prešovský kraj
KE	–	Košický kraj
N	–	veľkosť štatistického súboru, počet žiakov
Sig.	–	obojstranná signifikancia, štatistická významnosť
MAT11	–	označenie testu z matematiky
P. Bis.	–	Point Biserial, parameter medzipoložkovej korelácie
r	–	korelačný koeficient, koeficient vecnej signifikancie
položka (testová)	–	príklad, úloha, otázka v teste určená na riešenie a hodnotená (0, 1) v hrubom skóre

Úvod

Dňa 17. marca 2011 sa konala externá časť maturitnej skúšky (EČ MS) z matematiky.

Cieľom EČ MS je overiť a zhodnotiť tie vedomosti a zručnosti maturantov, ktoré nie je možné overiť v dostatočnej miere v ústnej forme internej časti maturitnej skúšky. Vysoká objektivita a validita skúšky zaručujú porovnateľnosť výsledkov žiakov z celého Slovenska.

Správa dokladuje korektnosť a exaktnosť EČ MS z matematiky a spracovania jej výsledkov.

V prvej časti správy opisujeme vstupy, uvádzame charakteristiky testu a kvantifikujeme štatistický súbor obsahujúci maturujúcich žiakov. Údaje o počte žiakov sú členené z hľadiska územného, zriaďovateľa školy, druhu školy, spôsobu konania EČ MS a pohlavia.

V ďalšej časti prezentujeme kvalitatívne znaky testu a možné faktory rozdielnosti výkonov žiakov v EČ MS prostredníctvom štatistických výsledkov spracovaných podľa vybraných triediacich znakov.

V tretej časti prinášame výsledky štatistických meraní jednotlivých položiek testu. Opisujeme úspešnosť položiek podľa tematických celkov, druhu školy a pohlavia, koreláciu položiek so zvyškom testu, rozlišovaciu silu a stupeň neriešenosti položiek. Na konci tejto časti predkladáme súhrnné charakteristiky jednotlivých položiek a ich interpretáciu.

V závere sumarizujeme štatistické zistenia smerované k hodnoteniu výkonov populačného ročníka a k overeniu meracieho nástroja, prípadne identifikujeme jeho slabiny v záujme budúceho skvalitnenia tvorby testov.

Informácie, ktoré správa prináša, sú určené predovšetkým pedagogickej verejnosti, ale aj tvorcom testov, didaktikom matematiky a kompetentným pracovníkom v problematike hodnotenia výsledkov vzdelávania.

Stručné vysvetlenie niektorých odborných pojmov, štatistických postupov a vzťahov používaných v tejto správe uvádzame v prílohe.

Variant vyhodnoteného testu a Kľúč správnych odpovedí sú uverejnené na www.nucem.sk.

1 Charakteristika testu EČ MS z matematiky a testovaní žiaci

1.1 Charakteristika testu EČ MS z matematiky

Maturitnú skúšku legislatívne upravuje zákon č. 245/2008 Z. z. a vyhláška č. 318/2008 Z. z., podľa ktorých žiaci všetkých druhov škôl absolvovali maturitnú skúšku z matematiky na jednej úrovni.

Test EČ MS z matematiky bol určený maturantom všetkých stredných škôl. Obsahoval 30 úloh, ktoré vychádzali z Cieľových požiadaviek na vedomosti a zručnosti maturantov z matematiky. Tematické celky Základy matematiky, Funkcie a Planimetria boli v teste zastúpené každý siedmimi úlohami, Stereometria piatimi a Kombinatorika, pravdepodobnosť a štatistika štyrmi úlohami.

Prvých dvadsať úloh bolo otvorených s krátkou odpoveďou. Žiaci mali vypočítať výsledok úlohy a uviesť ho v tvare presného desatinného čísla alebo zaokrúhleného podľa pokynov zadania. Posledných desať úloh bolo uzavretých s výberom odpovede. V každej úlohe mohli žiaci vyberať z piatich možností, z ktorých práve jedna bola správna.

Podľa náročnosti myšlienkovej operácie, ktorú musel žiak zvládnuť na vyriešenie úlohy, boli položky v teste rozdelené do nasledovných skupín kognitívnej náročnosti:

1. úlohy vyžadujúce jednoduché myšlienkové operácie (úlohy na reprodukciu a porozumenie) – overenie znalosti pojmov, porozumenie, priraďovanie, zoraďovanie, triedenie, porovnávanie, jednoduchá aplikácia,
2. úlohy vyžadujúce zložitejšie myšlienkové operácie (úlohy na aplikáciu poznatkov) – analýza, syntéza, indukcia, dedukcia, vysvetľovanie, hodnotenie, dokazovanie, overovanie algoritmov riešenia úloh v kontextoch blízkych alebo podobných školskej praxi,
3. úlohy vyžadujúce tvorivý prístup (problémové úlohy) – tvorba hypotéz, zložitejšia aplikácia, riešenie problémových situácií, objavovanie nových myšlienok a vzťahov, tvorba produktívnych riešení a použitie poznatkov v neobvyklých a neznámych kontextoch.

Z hľadiska predpokladanej obťažnosti test obsahoval osem ľahkých úloh, štrnásť stredne ťažkých a osem náročných úloh.

Úlohy testu bolo možné riešiť pomocou bežných písacích potrieb a kalkulačky, ktorá umožňovala obvyklé operácie a výpočet hodnôt funkcií. Nebolo dovolené používať kalkulačku, ktorá mala základné štatistické vybavenie alebo grafický displej. Žiaci mohli použiť aj prehľad základných matematických vzťahov uvedený na poslednom liste testu. V porovnaní s uplynulými rokmi zostal nezmenený, napriek tomu, že obsahoval aj vzťahy, ktoré podľa Cieľových požiadaviek na vedomosti a zručnosti maturantov z matematiky žiaci nemusia ovládať. Poznajú ich však z hodín matematiky a mohli ich využiť pri riešení niektorých príkladov v teste.

Žiaci mali na vyriešenie úloh testu 120 minút. Za každú správnu odpoveď získali 1 bod, bez ohľadu na obťažnosť úlohy, za nesprávnu alebo neuvedenú odpoveď získali 0 bodov.

Pripravené boli dva varianty testu, ktoré sa líšili poradím položiek a distraktorov. Výtlačok testu obsahoval čiarový kód a úzky pásik geometrických vzorov, osobitý pre každý jednotlivý test. Zadania testu boli preložené do maďarského jazyka pre žiakov škôl s vyučovacím jazykom maďarským. Zdravotne znevýhodnení žiaci riešili test s graficky alebo obsahovo upraveným zadaním.

1.2 Testovaní žiaci

V nasledujúcej tabuľke uvádzame počet škôl a žiakov zapojených do EČ MS 2011 z matematiky triedený podľa krajov, zriaďovateľa a druhu školy.

Tab. 1 Počet škôl a žiakov podľa kraja, zriaďovateľa a druhu školy v MAT11

		Školy		Žiaci	
		počet	%	počet	%
Kraj	BA	55	13,1	1155	13,1
	TT	37	8,8	679	7,7
	TN	40	9,5	921	10,5
	NR	50	11,9	949	10,8
	ZA	62	14,8	1577	17,9
	BB	53	12,6	1106	12,6
	PO	65	15,5	1188	13,5
	KE	57	13,6	1228	13,9
	spolu	419	100,0	8803	100,0
Zriaďovateľ	štátne školy	327	78,0	7790	88,5
	súkromné školy	38	9,1	247	2,8
	cirkevné školy	54	12,9	766	8,7
	spolu	419	100,0	8803	100,0
Druh školy	GYM	235	56,1	5799	65,9
	SOŠ	184	43,9	3004	34,1
	spolu	419	100,0	8803	100,0

EČ MS z matematiky (test MAT11) v školskom roku 2010/2011 vykonalo 8803 žiakov zo 419 škôl. Najpočetnejšou skupinou boli štátne školy a gymnáziá. Rozdelenie žiakov do škôl podľa zriaďovateľa nebolo rovnomerné, žiaci súkromných a cirkevných škôl tvorili z celkového počtu maturantov iba 11,5 %. V súkromných a cirkevných školách sa testovania zúčastnilo v priemere menej žiakov v prepočte na školu ako v štátnych školách, čo súvisí s počtom tried a žiakov v triedach v týchto školách.

EČ MS z matematiky nekonal žiadny žiak konzervatória. Necelá tretina maturujúcich žiakov boli žiaci SOŠ, ktorí konali maturitnú skúšku z matematiky ako dobrovoľný predmet. Cieľové požiadavky na vedomosti a zručnosti maturantov z matematiky, z ktorých vychádzajú úlohy testu, sú pre žiakov všetkých druhov škôl rovnaké. Možnosti prípravy na maturitnú skúšku žiakov GYM a SOŠ však nie sú porovnateľné, vyplývajú z rozdielneho počtu hodín matematiky v učebnom pláne, rozsahu učiva v tematických celkoch a možnosti výberu voliteľných predmetov v maturitnom ročníku. Týmto skutočnostiam sme museli prispôsobiť zadania úloh testu.

V ďalšej tabuľke je uvedený počet žiakov zapojených do EČ MS 2011 z matematiky triedený podľa pohlavia, spôsobu konania skúšky a variantu riešeného testu.

Tab. 2 Počet žiakov podľa pohlavia, spôsobu konania EČ MS a variantu testu MAT11

		počet	%
Pohlavie	chlapci	5555	63,1
	dievčatá	3248	36,9
	spolu	8803	100,0
Spôsob konania	pero + papier	8563	97,3
	on-line	240	2,7
	spolu	8803	100,0
Variant	3306	4418	50,2
	3903	4385	49,8
	spolu	8803	100,0

Chlapci majú výraznú prevahu v počte maturujúcich žiakov z matematiky podľa pohlavia, v tomto školskom roku tvorili takmer dve tretiny z celkového počtu.

Už tretí rok pokračuje experimentálne overovanie konania EČ MS z matematiky on-line formou prostredníctvom počítača. Počet škôl i žiakov zapojených do on-line maturity sa znížil, v tomto školskom roku takto maturovalo 240 žiakov v 12 školách.

Počet a zastúpenie škôl a žiakov sa v posledných rokoch takmer nemení, pozorujeme iba mierny pokles celkového počtu žiakov maturujúcich z matematiky (v porovnaní s predchádzajúcim rokom o 2,3 %) a rast počtu maturujúcich žiakov SOŠ (o 7,8 %).

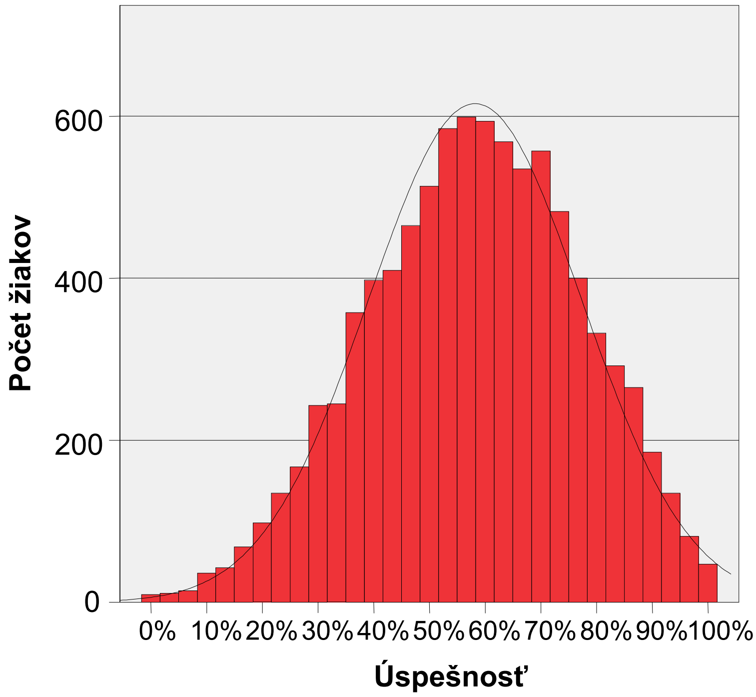
2 Výsledky testu EČ MS z matematiky

2.1 Všeobecné výsledky

V nasledujúcich tabuľkách a grafoch uvádzame kvalitatívne znaky testu a úspešnosti žiakov.

Tab. 3 Výsledné psychometrické charakteristiky testu MAT11

Počet testovaných žiakov	8803
Maximum	100,0 %
Minimum	0,0 %
Priemer	57,9 %
Štandardná odchýlka	18,9 %
Intervalový odhad úspešnosti populácie – dolná hranica	20,9 %
Intervalový odhad úspešnosti populácie – horná hranica	95,0 %
Štandardná chyba priemernej úspešnosti	0,2 %
Interval spoľahlivosti pre priemernú úspešnosť – dolná hranica	57,5 %
Interval spoľahlivosti pre priemernú úspešnosť – horná hranica	58,3 %
Štandardná chyba merania pre úspešnosť	7,5 %
Intervalový odhad úspešnosti individuálneho žiaka	14,7 %
Cronbachovo alfa	0,84



Obr. 1 Výsledný histogram rozloženia početností percentuálnych úspešností v MAT11

Priemerná úspešnosť žiakov v teste MAT11 (57,9 %) a normálny tvar histogramu rozloženia úspešností žiakov (*Obr. 1*), iba slabo vychýlený doprava, poukazujú na mierne nižšiu náročnosť testu pre testovaných žiakov. Približne dve tretiny maturantov z matematiky dosiahlo úspešnosť v intervale od 39,0 % do 76,8 %. Podľa intervalového odhadu úspešnosti 95 % testovaných žiakov dosiahlo úspešnosť medzi 20,9 % a 95,0 %. Spoľahlivosť merania (reliabilita testu) určená hodnotou Cronbachovho alfa 0,84 je pre test s tridsiatimi položkami veľmi dobrá. Minulý školský rok dosiahla reliabilita hodnotu 0,85, zatiaľ najvyššia bola v roku 2007 s hodnotou 0,87.

Najnižšiu úspešnosť 0,0 % dosiahli 12 žiaci, najvyššiu úspešnosť 100,0 % dosiahlo 41 žiakov (*Tab. 4*). Najúspešnejšiu skupinu žiakov, ktorí dosiahli úspešnosť 90,0 % a viac, tvorí 429 žiakov, čo je 4,9 % všetkých žiakov. V EČ MS z matematiky neuspelo 809 žiakov (dosiahli úspešnosť nižšiu ako 33,0 %), čo predstavuje 9,2 % všetkých žiakov. Ich rozdelenie podľa druhu školy a pohlavia uvádza *Tab. 5*. V porovnaní s minulým školským rokom sa zväčšil podiel žiakov SOŠ (o 9,1 %).

Menej úspešná polovica žiakov dosiahla priemernú úspešnosť 60,0 % alebo nižšiu a bola rozdelená do 19 skupín. Úspešnejšia polovica žiakov dosiahla úspešnosť 63,3 % a vyššiu a rozdelila sa do 12 skupín. Test MAT11 teda lepšie rozlíšil menej úspešných žiakov ako žiakov úspešnejších.

Tab. 4 Prepojenie úspešnosti a percentilu MAT11

Počet bodov	Úspešnosť %	Percentil	Počet žiakov	Počet bodov	Úspešnosť %	Percentil	Počet žiakov
0	0,0	0,0	12				
1	3,3	0,1	13	16	53,3	36,3	588
2	6,7	0,3	13	17	56,7	43,0	599
3	10,0	0,4	34	18	60,0	49,8	594
4	13,3	0,8	39	19	63,3	56,5	563
5	16,7	1,3	65	20	66,7	62,9	524
6	20,0	2,0	94	21	70,0	68,9	556
7	23,3	3,1	131	22	73,3	75,2	482
8	26,7	4,6	159	23	76,7	80,7	401
9	30,0	6,4	249	24	80,0	85,2	324
10	33,3	9,2	251	25	83,3	88,9	289
11	36,7	12,0	361	26	86,7	92,2	260
12	40,0	16,1	397	27	90,0	95,1	180
13	43,3	20,7	407	28	93,3	97,2	132
14	46,7	25,3	460	29	96,7	98,7	76
15	50,0	30,5	509	30	100,0	99,5	41

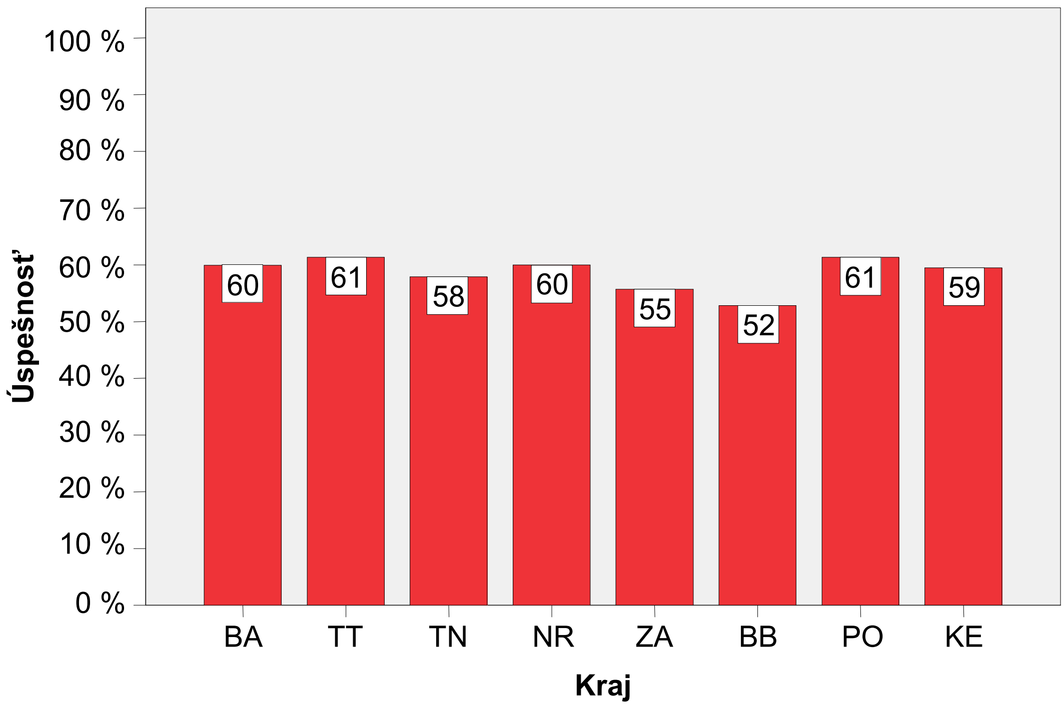
Tab. 5 Rozdelenie žiakov s úspešnosťou menšou ako 33,0 % v MAT11

		on-line		chlapci		dievčatá		spolu	
		počet	%	počet	%	počet	%	počet	%
Druh školy	GYM	4	0,4	83	10,3	83	10,3	170	21,0
	SOŠ	12	1,5	402	49,7	225	27,8	639	79,0
spolu		16	1,9	485	60,0	308	38,1	809	100,0

2.2 Rozdiely vo výsledkoch

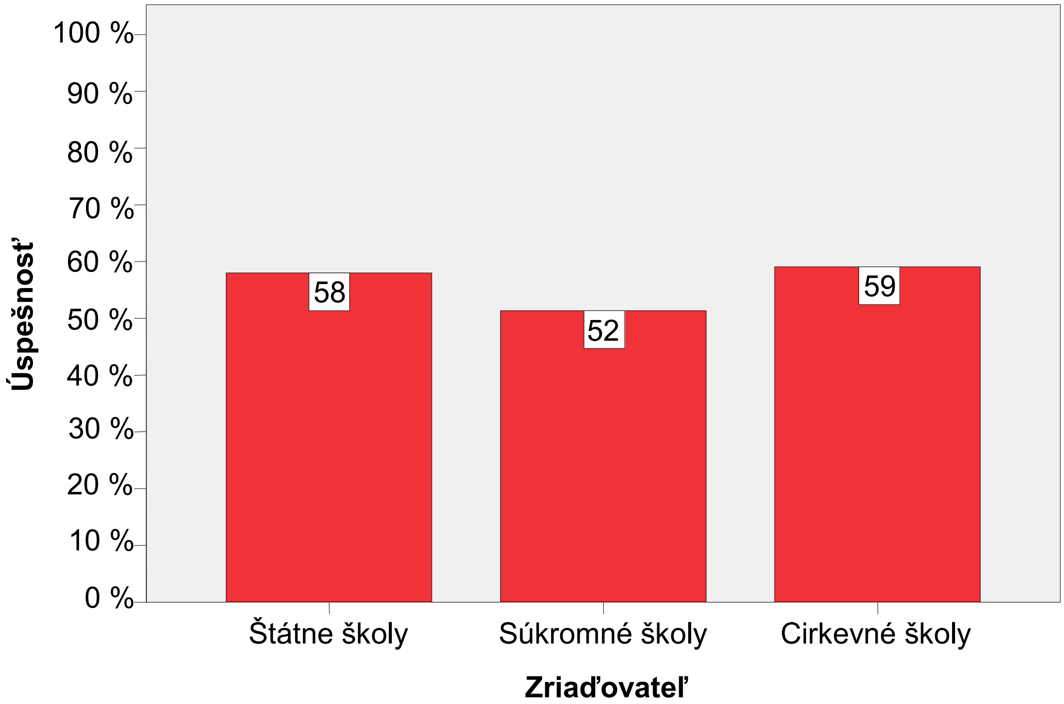
V nasledujúcich grafoch na *Obr. 2 – 6* prezentujeme rozdiely v úspešnosti žiakov podľa jednotlivých kategórií a v *Tab. 6* porovnanie priemerných úspešností s národným priemerom.

Medzi najúspešnejším Trnavským krajom (61,2 %) a posledným Banskobystrickým krajom (52,2 %) bola len mierna úroveň vecnej signifikancie (r = 0,234). Trnavský a Banskobystrický kraj sa líšili od národného priemeru na úrovni miernej vecnej signifikancie. Konštatujeme, že medzi jednotlivými krajmi neboli významné rozdiely v úspešnosti žiakov.



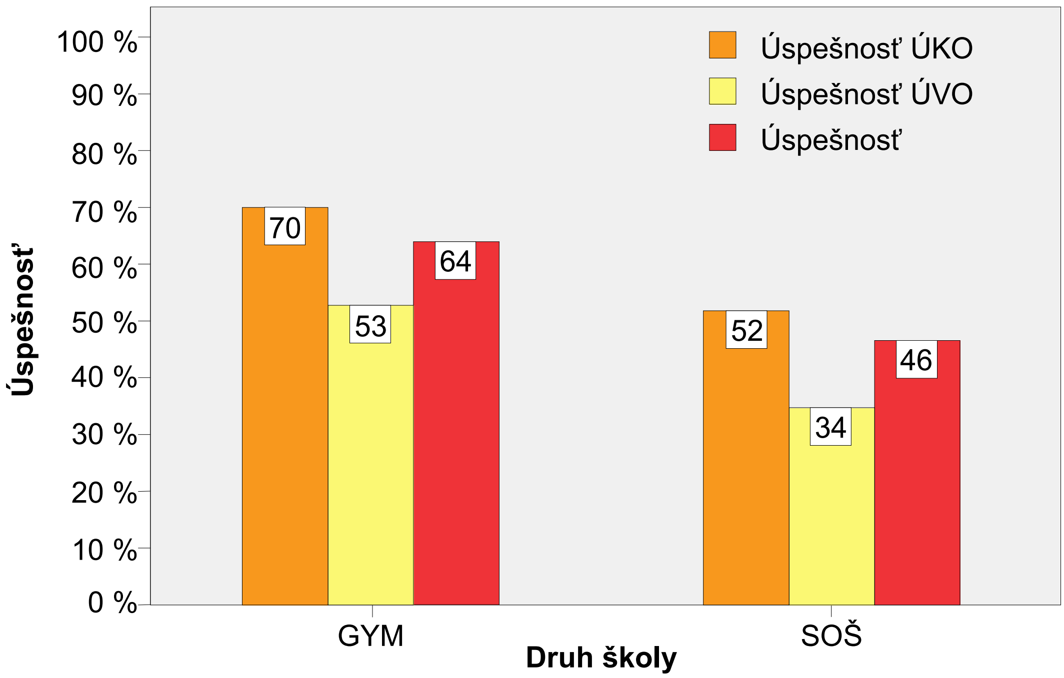
Obr. 2 Priemerná úspešnosť MAT11 podľa kraja

Analýza rozdielov podľa zriaďovateľa bola ovplyvnená značne nerovnomerným rozdelením počtu žiakov do jednotlivých skupín. Miera vecnej signifikancie rozdielov podľa zriaďovateľa bola zanedbateľná, len medzi cirkevnými (58,6 %) a súkromnými školami (52,1 %) bola veľmi mierna (r = 0,156). Nepozorujeme významné rozdiely v úspešnosti žiakov podľa kraja.



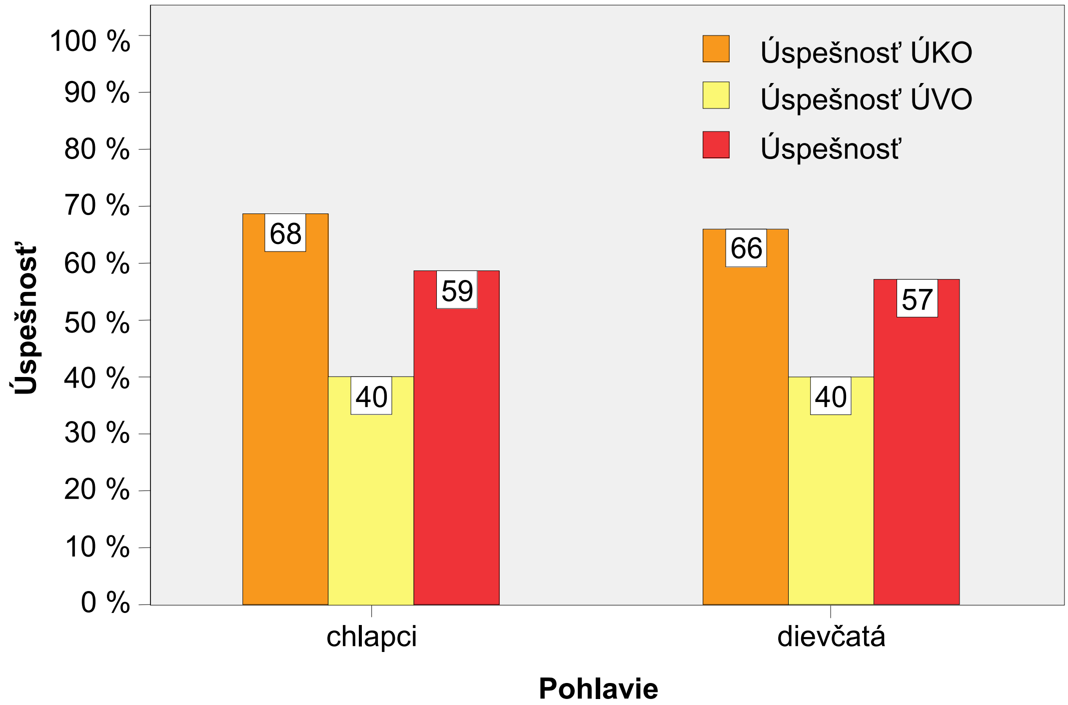
Obr. 3 Priemerná úspešnosť MAT11 podľa zriaďovateľa

Vzťah priemernej úspešnosti žiakov GYM (64,1 %) a SOŠ (45,9 %) bol na strednej úrovni vecnej signifikancie (r = 0,458). Slabší priemerný výkon žiakov SOŠ v porovnaní so žiakmi GYM dokazuje aj odchýlka od národného priemeru, ktorá bola na úrovni silnej vecnej signifikancie (r = 0,57).

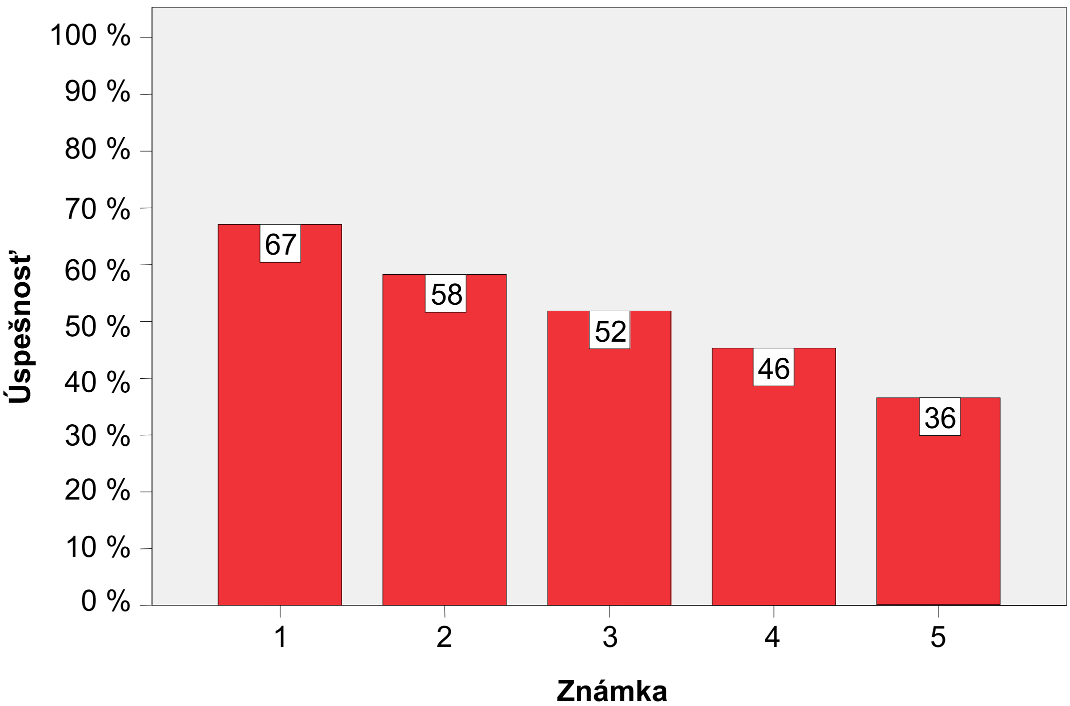


Obr. 4 Priemerná úspešnosť MAT11 podľa druhu školy

Vecná signifikancia rozdielov priemerných úspešností podľa pohlavia bola zanedbateľná (r = 0,041), priemerné výsledky chlapcov (58,5 %) a dievčat (56,9 %) boli približne rovnaké, nelíšili sa ani od národného priemeru.



Obr. 5 Priemerná úspešnosť MAT11 podľa pohlavia



Obr. 6 Priemerná úspešnosť MAT11 podľa polročnej známky z matematiky

Najväčší rozdiel v priemernej úspešnosti žiakov podľa polročnej známky z matematiky sme podľa očakávania zaznamenali medzi žiakmi s hodnotením 1 a 5. Najväčší rozdiel podľa vecnej signifikancie, ktorá zohľadňuje aj počet žiakov, bol na strednej úrovni medzi žiakmi s hodnotením 1 a 4 (r = 0,417) a žiakmi so známkou 1 a 3 (r = 0,393), na miernej úrovni medzi žiakmi s hodnotením 1 a 5 (r = 0,250), 1 a 2 (r = 0,247) a so známkou 2 a 4 (r = 0,245). Medzi ostatnými skupinami žiakov bola úroveň vecnej signifikancie veľmi mierna až zanedbateľná. Vecné signifikancie rozdielov priemerných úspešností podľa polročného hodnotenia od národného priemeru boli veľmi silné a silné v prípade slabšieho výkonu žiakov so známkami 5 a 4, stredné pre horší výkon žiakov s hodnotením 3 a podľa očakávania lepší výkon jednotkárov. Priemerná známka žiakov z matematiky bola 2,11. Korelácia (vzájomný vzťah) medzi známkou a úspešnosťou v EČ MS z matematiky bola stredná (r = – 0,349).

Tab. 6 Porovnanie priemernej úspešnosti s národným priemerom MAT11

		Národný priemer = 57,9 %		
		Počet žiakov	Obojstranná signifikancia	Vecná signifikancia
Kraj	BA	1155	0,004	0,09
	TT	679	0,000	0,20
	TN	921	0,631	0,02
	NR	949	0,000	0,12
	ZA	1577	0,000	0,16
	BB	1106	0,000	0,28
	PO	1188	0,000	0,14
	KE	1228	0,029	0,06
Zriaďovateľ	štátne školy	7790	0,545	0,01
	súkromné školy	247	0,000	0,28
	cirkevné školy	766	0,254	0,04
Druh školy	GYM	5799	0,000	0,35
	SOŠ	3004	0,000	0,57
Pohlavie	chlapci	5555	0,018	0,03
	dievčatá	3248	0,002	0,05
Známka	1	2799	0,000	0,44
	2	3028	0,441	0,01
	3	2191	0,000	0,35
	4	693	0,000	0,55
	5	65	0,000	0,78
	neuvedená	27	0,033	0,40

Všetky uvedené hodnoty rozdielov úspešností sú porovnateľné s minuloročnými hodnotami.

3 Interpretácia výsledkov položiek testu EČ MS z matematiky

3.1 Porovnanie variantov testu

Zo štatistických vyhodnotení vyplýva, že administrácia variantov testu 3306 a 3903 bola proporčná zo všetkých hľadísk (kraj, zriaďovateľ, druh školy, pohlavie). Porovnateľné boli aj dosiahnuté priemerné úspešnosti a reliability variantov testu (Cronbachovo alfa).

Tab. 7 Porovnanie variantov testu MAT11

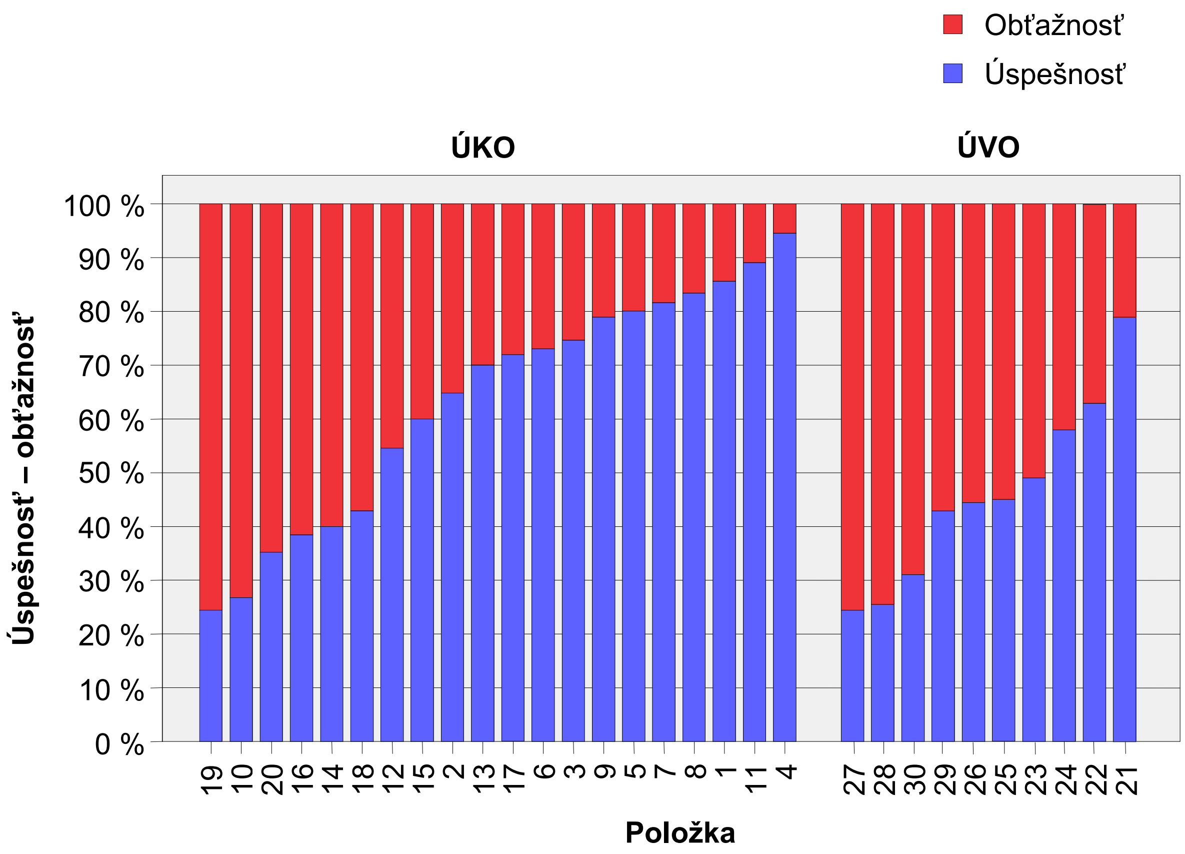
		Počet administrovaných testov	Úspešnosť %	Štandardná odchýlka	Cronbachovo alfa
Variant	3306	4418	57,9	18,9	0,843
	3903	4385	57,9	18,9	0,842

Vecné signifikancie rozdielov úspešností položiek podľa variantu testu boli zanedbateľné. Poradie úloh teda nemalo vplyv na úspešnosť ich riešenia a preto považujeme varianty testu MAT11 za ekvivalentné. V nasledujúcich štatistických analýzach, v ktorých sledujeme vlastnosti jednotlivých položiek, sme použili zástupný variant 3306, ktorému zodpovedá aj číslovanie položiek.

3.2 Úspešnosť a obťažnosť položiek

Podľa dosiahnutých percentuálnych hodnôt úspešností položiek test obsahoval jednu extrémne ľahkú úlohu (č. 4), štyri veľmi ľahké úlohy (č. 1, 7, 8, 11) a dvadsaťpäť stredne obťažných úloh (*Obr. 7*). Najúspešnejší boli žiaci v úlohách z rôznych oblastí matematiky, ktorých riešenie sa dalo získať vypísaním možností alebo pokusným dosadením (č. 4 – určiť dvojciferné prirodzené číslo s požadovanými vlastnosťami, č. 11 – vypočítať počet sedadiel na prízemí divadla, č. 21 – zistiť počet prirodzených čísel s danými vlastnosťami). Úspešní boli žiaci aj pri riešení úloh, v ktorých potrebovali krátky, jednoduchý výpočet (č. 1 – vypočítať koreň logaritmickej rovnice, č. 5 – nájsť koreň exponenciálnej rovnice, č. 7 – určiť člen kvadratickej rovnice, č. 8 – zistiť veľkosť uhla v kruhovom diagrame, č. 9 – vypočítať dĺžku hrany kocky). S nižšou úspešnosťou žiaci riešili úlohy z kombinatoriky a pravdepodobnosti v reálnych životných situáciách (č. 2 – určiť počet rôznych poradí na medailových miestach, č. 12 – zistiť pravdepodobnosť javu pri hode kockami, č. 24 – vypočítať pravdepodobnosť výberu žiakov), úlohy z logiky (č. 23 – určiť počet prvkov množiny, č. 26 – rozhodnúť o počte správnych tvrdení), úlohy obsahujúce premenné a parametre (č. 25 – zistiť definičný obor funkcie, č. 29 – určiť najväčšiu hodnotu výrazu s dvomi premennými) a úlohy z geometrie, ktorých riešenie vyžadovalo správne načrtnutie a analyzovanie obrázka (č. 14 – vypočítať veľkosť uhla dvoch uhlopriečok kocky, č. 15 – určiť vzdialenosť priesečníka priamok od daného bodu, č. 16 – zistiť šírku rieky podľa údajov zaznačených na obrázku, č. 18 – určiť pomer povrchov telies, č. 22 – rozhodnúť o veľkosti uhla uhlopriečok v obdĺžniku). Najnižšiu úspešnosť dosiahli žiaci v geometrických výpočtových úlohách (č. 19 – určiť počet strán mnohouholníka, č. 20 – zistiť dĺžku úsečky v trojuholníku, č. 27 – vypočítať pomer objemov pravidelných štvorstenov) a v úlohách využívajúcich grafy funkcií (č. 10 – určiť korene goniometrickej rovnice, č. 28 – vybrať správny tvar grafu funkcie, č. 30 – zistiť počet mrežových bodov na priamke).

Všetky skupiny žiakov zaznamenali výrazne nižšiu úspešnosť v ÚVO než v ÚKO (*Obr. 4* a *Obr. 5* na strane 11). Tento jav sme v predchádzajúcich rokoch nepozorovali.



Obr. 7 Úspešnosť – obťažnosť položiek v jednotlivých častiach testu MAT11 – 3306 (položky sú usporiadané vzostupne podľa úspešnosti)

3.2.1 Úspešnosť a obťažnosť položiek podľa tematických celkov

V nasledujúcej tabuľke uvádzame rozdelenie úloh podľa tematických celkov. Niektoré úlohy sme zaradili aj do dvoch tematických celkov, ak si riešenie úlohy vyžadovalo využitie poznatkov a zručností z oboch celkov.

Tab. 8 Rozdelenie položiek testu MAT11 podľa tematických celkov

Tematický celok	Poradové čísla položiek		Počet
Základy matematiky	ÚKO	1, 3, 4, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 20	20
	ÚVO	21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 29, 30	
Funkcie	ÚKO	1, 5, 6, 10, 11, 14, 16, 17	11
	ÚVO	25, 28, 29	
Planimetria	ÚKO	6, 15, 16, 19, 20	7
	ÚVO	22, 30	
Stereometria	ÚKO	9, 13, 14, 18	5
	ÚVO	27	
Kombinatorika, pravdepodobnosť a štatistika	ÚKO	2, 8, 12	4
	ÚVO	24	

Najvyššiu priemernú úspešnosť dosiahli žiaci v tematickom celku Kombinatorika, pravdepodobnosť a štatistika (65,2 %), nasledovali celky Základy matematiky (60,3 %), Funkcie (56,4 %), Stereometria (51,5 %) a Planimetria (46,7 %). Nižšia úspešnosť úloh zo Stereometrie a Planimetrie a vyššia úspešnosť úloh z Kombinatoriky, pravdepodobnosti a štatistiky bola v súlade s predpokladanou obťažnosťou a myšlienkovou operáciou, ktorú bolo treba využiť pri riešení úloh z uvedených tematických celkov.

Ak porovnáme výsledky žiakov v tematických celkoch podľa druhu školy, žiaci GYM dosiahli lepšie výsledky ako žiaci SOŠ na úrovni strednej vecnej signifikancie vo všetkých tematických celkoch: v Základoch matematiky (r = 0,451), vo Funkciách (r = 0,446), v Planimetrii (r = 0,384), v Stereometrii (r = 0,380) a v Kombinatorike, pravdepodobnosti a štatistike (r = 0,324). Dosiahnuté priemerné úspešnosti sú uvedené v nasledujúcej tabuľke.

Tab. 9 Priemerná úspešnosť v tematických celkoch podľa druhu školy v MAT11 – 3306

Tematický celok	Druh školy	Priemerná úspešnosť %
Základy matematiky	GYM	66,1
	SOŠ	49,0
Funkcie	GYM	63,7
	SOŠ	42,5
Planimetria	GYM	53,5
	SOŠ	33,4
Stereometria	GYM	59,3
	SOŠ	36,6
Kombinatorika, pravdepodobnosť a štatistika	GYM	72,0
	SOŠ	52,2

3.2.2 Úspešnosť a obťažnosť položiek podľa druhu školy

Vecná signifikancia rozdielov úspešností položiek podľa druhu školy bola stredná (2 položky), mierna (11 položiek), veľmi mierna (14 položiek) až žiadna (3 položky). Všetky položky, okrem č. 26, boli obťažnejšie pre žiakov SOŠ ako pre žiakov GYM, najmä výpočtové úlohy z geometrie (č. 6, 9, 14, 15, 22) a úlohy s premennými a parametrami (č. 25, č. 29). Výber položiek s najväčšou mierou vecnej signifikancie rozdielov úspešností podľa druhu školy uvádza nasledujúca tabuľka.

Tab. 10 Úspešnosť položiek MAT11 – 3306 podľa druhu školy, vecná signifikancia rozdielov

Položka	Úspešnosť %		Vecná signifikancia
	GYM	SOŠ	
14	51,8	16,4	0,343
15	70,9	38,4	0,315
9	86,9	63,7	0,270
22	72,0	44,7	0,268
6	81,7	57,3	0,262
17	80,4	56,7	0,251

3.2.3 Úspešnosť a obťažnosť položiek podľa pohlavia

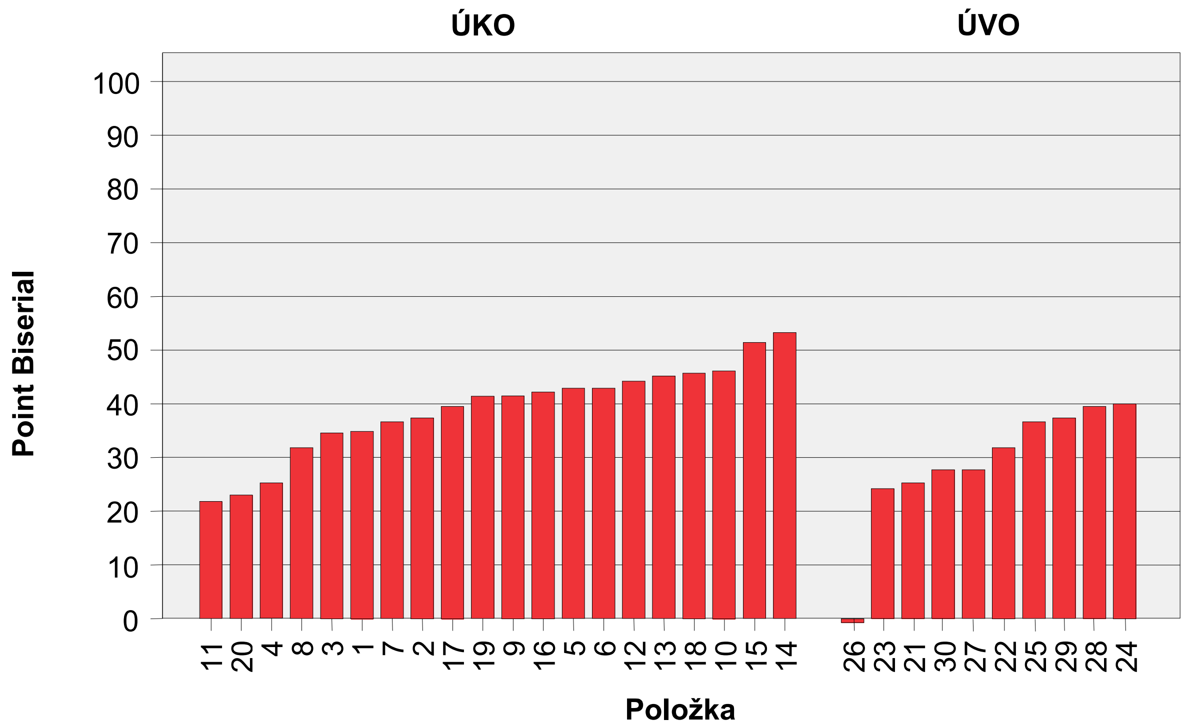
Vecná signifikancia rozdielov úspešností všetkých položiek podľa pohlavia je zanedbateľná. V polovici položiek dosiahli chlapci vyššiu priemernú úspešnosť ako dievčatá, v ostatných položkách boli úspešnejšie dievčatá. (V minulom školskom roku boli dievčatá úspešnejšie iba v dvoch položkách.) Najväčší rozdiel v úspešnosti podľa pohlavia v prospech chlapcov bol v úlohách, ktorých zadanie alebo riešenie obsahovalo grafy, obrázky, schémy alebo vyžadovalo priestorovú predstavivosť (č. 8, 10, 16, 18). Výber položiek s najväčšou mierou vecnej signifikancie rozdielov úspešností podľa pohlavia je zaznamenaný v nasledujúcej tabuľke.

Tab. 11 Úspešnosť položiek MAT11 – 3306 podľa pohlavia a vecná signifikancia rozdielov

Položka	Úspešnosť %		Vecná signifikancia
	chlapci	dievčatá	
18	47,0	37,3	0,095
12	58,7	49,1	0,094
3	76,7	69,8	0,076
16	40,9	34,2	0,068
13	72,8	66,4	0,068
8	85,0	79,9	0,065

3.3 Korelácia položiek so zvyškom testu

Graf na *Obr. 8* znázorňuje hodnoty medzipoložkovej korelácie položiek testu vyjadrené stonásobkom koeficientu Point Biserial. Dvanásť položiek dosiahlo hodnotu *P. Bis*. vyššiu ako 40, z toho dve vyššiu ako 50. Všetky položky (okrem č. 26) dosiahli hodnotu *P. Bis.* vyššiu, ako je kritická hodnota 20. Znamená to, že test bol reliabilný a vnútorne konzistentný (položky medzi sebou korelovali). Správne odpovede na položky s najvyššou hodnotou *P. Bis.* uvádzali väčšinou žiaci v teste celkove úspešnejší a naopak, úspešnosť žiaka v týchto položkách podmieňovala celkovú úspešnosť žiaka v teste.



Obr. 8 Point Biserial položiek v jednotlivých častiach testu MAT11 – 3306 (položky sú usporiadané vzostupne podľa stonásobku *P. Bis.*)

Položka č. 26 dosiahla kritickú hodnotu stonásobku *P. Bis.* nižšiu ako 20, dokonca zápornú. Viac ako tretina odpovedajúcich žiakov volila distraktor B (*Tab. 12*). Z analýzy parametrov tohto distraktora usudzujeme, že túto odpoveď si volila aj veľká časť žiakov celkove v teste úspešná. Správnu odpoveď C (45 %) si preto volilo menej v teste celkove úspešných žiakov a pomerne veľa slabších žiakov. Úspešnejší žiaci zrejme jedno z troch pravdivých tvrdení identifikovali ako nepravdivé. Naopak, celkove menej úspešní žiaci správne určili počet pravdivých tvrdení, podľa štruktúry úlohy však mohli určiť správne tri pravdivé tvrdenia, ale aj niektoré nepravdivé tvrdenie mohli zameniť za pravdivé tak, že celkove stanovili tri pravdivé tvrdenia.

Tab. 12 Analýza distraktorov položky č. 26 testu MAT11 – 3306

č. 26	A	B	C	D	E	Bez odpovede
P. Bis.	– 2	6	– 1	– 3	– 4	– 8
Podiel žiakov	0,07	0,36	0,45	0,11	0,01	0,00
Počet žiakov	308	1583	1970	499	42	16

V položke č. 28 si správnu odpoveď E volilo 26 % žiakov (*Tab. 13*). Z vysokej kladnej hodnoty jej korelačného koeficientu 39 usudzujeme, že to boli väčšinou úspešní žiaci. Distraktor A si volili v najväčšej miere menej úspešní žiaci, v distraktoroch B a D sa k nim vo veľmi malej miere pridali aj niektorí celkove úspešnejší žiaci. Dôvodmi mohli byť nedomyslenie riešenia (distraktor B), nezohľadnenie pôvodného predpisu funkcie po jeho úprave na konci riešenia úlohy (distraktor D) alebo u pomalších žiakov aj časový stres, keďže položka č. 28 je jednou z posledných v teste.

Tab. 13 Analýza distraktorov položky č. 28 testu MAT11 – 3306

č. 28	A	B	C	D	E	Bez odpovede
P. Bis.	– 27	– 3	– 18	1	39	– 9
Podiel žiakov	0,14	0,17	0,14	0,27	0,26	0,01
Počet žiakov	639	755	618	1214	1163	29

3.4 Distribúcia úspešností a citlivosť položiek

Citlivosť položky č. 26 bola nedostatočná, citlivosť položky č. 4 nízka. Citlivosť všetkých ostatných položiek testu bola vyhovujúca. Z nich deväť malo hodnotu citlivosti od 20 % do 50 %, citlivosť ostatných devätnástich položiek bola vyššia ako 50 %.

Grafy distribúcie úspešností žiackych odpovedí jednotlivých položiek uvádzame pri súhrnnej charakteristike položiek v kapitole 3.6.

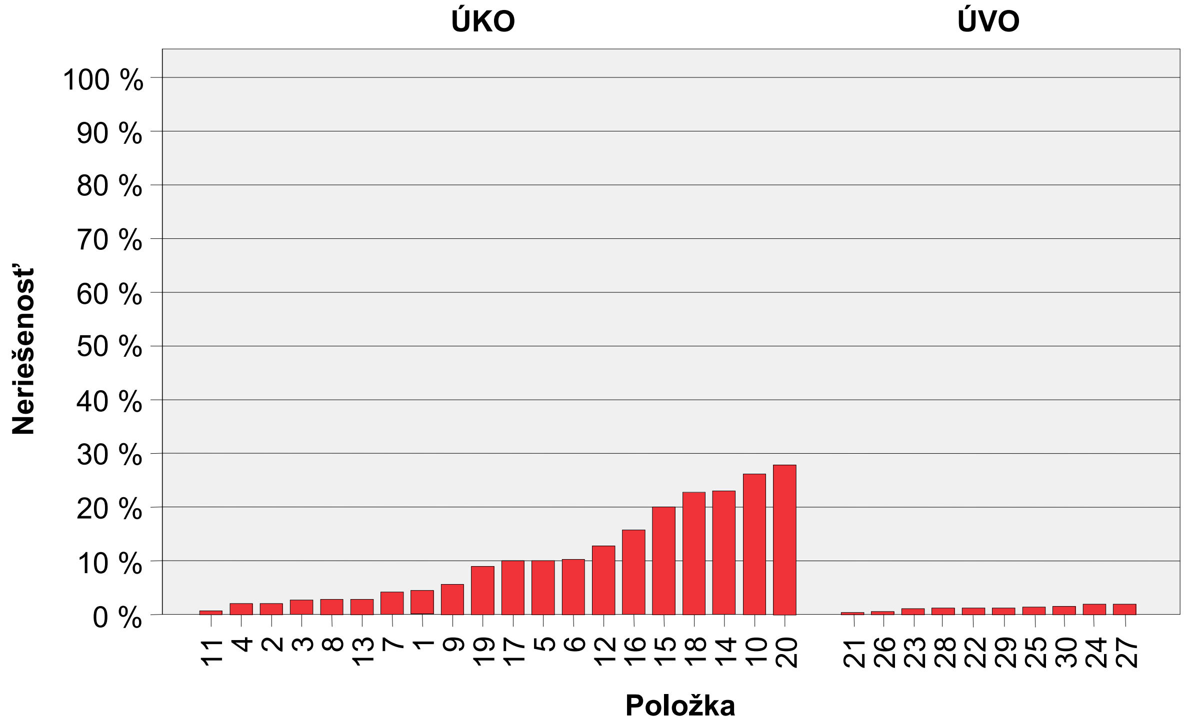
Položky č. 4, 8, 11 a 21 výrazne oddelili poslednú výkonnostnú skupinu, položky č. 1 a 7 posledné dve výkonnostné skupiny. Tieto položky boli na celkovú výkonnosť žiakov citlivé málo až nedostatočne, pretože pre ostatné skupiny žiakov boli rovnako ľahké. Položka č. 20 a položky č. 19, 23 a 28 naopak rozlíšili iba prvú alebo prvé dve výkonnostné skupiny, ostatné skupiny žiakov dosiahli približne rovnakú úspešnosť bez ohľadu na celkovú úspešnosť v teste. Niektoré položky dobre diferencovali polovicu výkonnostného spektra, napríklad položky č. 5, 6, 9 a 13 slabších žiakov, položky č. 10, 28 a 30 úspešnejších žiakov. Ostatné položky plynule rozlíšili všetky výkonnostné skupiny v závislosti od hodnoty citlivosti. Ideálnymi boli napríklad položky č. 12, 14, 15, 18 a 25.

3.5 Neriešenosť položiek

Neriešenosť položiek bola spôsobená takmer výlučne vynechanosťou. Najvyššiu, ale zanedbateľnú hodnotu nedosiahnutosti 0,3 % sme zaznamenali len pri posledných dvoch položkách testu. Z vysokej hodnoty *P. Bis.* správnej odpovede, nízkych záporných hodnôt *P. Bis.* distraktorov, dobrej citlivosti a tvaru grafu distribúcie úspešností žiackych odpovedí usudzujeme, že väčšina žiakov odpovede na tieto úlohy nevolila náhodne, ale ich aj skutočne riešila. Úspešnosť žiakov v týchto položkách zodpovedala celkovej úspešnosti v teste. Predpokladámeme, že žiaci mali dostatok času na riešenie všetkých úloh testu.

Najvyššiu neriešenosť sme zaznamenali u položiek, ktoré zároveň dosiahli najnižšiu priemernú úspešnosť (*Obr. 9*). Riešenie týchto úloh vyžadovalo myšlienku, ako nájsť riešenie, alebo časovo dlhší náročnejší výpočet. Maturanti v nich mali preukázať zručnosti pri práci s premennými v algebraických výrazoch. Predpokladáme, že žiaci, ktorí na tieto úlohy neuviedli odpoveď, buď nevedeli, ako príklad vypočítať, alebo uprednostnili úlohy, ktorých riešenie mohli určiť jednoduchšie a rýchlejšie.

Podiel neodpovedajúcich chlapcov, dievčat, žiakov GYM a SOŠ bol vo všetkých skupinách približne rovnaký, iba v položkách č. 5, 6, 12, 15, 16 a 17 bol podiel neodpovedajúcich žiakov SOŠ približne dvojnásobný ako podiel neodpovedajúcich žiakov GYM.



Obr. 9 Neriešenosť položiek v jednotlivých častiach testu MAT11 – 3306 (položky sú usporiadané vzostupne podľa neriešenosti)

3.6 Súhrnné charakteristiky položiek

Tri položky testu MAT11 zaznamenali výrazne nepriaznivú hodnotu niektorého štatistického ukazovateľa.

Položka č. 4 bola extrémne ľahká pre väčšinu žiakov (priemerná úspešnosť 94,5 %), ale odlíšila najslabšiu skupinu žiakov. Položka č. 26 mala zápornú hodnotu korelačného koeficientu *P. Bis.* správnej odpovede a nedostatočnú citlivosť. Štruktúra položky mohla zvádzať k určeniu správnej odpovede tipovaním, ale obsah položky patril do základného učiva matematiky a riešenie by žiaci v teste celkove úspešní mali zvládnuť. Položka č. 28 mala kladnú hodnotu korelačného koeficientu *P. Bis.* jedného distraktora. Voľba tohto distraktora aj žiakmi v teste celkove úspešnými bola zrejme zapríčinená nepozornosťou pri riešení úlohy. Z uvedených dôvodov položky neboli prebodované a mali v teste svoju opodstatnenosť.

V nasledujúcej časti prinášame súhrnné charakteristiky jednotlivých položiek vo forme prehľadných tabuliek. Pri každej položke uvádzame:

- Tému – podľa Cieľových požiadaviek na vedomosti a zručnosti maturantov z matematiky.
- Testovanú myšlienkovú operáciu – podľa objednávky na tvorbu testu EČ MS z matematiky a špecifikačnej tabuľky zostavenej autormi testových položiek.
- Predpokladanú obťažnosť – podľa objednávky na tvorbu testu EČ MS z matematiky a špecifikačnej tabuľky zostavenej autormi testových položiek.
- Zadanie
- Riešenie
- Štatistické vyhodnotenie – obsahuje celkovú priemernú úspešnosť, úspešnosť žiakov GYM a SOŠ, úspešnosť chlapcov a dievčat, neriešenosť, citlivosť a stonásobok hodnoty korelačného koeficientu *P. Bis.*
- Graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí.
- Najčastejšie odpovede, frekvenciu ich výskytu a predpokladanú príčinu uvedenia danej odpovede pri ÚKO a frekvenciu voľby ponúkaných odpovedí, ich stonásobok hodnoty korelačného koeficientu *P. Bis.* a predpokladanú príčinu voľby danej možnosti pri ÚVO.
- Komentár – hodnotiace vyjadrenia, ktoré interpretujú namerané údaje štatistických ukazovateľov.

Štatistické vyhodnotenia a frekvencie najčastejších odpovedí sú uvedené podľa hodnôt variantu testu MAT 11 – 3306.

Príklad **č. 1**

Téma: 2.4 Logaritmické a exponenciálne funkcie, geometrická postupnosť

Testované myšlienkové operácie: reprodukcia a jednoduché myšlienkové operácie

Predpokladaná obťažnosť: ľahká úloha

Zadanie:

Vypočítajte koreň rovnice $\log(3x+12) = \log(5x - 18)$.

Riešenie:

(1) Určíme, pre ktoré hodnoty x sú definované logaritmy v pôvodnej rovnici v zadaní. Argument logaritmu musí byť kladné reálne číslo, preto $3x + 12 > 0 \Rightarrow x > -4$ a zároveň $5x - 18 > 0 \Rightarrow x > 3{,}6$.

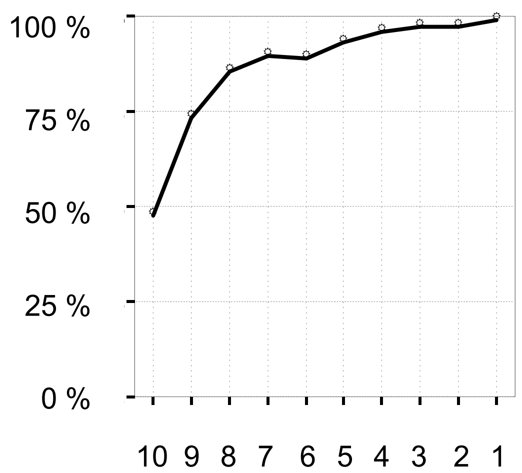
(2) Na základe prostosti logaritmickej funkcie z rovnosti logaritmov vyplýva rovnosť argumentov logaritmov. Preto z rovnice v zadaní dostávame rovnicu $3x + 12 = 5x - 18$, z nej $2x = 30$. Jej riešením je $x = 15$.

(3) Vypočítaný koreň rovnice v (2) vyhovuje obom podmienkam v (1). Riešením rovnice je $x = 15$.

Štatistické vyhodnotenie:

úspešnosť	celková	86,7 %
	žiaci GYM	92,7 %
	žiaci SOŠ	75,8 %
	chlapci	85,5 %
	dievčatá	89,2 %
neriešenosť		4,9 %
citlivosť		37,6 %
P. Bis.		35,2

Graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí:



Najčastejšie odpovede a frekvencia ich výskytu:		
odpoveď	frekvencia	predpokladaná príčina uvedenej odpovede
15	86,7 %	správna odpoveď
–	4,9 %	neuvedená odpoveď
3	1,2 %	Numerická chyba pri riešení rovnice v (2). Žiaci zle sčítali čísla 12 a – 18 z dvoch strán rovnice a získali nesprávnu rovnicu $2x = 6$, odkiaľ vypočítali nesprávny koreň $x = 3$.
10	0,9 %	Numerická chyba pri riešení rovnice v (2). Žiaci zle sčítali čísla 12 a – 18 z dvoch strán rovnice a získali nesprávnu rovnicu $2x = 20$, odkiaľ vypočítali nesprávny koreň $x = 10$ alebo zle odčítali členy $3x$ a $5x$ z dvoch strán rovnice a získali nesprávnu rovnicu $3x = 30$, odkiaľ vypočítali nesprávny koreň $x = 10$.

Komentár:

Úloha vyžadovala schopnosť riešiť logaritmické rovnice využitím viet o logaritmoch, znalosť vlastností logaritmickej funkcie a definičného oboru logaritmu. V závere bolo potrebné využiť aj zručnosti pri riešení lineárnych rovníc. Úloha podľa predpokladov bola veľmi ľahká takmer pre všetky skupiny žiakov, mierne nižšiu úspešnosť dosiahli žiaci SOŠ. Z grafu distribúcie úspešností žiackych odpovedí vidíme, že úloha odlíšila posledné dve výkonnostné skupiny žiakov. Úloha bola extrémne ľahká pre úspešnejšiu polovicu žiakov, riešili ju s úspešnosťou takmer 100 %.

Príklad **č. 2**

Téma: 5.1 Kombinatorika a pravdepodobnosť

Testované myšlienkové operácie: reprodukcia a jednoduché myšlienkové operácie

Predpokladaná obťažnosť: ľahká úloha

Zadanie:

Do finále plaveckej súťaže postúpilo 8 plavcov. Určte, koľko rôznych umiestnení môže nastať na troch medailových miestach, ak každú medailu získa iný plavec.

Riešenie:

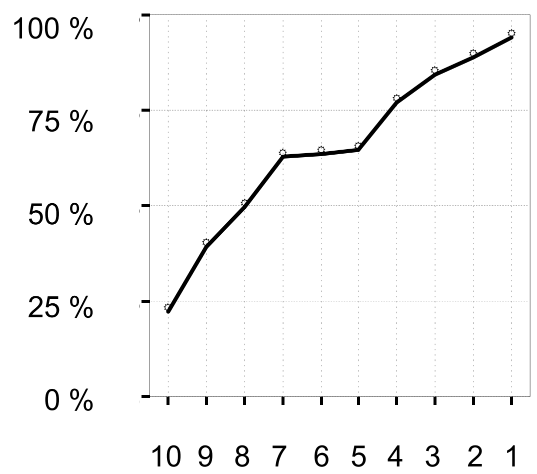
(1) Na prvom mieste sa môže umiestniť hociktorý z ôsmich plavcov. Ku každému z ôsmich plavcov na prvom mieste sa môže niektorý zo zvyšných siedmich plavcov umiestniť na druhom mieste, čo je podľa pravidla súčinu $8 . 7 = 56$ možností. Ku každej z 56 dvojíc ľubovoľných plavcov na prvých dvoch miestach sa môže na treťom mieste umiestniť niektorý zo zvyšných šiestich plavcov, čo je $56 . 6 = 336$ možností.

(2) Iný spôsob: Potrebujeme zoradiť do poradia na tri miesta ôsmich plavcov, čo je typická úloha na variácie bez opakovania tretej triedy z ôsmich prvkov, teda $V(3,8) = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = 8 . 7 . 6 = 336$.

Štatistické vyhodnotenie:

úspešnosť	celková	64,6 %
	žiaci GYM	78,9 %
	žiaci SOŠ	48,9 %
	chlapci	63,1 %
	dievčatá	67,6 %
neriešenosť		2,4 %
citlivosť		60,8 %
P. Bis.		38,0

Graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí:



Najčastejšie odpovede a frekvencia ich výskytu:		
odpoveď	frekvencia	predpokladaná príčina uvedenej odpovede
336	64,6 %	správna odpoveď
56	18,6 %	Myšlienková chyba: Žiaci v (2) namiesto vzťahu pre variácie bez opakovania použili vzťah pre kombinácie bez opakovania $C(3, 8) = \frac{8!}{3!\,.\,(8-3)!} = \frac{8!}{3!\,.\,5!} = \frac{8\,.\,7\,.\,6}{3\,.\,2} = 8\,.\,7 = 56.$ Príčinou mohla byť chybná úvaha a neuváženie dôležitosti poradia pretekárov alebo správna úvaha o variáciách, ale zlé použitie, prípadne zamenenie vzťahu variácií bez opakovania za vzťah pre kombinácie bez opakovania.
–	2,4 %	neuvedená odpoveď
24	2,0 %	Myšlienková chyba: Žiaci na každú z troch pozícií predpokladali možnosť umiestnenia 8 pretekárov a namiesto použitia pravidla súčinu 8 . 8 . 8 použili súčin 3 pozícií s 8 pretekármi 3 . 8 = 24.
120	1,4 %	Myšlienková chyba: Žiaci použili vzťah pre kombinácie s opakovaním $C'(3, 8) = \binom{8+3-1}{3} = \frac{10!}{3!\,.\,(10-3)!} = \frac{10!}{3!\,.\,7!} = \frac{10\,.\,9\,.\,8}{3\,.\,2} = 120.$ Príčinu použitia tohto vzťahu je ťažko pochopiteľná, pretože na stupni víťazov je dôležité poradie pretekárov (variácie) a zároveň každý pretekár je iba jeden človek, takže sa nemôže umiestniť na viacerých pozíciách zároveň (bez opakovania).
Komentár: Riešenie úlohy vyžadovalo skúsenosť pri riešení úloh z kombinatoriky úvahou alebo pomocou vzťahov a prípadne zručnosť pri počítaní s kombinačnými číslami a faktoriálmi. Z vyhodnotených výsledkov vidíme, že veľa žiakov použilo niektorý z kombinatorických vzťahov uvedených na poslednom liste testu. Oveľa viac sa sústredili na správne numerické vyčíslenie výsledku pomocou vybratého vzťahu než na rozhodnutie, ktorý z uvedených vzťahov správne použiť. Niektorí žiaci zrejme vybrali použitý vzťah náhodne, bez myšlienkovej úvahy. Žiaci SOŠ riešili úlohu s oveľa nižšou priemernou úspešnosťou ako žiaci GYM (rozdiel v priemerných úspešnostiach až 30 %). Úloha dobre rozlíšila žiakov, najmä okrajové skupiny výkonnostného spektra.		

Príklad **č. 3**

Téma: 1.2 Čísla, premenné a výrazy

Testované myšlienkové operácie: zložitejšie myšlienkové operácie

Predpokladaná obťažnosť: stredne ťažká úloha

Zadanie:

Dve miesta majú na mape s mierkou 1 : 10 000 vzdialenosť 85 mm. Zistite, aká bude vzdialenosť týchto dvoch miest na mape s mierkou 1 : 25 000. Výsledok zapíšte v milimetroch.

Riešenie:

(1) Vzdialenosť 85 mm na mape s mierkou 1 : 10 000 je v skutočnosti 850 000 mm.

(2) Skutočná vzdialenosť 850 000 mm dvoch miest na mape s mierkou 1 : 25 000 bude 850 000 : 25 000 = 34 mm.

(3) Iný spôsob: Využitie úmernosti a trojčlenky: Čím väčšia je mierka mapy, tým kratšia bude zobrazovaná vzdialenosť. Mierka mapy a zobrazovaná vzdialenosť sú teda nepriamo úmerné:

$\downarrow$ 10 000 .... 85 mm $\uparrow$

25 000 .... x mm

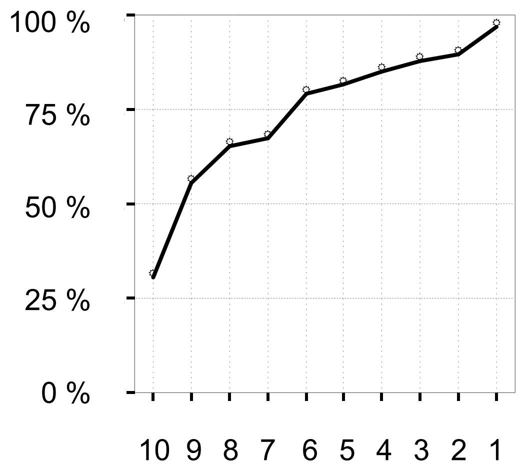
Z trojčlenky získavame rovnosť $\frac{x}{85} = \frac{10000}{25000}$, z ktorej $25x = 10 . 85$, odkiaľ $x = 34$.

(4) Vzdialenosť dvoch miest na mape s mierkou 1 : 25 000 bude 34 mm.

Štatistické vyhodnotenie:

úspešnosť	celková	74,1 %
	žiaci GYM	78,0 %
	žiaci SOŠ	66,5 %
	chlapci	76,7 %
	dievčatá	69,8 %
neriešenosť		2,6 %
citlivosť		50,1 %
P. Bis.		35,1

Graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí:



<table>
<tr><td colspan="3">Najčastejšie odpovede a frekvencia ich výskytu:</td></tr>
<tr><td>odpoveď</td><td>frekvencia</td><td>predpokladaná príčina uvedenej odpovede</td></tr>
<tr><td>34</td><td>74,1 %</td><td>správna odpoveď</td></tr>
<tr><td>212,5</td><td>14,1 %</td><td>Myšlienková chyba: Žiaci v (3) použili namiesto nepriamej úmernosti priamu alebo správne uvažovali o nepriamej úmernosti, ale nesprávne použili trojčlenku pri výpočte:
10 000 .... 85 mm
25 000 .... x mm
$\frac{x}{85} = \frac{25000}{10000} \rightarrow 10x = 25 . 85$, odkiaľ $x = 212{,}5$.
Táto skupina žiakov nevykonala po skončení výpočtu kontrolu reálnosti výsledku. Ak na mape, na ktorej zobrazený 1 mm zodpovedá 10 000 mm v skutočnosti, je vzdialenosť zobrazených miest 85 mm, tak na mape, na ktorej zobrazený 1 mm zodpovedá až 25 000 mm v skutočnosti, bude daná zobrazovaná vzdialenosť oveľa kratšia (25 : 10 = 2,5 krát).</td></tr>
<tr><td>–</td><td>2,6 %</td><td>neuvedená odpoveď</td></tr>
<tr><td>3,4</td><td>1,9 %</td><td rowspan="2">Numerická chyba: Žiaci vo výpočte správnym alebo nesprávnym postupom urobili posun o jeden rád.</td></tr>
<tr><td>21,25</td><td>1,1 %</td></tr>
<tr><td colspan="3">Komentár:
Úloha bola zameraná na využitie pomeru alebo úmerností pri riešení úlohy z reálneho života. Vyžadovala aj zručnosť pri počítaní so zlomkami a pomocou trojčlenky. Žiaci pri riešení úlohy dosiahli vyššiu priemernú úspešnosť než predpokladali autori položky. Úlohu oveľa lepšie zvládli žiaci GYM a chlapci. Úloha najlepšie rozlíšila posledné dve skupiny žiakov výkonnostného spektra.</td></tr>
</table>

Príklad **č. 4**

Téma: 1.2 Čísla, premenné a výrazy

Testované myšlienkové operácie: zložitejšie myšlienkové operácie

Predpokladaná obťažnosť: stredne ťažká úloha

Zadanie:

Určte dvojciferné prirodzené číslo deliteľné deviatimi, ktoré je štyrikrát väčšie ako súčet jeho cifier.

Riešenie:

(1) Číslo je deliteľné deviatimi, ak súčet jeho cifier je deliteľný deviatimi. Takýmito dvojcifernými číslami sú: 90, 18, 81, 27, 72, 36, 63, 45, 54. Všetky čísla majú súčet cifier 9. Štyrikrát väčšie číslo, ako ciferný súčet 9, je číslo 36.

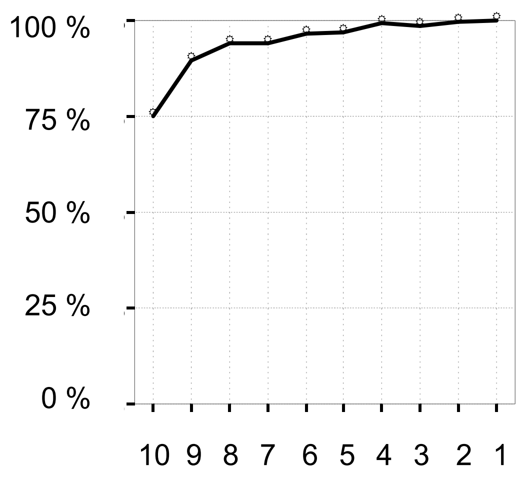
(2) Iný spôsob: Dvojciferné číslo označíme *xy*. Hodnota čísla v desiatkovej sústave je $\overline{xy} = 10x + y$, súčet cifier čísla *xy* je $x + y$.

(3) Podmienku pre hľadané dvojciferné číslo zapíšeme rovnicou $10x + y = 4(x + y)$, odkiaľ $y = 2x$. Preto z čísel v (1) vyberieme to, ktoré má na mieste jednotiek dvakrát väčšiu cifru ako na mieste desiatok. Takým je číslo 36.

Štatistické vyhodnotenie:

úspešnosť	celková	94,5 %
	žiaci GYM	96,7 %
	žiaci SOŠ	90,3 %
	chlapci	94,9 %
	dievčatá	93,8 %
neriešenosť		2,3 %
citlivosť		17,3 %
P. Bis.		25,9

Graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí:



<table>
<tr><td colspan="3">Najčastejšie odpovede a frekvencia ich výskytu:</td></tr>
<tr><td>odpoveď</td><td>frekvencia</td><td>predpokladaná príčina uvedenej odpovede</td></tr>
<tr><td>36</td><td>94,5 %</td><td>správna odpoveď</td></tr>
<tr><td>–</td><td>2,1 %</td><td>neuvedená odpoveď</td></tr>
<tr><td>72</td><td>0,6 %</td><td rowspan="2">Žiaci našli číslo, ktoré je osemkrát (päťkrát) väčšie ako súčet jeho cifier. Zrejme nepochopili zadanie alebo spravili numerickú chybu vo výpočte a výsledok si neskontrolovali alebo len nevedia násobilku.</td></tr>
<tr><td>45</td><td>0,5 %</td></tr>
<tr><td colspan="3">Komentár:

Úloha využívajúca poznatky z deliteľnosti prirodzených čísel a pozičnej desiatkovej sústavy sa dala riešiť aj bez použitia „veľkej matematiky“ len vypisovaním a overovaním vhodných čísel. Nepotvrdil sa predpoklad vyššej obťažnosti a náročnosti myšlienkových operácií potrebných na vyriešenie úlohy. Pre všetky skupiny žiakov bola úloha extrémne ľahká. Preto mala úloha nízku citlivosť, mierne odlíšila iba najslabšiu skupinu žiakov. Pre všetkých ostatných žiakov bola úloha rovnako ľahká.</td></tr>
</table>

Príklad **č. 5**

Téma: 2.3 Mnohočleny a mocninové funkcie, lineárna lomená funkcia

Testované myšlienkové operácie: reprodukcia a jednoduché myšlienkové operácie

Predpokladaná obťažnosť: ľahká úloha

Zadanie:

Vypočítajte koreň rovnice $(x + 2011)^{20} = 0$.

Riešenie:

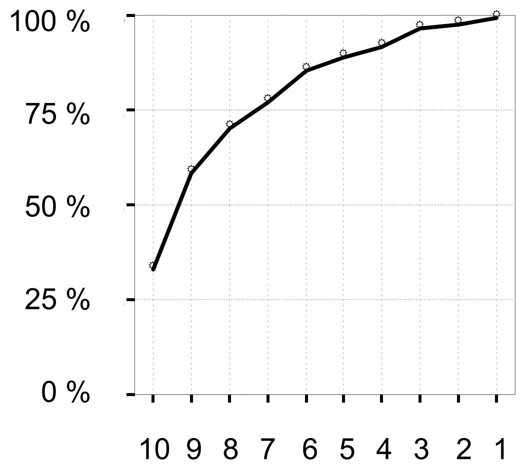
(1) Jediné číslo, ktoré po umocnení na dvadsiatu má hodnotu nula, je nula. Preto $x + 2011 = 0$, odkiaľ $x = -2011$.

(2) Riešením rovnice je $x = -2011$.

Štatistické vyhodnotenie:

úspešnosť	celková	79,6 %
	žiaci GYM	85,6 %
	žiaci SOŠ	69,0 %
	chlapci	81,4 %
	dievčatá	77,6 %
neriešenosť		10,2 %
citlivosť		52,9 %
P. Bis.		42,2

Graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí:



Najčastejšie odpovede a frekvencia ich výskytu:		
odpoveď	frekvencia	predpokladaná príčina uvedenej odpovede
– 2011	79,6 %	správna odpoveď
–	10,2 %	neuvedená odpoveď
2011	3,4 %	Žiaci sa pomýlili pri vyriešení rovnice $x + 2011 = 0$ alebo rovnicu správne vyriešili, ale do odpoveďového hárka nenapísali znamienko mínus.
– 2010	0,8 %	Žiaci asi predpokladali, že vhodným základom mocniny na ľavej strane rovnice je číslo 1.
0	0,6 %	Žiaci zrejme začali úlohu riešiť správne, ale riešenie nedokončili. Do odpoveďového hárka zapísali hodnotu obsahu zátvorky a nie hodnotu neznámej x.

Komentár:

Správne riešenie úlohy vyžadovalo znalosť vlastností exponenciálnej funkcie, vplyvu základu a exponentu mocniny na jej hodnotu a zručnosť pri riešení základných exponenciálnych rovníc. Úloha dosiahla predpokladanú úspešnosť. Pre žiakov GYM a chlapcov bola úloha veľmi ľahká. Úloha dobre rozlíšila najmä slabšiu polovicu výkonnostného spektra žiakov. Desatina žiakov na položku neuviedla odpoveď. Približne dvojnásobne väčší pomer počtu neodpovedajúcich žiakov k počtu všetkých žiakov sme zaznamenali v skupine žiakov SOŠ v porovnaní so žiakmi GYM.

Príklad **č. 6**

Téma: 3.1 Základné rovinné útvary

Testované myšlienkové operácie: reprodukcia a jednoduché myšlienkové operácie

Predpokladaná obťažnosť: ľahká úloha

Zadanie:

V trojuholníku *ABC* je pomer dĺžok strán $a : b = 1 : 2$, uhol $\alpha = 30°$. Určte v stupňoch veľkosť najväčšieho vnútorného uhla trojuholníka *ABC*.

Riešenie:

(1) Podľa sínusovej vety pre uhly α, β platí $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{1}{2}$, odkiaľ $\sin\beta = 2 \,.\, \sin 30° = 1$, $\beta = 90°$.

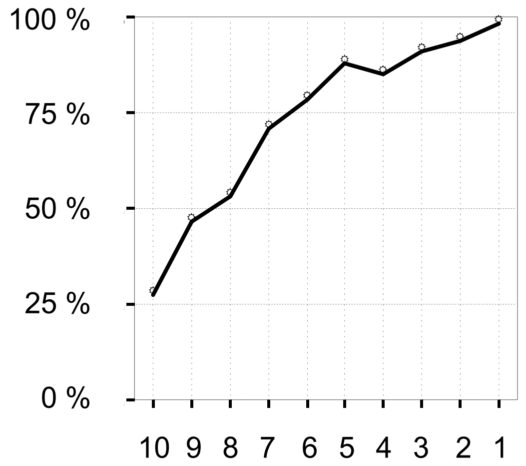
(2) Pre veľkosť chýbajúceho uhla γ potom platí $\gamma = 180° - \alpha - \beta = 60°$.

(3) Najväčším vnútorným uhlom trojuholníka *ABC* je β s veľkosťou 90°.

Štatistické vyhodnotenie:

úspešnosť	celková	73,1 %
	žiaci GYM	81,7 %
	žiaci SOŠ	57,3 %
	chlapci	73,1 %
	dievčatá	73,8 %
neriešenosť		10,4 %
citlivosť		59,1 %
P. Bis.		42,8

Graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí:



Najčastejšie odpovede a frekvencia ich výskytu:		
odpoveď	frekvencia	predpokladaná príčina uvedenej odpovede
90	73,1 %	správna odpoveď Vzhľadom na formuláciu otázky ju však mohli žiaci určiť aj myšlienkovou chybou. Ak predpokladali, že ak strana *b* je dvakrát dlhšia ako strana *a*, tak aj uhol β bude dvakrát väčší ako uhol α, tak vypočítali $\beta = 60°$ a následne $\gamma = 90°$.
–	10,4 %	neuvedená odpoveď
120	2,8 %	Žiaci uviedli tieto odpovede zrejme na základe chybnej úvahy alebo zlého náčrtu.
100	2,2 %	
60	1,9 %	Žiaci zrejme správne vypočítali veľkosti uhlov, ale neuviedli v odpovedi najväčší z nich. Je nepravdepodobné, že uhol 60° by určili ako najväčší, lebo zvyšné uhly by museli byť menšie a následne súčet veľkostí vnútorných uhlov trojuholníka by nedosiahol 180° alebo by mal trojuholník všetky uhly veľké 60° (rovnostranný trojuholník), čo by bolo v rozpore so zadaním (strana *b* je dvakrát dlhšia ako strana *a*).
135	1,7 %	Žiaci v (1) nesprávne upravili $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{1}{2}$ na $\sin\alpha = 2 . \sin\beta$ alebo hneď na začiatku zapísali prevrátený pomer.

Komentár:

Úloha vyžadovala znalosť riešenia trigonometrických úloh v trojuholníku, použitia sínusovej vety, určovania veľkostí uhla podľa jeho hodnôt goniometrických funkcií a súčtu veľkostí vnútorných uhlov v trojuholníku. Úlohu lepšie riešili žiaci GYM než žiaci SOŠ. Odpoveď na túto položku neuviedla asi desatina žiakov. Približne dvojnásobne väčší pomer počtu neodpovedajúcich žiakov k počtu všetkých žiakov sme zaznamenali v skupine žiakov SOŠ v porovnaní so žiakmi GYM. Úloha mala dobrú citlivosť, veľmi dobre rozlíšila najmä menej úspešnejšiu polovicu žiakov.

Príklad **č. 7**

Téma: 1.4 Rovnice, nerovnice a ich sústavy

Testované myšlienkové operácie: reprodukcia a jednoduché myšlienkové operácie

Predpokladaná obťažnosť: ľahká úloha

Zadanie:

Určte reálne číslo c tak, aby číslo 4 bolo koreňom rovnice $3x^2 - 2x + c = 0$.

Riešenie:

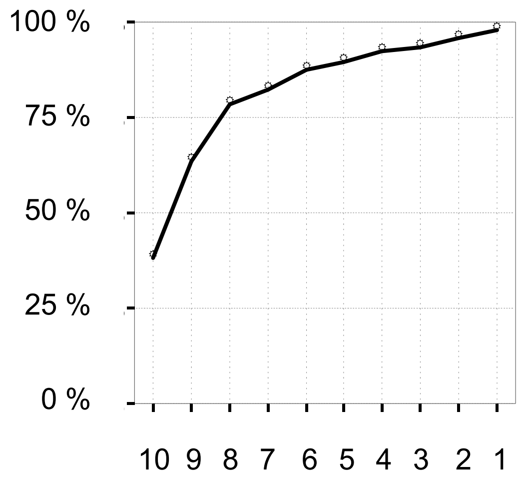
(1) Ak 4 je koreňom rovnice s neznámou x, môžeme číslo 4 dosadiť za x do rovnice v zadaní a získame novú rovnicu s neznámou c, z ktorej vypočítame hľadanú hodnotu parametra c.

(2) $3 \,.\, 4^2 - 2 \,.\, 4 + c = 0 \rightarrow 48 - 8 + c = 0$, odkiaľ $c = -40$.

Štatistické vyhodnotenie:

úspešnosť	celková	81,9 %
	žiaci GYM	87,4 %
	žiaci SOŠ	71,6 %
	chlapci	80,9 %
	dievčatá	83,9 %
neriešenosť		4,7 %
citlivosť		46,1 %
P. Bis.		37,1

Graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí:



Najčastejšie odpovede a frekvencia ich výskytu:		
odpoveď	frekvencia	predpokladaná príčina uvedenej odpovede
– 40	81,9 %	správna odpoveď
–	4,8 %	neuvedená odpoveď
40	3,1 %	Znamienková chyba v (2) pri prenášaní číselnej hodnoty 40 na druhú stranu pri riešení rovnice $40 + c = 0$.
– 8	0,7 %	Chyba pozornosti: Žiaci pri dosadení v (2) zabudli na koeficient 3 pri výpočte a získali rovnicu $4^2 - 2 \,.\, 4 + c = 0$, z ktorej po úprave na $16 - 8 + c = 0$ vypočítali $c = -8$.
– 56	0,5 %	Numerická chyba: Žiaci v (2) získali rovnicu s chybným znamienkom $48 + 8 + c = 0$, odkiaľ vypočítali $c = -56$.

Komentár:

Úloha vyžadovala znalosť pojmu koreň rovnice a zručnosť pri úprave rovnice a počítaní s mocninami. Úloha bola veľmi ľahká pre chlapcov i dievčatá, mierne obťažnejšia bola len pre skupinu žiakov SOŠ. Dobre rozlíšila posledné dve skupiny žiakov výkonnostného spektra, slabo rozlíšila úspešnejšiu polovicu žiakov.

Príklad **č. 8**

Téma: 5.2 Štatistika

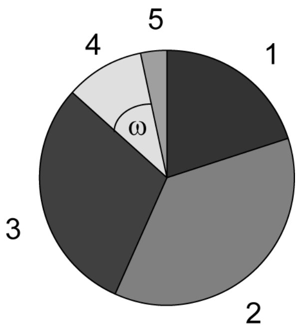
Testované myšlienkové operácie: zložitejšie myšlienkové operácie

Predpokladaná obťažnosť: stredne ťažká úloha

Zadanie:

Koncoročné hodnotenie žiakov z matematiky je znázornené v nasledujúcej tabuľke a diagrame.

Známka	1	2	3	4	5
Počet žiakov	6	11	9	3	1



Určte v stupňoch veľkosť uhla ω prislúchajúceho známke 4 v uvedenom diagrame.

Riešenie:

(1) Podľa údajov z tabuľky sa hodnotilo $6 + 11 + 9 + 3 + 1 = 30$ žiakov.

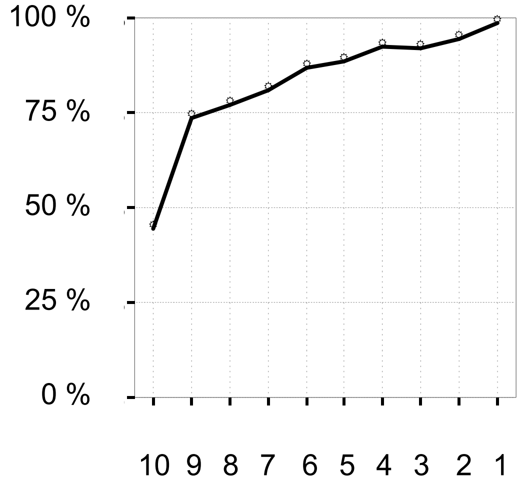
(2) Každého žiaka v diagrame charakterizuje rovnako veľký stredový uhol s veľkosťou $360° : 30 = 12°$.

(3) Stredový uhol ω prislúchajúci známke 4 je priradený 3 žiakom, preto jeho veľkosť bude $\omega = 12° \,.\, 3 = 36°$.

Štatistické vyhodnotenie:

úspešnosť	celková	82,9 %
	žiaci GYM	86,4 %
	žiaci SOŠ	76,6 %
	chlapci	85,0 %
	dievčatá	79,9 %
neriešenosť		2,8 %
citlivosť		37,4 %
P. Bis.		31,9

Graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí:



Najčastejšie odpovede a frekvencia ich výskytu:		
odpoveď	frekvencia	predpokladaná príčina uvedenej odpovede
36	82,9 %	správna odpoveď
48	3,6 %	Chyba pozornosti: Žiaci zrejme správne počítali v (1) a (2), ale v (3) zrejme zamenili číslice známky 4 a počtu žiakov 3 a vypočítali $\omega = 12° . 4 = 48°$.
–	2,8 %	neuvedená odpoveď
18	1,8 %	Predpokladáme myšlienkovú chybu: Žiaci správne počítali, ale uvažovali veľkosť plného kruhu 180°.
30	1,0 %	Predpokladáme myšlienkovú chybu: Žiaci správne počítali, ale uvažovali veľkosť plného kruhu 300°.
10	1,0 %	Predpokladáme myšlienkovú chybu: Žiaci zrejme uvažovali tak, že 3 žiaci so známkou 4 z celkového počtu 30 žiakov sú jedna desatina, takže by im v kruhu (celku zodpovedajúcemu 100 %) mala prislúchať desatina, teda 10 %.

Komentár:

Úloha vyžadovala schopnosť získať potrebné údaje z tabuľky a diagramu a využiť ich pri výpočte. Nepotvrdila sa predpokladaná vyššia obťažnosť položky. Žiaci úlohu vyriešili s vysokou priemernou úspešnosťou, najúspešnejší boli žiaci GYM a chlapci. Úloha odlíšila najslabšiu skupinu žiakov, ostatné skupiny rozlíšila slabo.

Príklad **č. 9**

Téma: 4.5 Telesá

Testované myšlienkové operácie: zložitejšie myšlienkové operácie

Predpokladaná obťažnosť: stredne ťažká úloha

Zadanie:

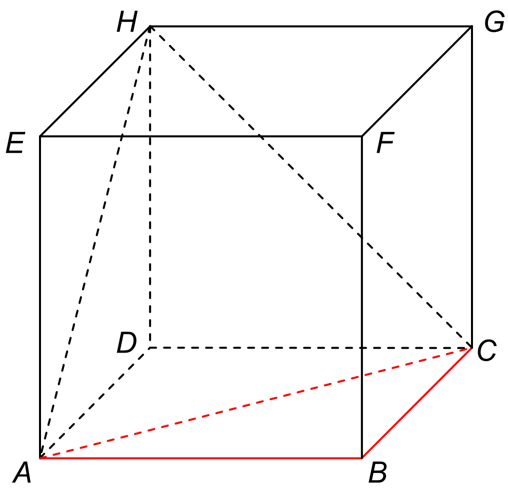
Rez kocky *ABCDEFGH* rovinou *ACH* je rovnostranný trojuholník s obvodom 18 cm. Vypočítajte v centimetroch dĺžku hrany kocky. Výsledok zapíšte s presnosťou na dve desatinné miesta.

Riešenie:

(1) Dĺžku hrany kocky môžeme vypočítať napríklad v rovine podstavy kocky z pravouhlého trojuholníka *ABC*.

(2) Dĺžka prepony *AC* je dĺžka jednej strany rezového rovnostranného trojuholníka, teda tretina obvodu, preto $|AC| = 6$ cm. Hrany kocky *AB* a *BC* označíme *a*. Z Pytagorovej vety pre trojuholník *ABC* $a^2 + a^2 = 6^2$ vypočítame dĺžku hrany kocky $a = 3\sqrt{2}$ cm, čo je 4,24 cm po zaokrúhlení podľa zadania.

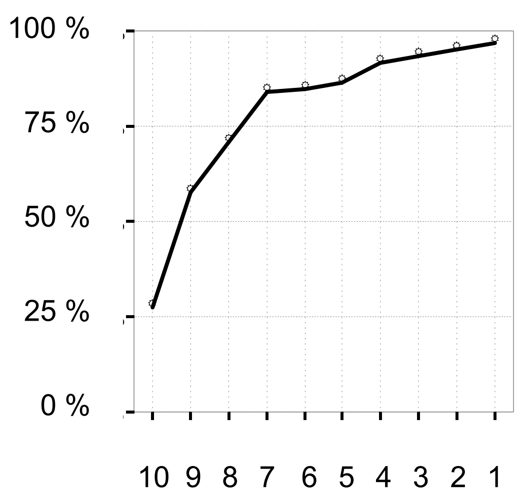
(3) Dĺžka hrany kocky po zaokrúhlení je 4,24 cm.



Štatistické vyhodnotenie:

úspešnosť	celková	78,8 %
	žiaci GYM	86,9 %
	žiaci SOŠ	63,7 %
	chlapci	79,8 %
	dievčatá	77,6 %
neriešenosť		6,0 %
citlivosť		53,6 %
P. Bis.		41,0

Graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí:



Najčastejšie odpovede a frekvencia ich výskytu:		
odpoveď	frekvencia	predpokladaná príčina uvedenej odpovede
4,24	78,8 %	správna odpoveď
–	6,0 %	neuvedená odpoveď
6	1,7 %	Žiaci považovali vypočítanú stranu rezového trojuholníka (uhlopriečka v stene kocky) za hľadanú dĺžku hrany kocky.
12,73	1,0 %	Myšlienková chyba: Žiaci zle analyzovali zadanie. V (2) určili dĺžku *AC* ako dĺžku zadaného obvodu rezového trojuholníka 18 cm. Ďalej s chybným údajom správne použili Pytagorovu vetu v trojuholníku *ABC* na výpočet hrany kocky.
1,73	1,0 %	Žiaci zrejme počítali pomocou goniometrických funkcií a dopočítali výsledok s hodnotou 2 . sin 60°.
3	0,7 %	Žiaci počítali v pravouhlom trojuholníku *ABC* pomocou goniometrických funkcií. Chybne priradili uhlu *BAC* veľkosť 30° a počítali $\sin 30° = \frac{a}{6}$, odkiaľ $a = 3$ cm.

Komentár:

Úloha vyžadovala znalosť polohových a metrických vzťahov v kocke a rovnostrannom trojuholníku a zručnosť v počítaní s Pytagorovou vetou, prípadne goniometrickými funkciami v pravouhlom trojuholníku. Najúspešnejší boli žiaci GYM, pre ktorých bola úloha veľmi ľahká. Úloha dobre rozlíšila slabšiu polovicu žiakov, nerozlíšila žiakov v teste celkove úspešnejších, pre nich bola úloha takmer rovnako ľahká.

Príklad **č. 10**

Téma: 2.5 Goniometrické funkcie

Testované myšlienkové operácie: zložitejšie myšlienkové operácie

Predpokladaná obťažnosť: stredne ťažká úloha

Zadanie:

Určte korene rovnice $\cos x = \cos 12°$ z intervalu $\langle -90°; 360°\rangle$. Do odpoveďového hárka zapíšte súčet koreňov tejto rovnice z daného intervalu.

Riešenie:

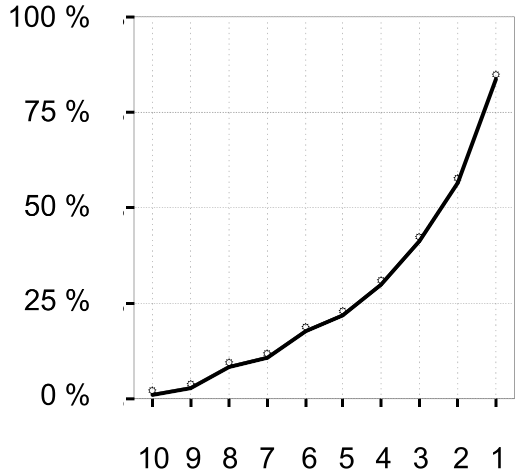
(1) Riešením rovnice sú čísla, ktoré patria do uvedeného intervalu a hodnota ich kosínusu sa rovná kosínusu čísla 12°. Podľa jednotkovej kružnice alebo grafu funkcie $y = \cos x$ sú riešením rovnice v R čísla $x = 12° + k \,.\, 360°$ alebo $x = -12° + k \,.\, 360°$, kde $k \in Z$.

(2) Riešenia, ktoré zároveň patria do intervalu v zadaní, sú iba pre $k = 0$ čísla $x_1 = 12°$ a $x_2 = -12°$ a pre $k = 1$ číslo $x_3 = 348°$.

(3) Súčet koreňov rovnice je $x_1 + x_2 + x_3 = 12° + (-12°) + 348° = 348°$.

Štatistické vyhodnotenie:		
úspešnosť	celková	27,3 %
	žiaci GYM	33,9 %
	žiaci SOŠ	15,4 %
	chlapci	29,6 %
	dievčatá	24,2 %
neriešenosť		27,2 %
citlivosť		68,1 %
P. Bis.		46,4

Graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí:



Najčastejšie odpovede a frekvencia ich výskytu:		
odpoveď	frekvencia	predpokladaná príčina uvedenej odpovede
348	27,3 %	správna odpoveď
–	27,2 %	neuvedená odpoveď
336	5,0 %	Žiaci z troch správnych koreňov považovali za riešenia rovnice iba korene $x_2 = -12°$ a $x_3 = 348°$. Koreň $x_1 = 12°$ zrejme neuvažovali preto, že bol uvedený už v zadaní rovnice.
0	4,9 %	Žiaci určili ako korene rovnice len čísla $x_1 = 12°$ a $x_2 = -12°$, pretože uvažovali o periodicite funkcie vždy len v jednom smere: pre $x = 12° + k\,.\,360°$, $k \in N$ a pre $x = -12° + k\,.\,360°$, $k \in Z^-$.
12	3,8 %	Žiaci zrejme bez využitia jednotkovej kružnice, grafu funkcie $y = \cos x$ a znalosti periodicity funkcie určili len z rovnice jediný koreň $x_1 = 12°$ („zrkadlová“ rovnosť ľavej a pravej strany rovnice).
360	2,9 %	Žiaci určili ako korene rovnice iba čísla zodpovedajúce na jednotkovej kružnici alebo grafe funkcie $y = \cos x$ číslam $x = 12° + k\,.\,360°$, $k \in Z$.
708	2,2 %	Žiaci určili okrem troch správnych koreňov rovnice z uvedeného intervalu aj ďalšie dva, ktorých hodnota kosínusu bola číselne rovnaká, ale s opačným znamienkom. Boli to čísla $x_4 = 168°$ a $x_5 = 192°$, ktorých obrazy na jednotkovej kružnici boli súmerné podľa osi y s obrazmi skutočných koreňov rovnice x_1 a x_2.

Komentár:

Úloha vyžadovala znalosť vlastností funkcie kosínus a zručnosť v určovaní koreňov goniometrickej rovnice pomocou jednotkovej kružnice alebo grafu funkcie. Dvojnásobne nižšiu úspešnosť v porovnaní s ostatnými skupinami žiakov dosiahli žiaci SOŠ, pre ktorých bola úloha veľmi obťažná. Viac ako štvrtina žiakov na úlohu neuviedla odpoveď. Títo žiaci spolu so žiakmi, ktorí uviedli vyššie uvedené chybné odpovede (spolu sú to takmer tri štvrtiny žiakov), si neosvojili schopnosť určovať korene základných goniometrických rovníc. Úloha mala výbornú citlivosť. Veľmi dobre rozlíšila najmä v teste celkove úspešnejšiu polovicu žiakov. Na základe vysokej hodnoty *P. Bis.* môžeme predpokladať, že žiaci, ktorí správne odpovedali na túto úlohu, patrili aj medzi žiakov v teste celkove úspešných.

Príklad **č. 11**

Téma: 2.2 Lineárna a kvadratická funkcia, aritmetická postupnosť

Testované myšlienkové operácie: reprodukcia a jednoduché myšlienkové operácie

Predpokladaná obťažnosť: ľahká úloha

Zadanie:

V divadle je na prízemí 20 radov sedadiel. V prvom rade je 16 sedadiel, v každom nasledujúcom rade je o dve sedadlá viac ako v predchádzajúcom. Určte počet všetkých sedadiel na prízemí divadla.

Riešenie:

(1) Počet sedadiel v jednotlivých radoch na prízemí divadla je konečná aritmetická postupnosť s počtom členov $n = 20$ (dvadsať radov sedadiel na prízemí) a s diferenciou $d = 2$ (v každom rade je o dve sedadlá viac ako v predchádzajúcom). Jej prvým členom je $a_1 = 16$ (počet sedadiel v prvom rade) a posledným dvadsiatym členom $a_{20} = a_1 + (n - 1) \,.\, d = 16 + 19 \,.\, 2 = 54$ (počet sedadiel v poslednom dvadsiatom rade).

(2) Počet všetkých sedadiel na prízemí divadla je súčet všetkých dvadsiatich členov aritmetickej postupnosti $s_{20} = \frac{n}{2} \,.\, (a_1 + a_{20}) = \frac{20}{2} \,.\, (16 + 54) = 700$.

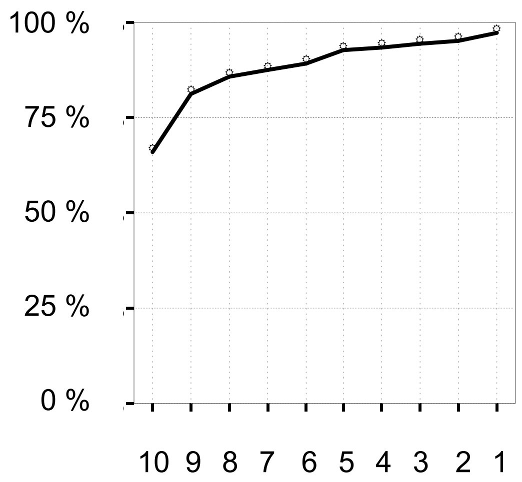
(3) Iný spôsob: Vypíšeme dvadsať čísel, z ktorých prvé bude 16 (počet sedadiel v prvom rade) a každé ďalšie bude o dve väčšie (18, 20, 22, ..., 54). Pomocou kalkulačky ich sčítame a získame súčet 700 sedadiel.

(4) Všetkých sedadiel na prízemí divadla je 700.

Štatistické vyhodnotenie:

úspešnosť	celková	88,5 %
	žiaci GYM	90,5 %
	žiaci SOŠ	84,5 %
	chlapci	88,3 %
	dievčatá	88,7 %
neriešenosť		0,8 %
citlivosť		22,7 %
P. Bis.		22,0

Graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí:



Najčastejšie odpovede a frekvencia ich výskytu:		
odpoveď	frekvencia	predpokladaná príčina uvedenej odpovede
700	88,5 %	správna odpoveď
54	2,3 %	Žiaci nepochopili zadanie, nie úplne rozumeli svojmu výpočtu alebo boli iba nepozorní a ako odpoveď uviedli počet sedadiel v poslednom dvadsiatom rade.
358	0,8 %	Žiaci zrejme pri výpočte urobili nejakú numerickú chybu.
–	0,8 %	neuvedená odpoveď
646	0,7 %	Žiaci počítali správne, ale zle určili počet radov. Nezapočítali 54 sedadiel v poslednom dvadsiatom rade.
Komentár: Úloha vyžadovala znalosť pojmov aritmetickej postupnosti, zručnosť vytvorenia jednoduchého matematického modelu reálnej životnej situácie, prípadne vytrvalosť pri sčítavaní čísel kalkulačkou. Potvrdila sa predpokladaná obťažnosť úlohy. Pre všetky skupiny žiakov bola úloha veľmi až extrémne ľahká. Z toho vyplynula nízka citlivosť, hodnota *P. Bis.* a slabá rozlišovacia schopnosť úlohy.		

Príklad **č. 12**

Téma: 5.1 Kombinatorika a pravdepodobnosť

Testované myšlienkové operácie: zložitejšie myšlienkové operácie

Predpokladaná obťažnosť: stredne ťažká úloha

Zadanie:

Hádžeme dvoma hracími kockami (červenou a bielou). Zistite, aká je pravdepodobnosť, že súčet hodených bodov na oboch kockách bude päť. Výsledok zapíšte ako desatinné číslo z intervalu $\langle 0; 1\rangle$ s presnosťou na dve desatinné miesta.

Riešenie:

(1) Pravdepodobnosť vypočítame ako podiel počtu priaznivých možností (koľkými spôsobmi môžeme na dvoch kockách hodiť súčet päť) a počtu všetkých možností (koľkými spôsobmi môžeme na dvoch kockách hodiť niektoré dve čísla).

(2) Súčet päť môžeme hodiť ako súčet čísel 1 a 4 (dve možnosti) alebo 2 a 3 (2 možnosti). Existujú teda štyri možnosti, ako hodiť súčet päť.

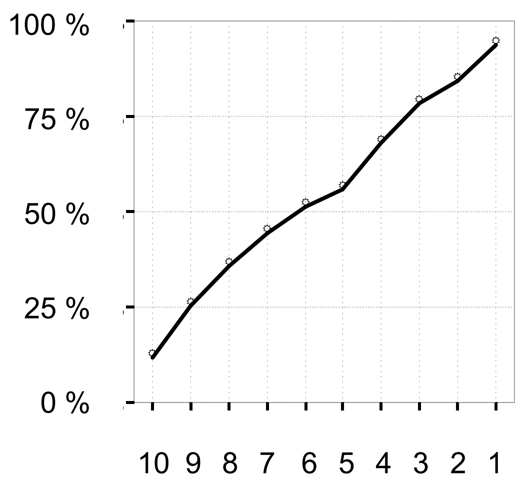
(3) Všetkých možností, ako na dvoch kockách hodiť nejaký súčet, je podľa pravidla súčinu $6 \,.\, 6 = 36$ možností.

(4) Hľadaná pravdepodobnosť je $\frac{4}{36} = \frac{1}{9} = 0{,}11$ po zaokrúhlení podľa pokynov zadania.

Štatistické vyhodnotenie:

úspešnosť	celková	55,1 %
	žiaci GYM	61,1 %
	žiaci SOŠ	43,6 %
	chlapci	58,7 %
	dievčatá	49,1 %
neriešenosť		12,2 %
citlivosť		70,3 %
P. Bis.		43,5

Graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí:



Najčastejšie odpovede a frekvencia ich výskytu:		
odpoveď	frekvencia	predpokladaná príčina uvedenej odpovede
0,11	55,1 %	správna odpoveď
–	12,2 %	neuvedená odpoveď
0,06	3,3 %	Žiaci v (2) pri určovaní počtu možností hodu súčtu päť na dvoch kockách zabudli na niektorú z dvoch možností alebo každú možnosť započítali iba raz, a preto počet priaznivých možností hodu súčtu päť stanovili ako 2 možnosti. Následne vypočítali pravdepodobnosť $\frac{2}{36} = \frac{1}{18} = 0{,}06$ po zaokrúhlení.
0,33	2,5 %	Žiaci v (3) nesprávne použili pravidlo súčinu pri určení počtu všetkých možností v menovateli pravdepodobnosti. Počet všetkých možností, koľkými je možné na dvoch kockách hodiť nejaké dve čísla, určili ako $2 \,.\, 6 = 12$ (dve kocky, na každej šesť možností). Následne vypočítali pravdepodobnosť $\frac{4}{12} = \frac{1}{3} = 0{,}33$ po zaokrúhlení.
0,13	1,4 %	Žiaci v (3) pri výpočte všetkých možností hodu nejakého súčtu dvoma kockami vynechali možnosti, kedy na oboch kockách padne rovnaké číslo. Tých je 6 a teda celkový počet možných hodov v menovateli pravdepodobnosti stanovili na $36 - 6 = 30$. Potom vypočítali pravdepodobnosť $\frac{4}{30} = 0{,}13$ po zaokrúhlení.

Komentár:

Úloha vyžadovala znalosti z oblasti kombinatoriky a pravdepodobnosti, rozvinuté kombinatorické myslenie a prípadne zručnosť pri tvorbe systému na vypisovanie možností. Žiaci riešili úlohu podľa očakávania. Oveľa lepšie ju zvládli žiaci GYM a chlapci. Takmer osmina žiakov na úlohu neuviedla odpoveď. Úloha mala výbornú citlivosť, hodnotu *P. Bis.* a dokonalý graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí.

Príklad **č. 13**

Téma: 4.5 Telesá

Testované myšlienkové operácie: zložitejšie myšlienkové operácie

Predpokladaná obťažnosť: ľahká úloha

Zadanie:

Tri plastelínové gule majú polomery $r_1 = 3$ cm, $r_2 = 4$ cm a $r_3 = 5$ cm. Z týchto troch gulí sa vymodelovala jedna veľká guľa. Vypočítajte v centimetroch polomer vzniknutej gule.

Riešenie:

(1) Vypočítame objem vzniknutej gule ako súčet objemov troch pôvodných gúľ:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = \frac{4}{3} . \pi . 3^3 + \frac{4}{3} . \pi . 4^3 + \frac{4}{3} . \pi . 5^3 = \frac{4}{3} . \pi . \left(3^3 + 4^3 + 5^3\right) = \frac{4}{3} . \pi . 216$$

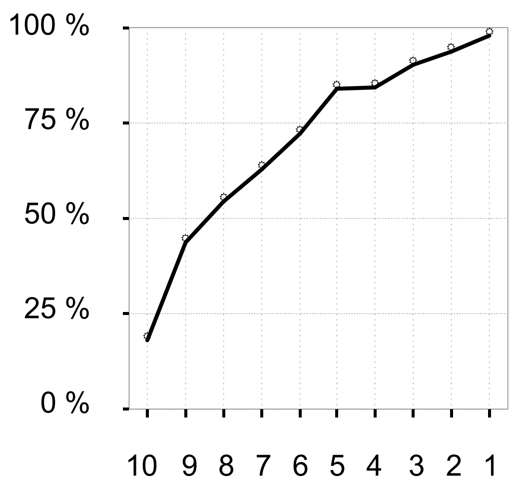
(2) Z objemu vzniknutej gule určíme veľkosť jej polomeru: $\frac{4}{3} . \pi . 216 = \frac{4}{3} . \pi . r^3$, odkiaľ $r^3 = 216$, $r = 6$.

(3) Polomer vzniknutej gule je 6 cm.

Štatistické vyhodnotenie:

úspešnosť	celková	70,4 %
	žiaci GYM	76,8 %
	žiaci SOŠ	58,0 %
	chlapci	72,8 %
	dievčatá	66,4 %
neriešenosť		2,9 %
citlivosť		64,9 %
P. Bis.		45,4

Graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí:



Najčastejšie odpovede a frekvencia ich výskytu:		
odpoveď	frekvencia	predpokladaná príčina uvedenej odpovede
6	70,4 %	správna odpoveď
12	6,0 %	Žiaci iba sčítali polomery troch pôvodných gúľ (3 + 4 + 5 = 12).
7,07	3,5 %	Žiaci objemy gúľ počítali vzťahom, v ktorom chybne použili r^2 namiesto r^3.
–	2,9 %	neuvedená odpoveď
7	2,7 %	Tá istá chyba ako pri výsledku 7,07, ale žiaci svoj výsledok zaokrúhlili na celé číslo, pretože v zadaní sa nepísalo o potrebe zaokrúhliť vypočítaný výsledok a preto si mysleli, že výsledkom má byť číslo bez desatinných miest.

Komentár:

Pri riešení úlohy bolo potrebné objaviť spôsob výpočtu výsledku a nutná zručnosť pri počítaní s výrazmi s vyššími mocninami. Žiaci riešili úlohu podľa očakávania. Oveľa lepšie ju zvládli žiaci GYM a chlapci. Úloha veľmi dobre rozlíšila žiakov, mala vysokú citlivosť, hodnotu *P. Bis.* a takmer ideálny priebeh grafu distribúcie žiackych odpovedí.

Príklad **č. 14**

Téma: 4.4 Lineárne útvary v priestore – metrické úlohy

Testované myšlienkové operácie: zložitejšie myšlienkové operácie

Predpokladaná obťažnosť: stredne ťažká úloha

Zadanie:

Daná je kocka *ABCDEFGH*. Vypočítajte uhol stenovej uhlopriečky *BG* a telesovej uhlopriečky *HB*. Výsledok zapíšte v stupňoch s presnosťou na dve desatinné miesta.

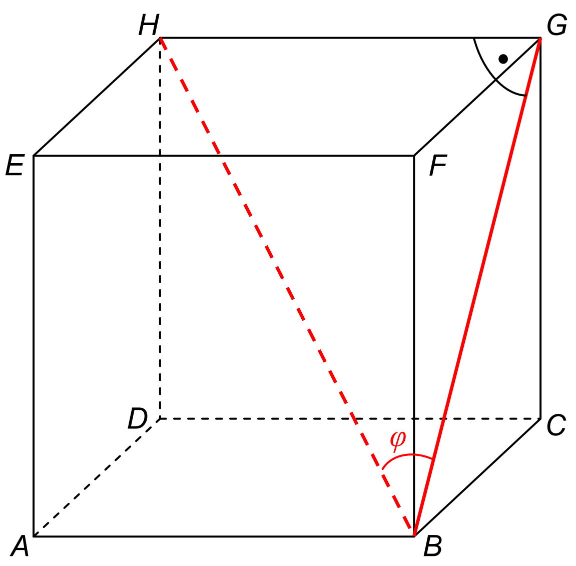
Riešenie:

(1) Veľkosť uhla stenovej uhlopriečky *BG* a telesovej uhlopriečky *HB* vypočítame v pravouhlom trojuholníku *BGH*. Úsečka *GH* je hrana kocky, ktorej dĺžku označíme *a*, úsečka *BG* je uhlopriečka štvorca *BCGF* pravej bočnej steny s dĺžkou $a\,.\sqrt{2}$.

(2) V pravouhlom trojuholníku *BGH* sme určili dĺžky dvoch odvesien, preto veľkosť uhla $HBG = \varphi$ určíme ako

$\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{a}{a\,.\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, odkiaľ $\varphi = 35{,}26°$

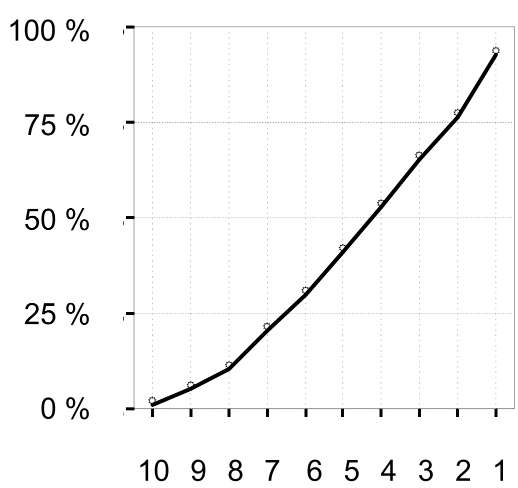
po zaokrúhlení podľa pokynov zadania.



Štatistické vyhodnotenie:

úspešnosť	celková	39,6 %
	žiaci GYM	51,8 %
	žiaci SOŠ	16,4 %
	chlapci	39,6 %
	dievčatá	39,7 %
neriešenosť		23,5 %
citlivosť		81,4 %
P. Bis.		53,3

Graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí:



Najčastejšie odpovede a frekvencia ich výskytu:		
odpoveď	frekvencia	predpokladaná príčina uvedenej odpovede
35,26	39,6 %	správna odpoveď
–	23,5 %	neuvedená odpoveď
45	12,2 %	Žiaci nesprávne identifikovali odvesny a preponu v pravouhlom trojuholníku *BGH* a preto v (2) použili pri výpočte namiesto funkcie tangens funkciu sínus alebo kosínus.
90	1,9 %	Žiaci zrejme bez výpočtu iba z obrázka nesprávne identifikovali typ trojuholníka *BGH* a následne veľkosť hľadaného uhla.
35,15	1,0 %	Žiaci si zrejme pre potreby výpočtu určili konkrétnu dĺžku hrany kocky a pri výpočte nevhodne zaokrúhľovali.

Komentár:

Úloha vyžadovala schopnosť nájsť vhodný pravouhlý trojuholník, v ktorom je možné určiť veľkosť hľadaného uhla a zručnosť pri výpočte pomocou goniometrických funkcií v pravouhlom trojuholníku. Správnu odpoveď uviedli necelé dve pätiny odpovedajúcich žiakov. Takmer štvrtina žiakov na úlohu neuviedla odpoveď. Preukázal sa veľmi veľký rozdiel v priemernej úspešnosti medzi žiakmi GYM a SOŠ. Pre žiakov SOŠ bola úloha veľmi obťažná. Napriek tomu dosiahla úloha najlepšiu citlivosť a hodnotu *P. Bis.* spomedzi všetkých úloh testu. Dokonale rozlíšila všetkých žiakov, čo vidíme aj na grafe distribúcie úspešností žiackych odpovedí.

Príklad **č. 15**

Téma: 3.2 Analytická geometria v rovine

Testované myšlienkové operácie: zložitejšie myšlienkové operácie

Predpokladaná obťažnosť: stredne ťažká úloha

Zadanie:

Dané sú priamky určené rovnicami $2x + 3y - 18 = 0$ a $3x - y - 5 = 0$. Určte vzdialenosť priesečníka daných priamok od začiatku súradnicovej sústavy (bod [0; 0]).

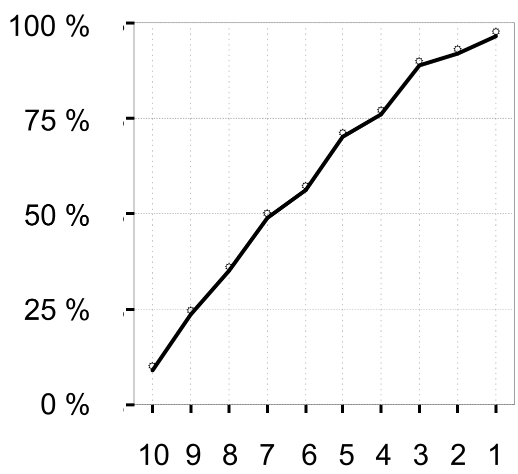
Riešenie:

(1) Súradnice priesečníka priamok $P\,[x; y]$ musia vyhovovať rovniciam oboch priamok, preto ich vypočítame riešením sústavy rovníc uvedených v zadaní. Získame $P\,[x; y] = [3; 4]$.

(2) Vzdialenosť v bodu $P[3; 4]$ od bodu $O[0; 0]$ vypočítame Pytagorovou vetou: $3^2 + 4^2 = v^2$, odkiaľ $v = 5$.

Štatistické vyhodnotenie:		
úspešnosť	celková	59,7 %
	žiaci GYM	70,9 %
	žiaci SOŠ	38,4 %
	chlapci	58,2 %
	dievčatá	62,5 %
neriešenosť		20,4 %
citlivosť		78,1 %
P. Bis.		51,3

Graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí:



<table>
<tr><td colspan="3">Najčastejšie odpovede a frekvencia ich výskytu:</td></tr>
<tr><td>odpoveď</td><td>frekvencia</td><td>predpokladaná príčina uvedenej odpovede</td></tr>
<tr><td>5</td><td>59,7 %</td><td>správna odpoveď</td></tr>
<tr><td>–</td><td>20,4 %</td><td>neuvedená odpoveď</td></tr>
<tr><td>3</td><td>3,0 %</td><td rowspan="2">Žiaci ako vzdialenosť priesečníka priamok P od začiatku súradnicovej sústavy O uviedli vzdialenosť priesečníka priamok od niektorej súradnicovej osi (jedna zo súradníc priesečníka priamok) alebo si približne načrtli polohu priamok v súradnicovom systéme a odhadovali hľadanú vzdialenosť v vzniknutého priesečníka priamok P od bodu O[0; 0].</td></tr>
<tr><td>4</td><td>1,6 %</td></tr>
<tr><td>7</td><td>1,3 %</td><td>Žiaci zrejme iba zo zlého alebo nepresného náčrtu priamok v súradnicovej sústave určili približne hľadanú vzdialenosť.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Komentár:

Úloha vyžadovala znalosť analytickej geometrie, rovnice priamky v rovine, zručnosť pri výpočte súradníc priesečníka priamok riešením sústavy rovníc a pri výpočte pomocou Pytagorovej vety. Preukázal sa veľmi veľký rozdiel v priemernej úspešnosti medzi žiakmi GYM a SOŠ. Pätina žiakov na úlohu neuviedla odpoveď. V skupine žiakov SOŠ sme zaznamenali dvakrát väčšie percento neodpovedajúcich žiakov ako v skupine žiakov GYM (15,0 % žiakov SOŠ a 7,6 % žiakov GYM). Napriek tomu úloha dosiahla výbornú citlivosť a hodnotu P. Bis. Dokonale rozlíšila všetkých žiakov, čo vidíme aj na grafe distribúcie úspešností žiackych odpovedí.</td></tr>
</table>

Príklad **č. 16**

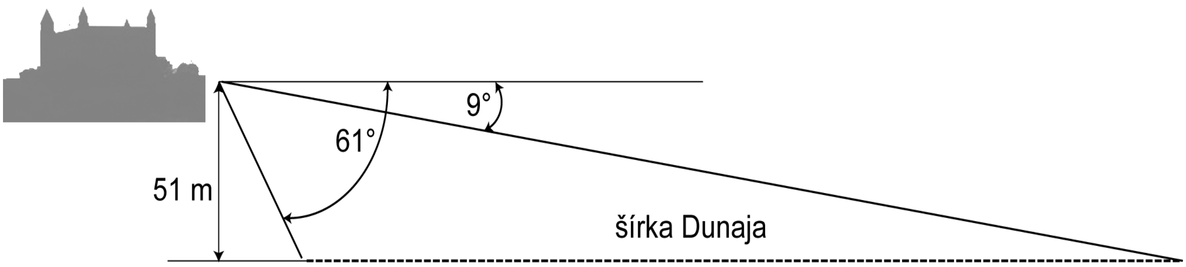
Téma: 3.1 Základné rovinné útvary

Testované myšlienkové operácie: zložitejšie myšlienkové operácie

Predpokladaná obťažnosť: náročná úloha

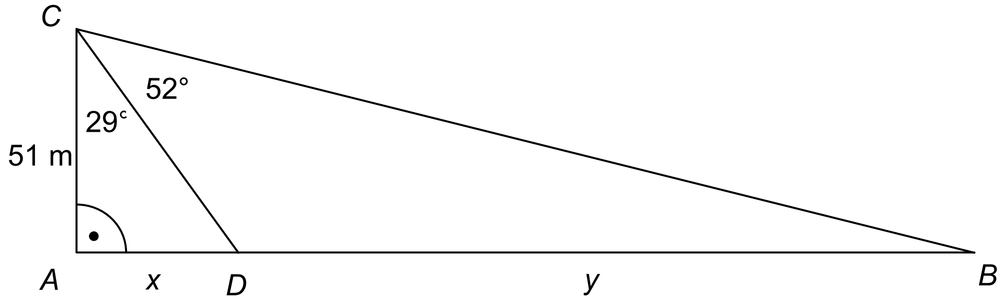
Zadanie:

Študent geodetickej školy meria z Bratislavského hradu šírku Dunaja. Keď zameriava v rovine kolmej na rieku, vidí brehy Dunaja v hĺbkových uhloch 61° a 9° (pozrite obrázok). Výška stanovišťa študenta nad hladinou Dunaja je 51 metrov. Určte šírku Dunaja podľa nameraných hodnôt. Výsledok zapíšte zaokrúhlený na celé metre.



Riešenie:

(1) Údaje z textu zadania a obrázka zaznamenáme v náčrte:



(2) Podľa zadania dopočítame veľkosti uhlov *ACD* a *DCB*. V pravouhlom trojuholníku *ACD* vypočítame dĺžku $|AD| = x$ pomocou $\text{tg } 29° = \frac{x}{51}$, odkiaľ $x = 28{,}27$ m po zaokrúhlení.

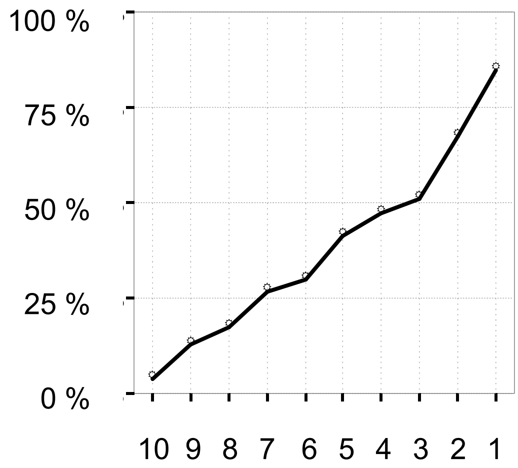
(3) V pravouhlom trojuholníku *ABC* vypočítame dĺžku $|AB| = x + y$ pomocou goniometrickej funkcie tangens: $\text{tg } 81° = \frac{x+y}{51}$, odkiaľ $x + y = 322{,}00$ m.

(4) Šírku Dunaja *y* vypočítame ako rozdiel $|AB| - |AD| = 322{,}00 - 28{,}27 = 293{,}73$ m.

(5) Šírka Dunaja podľa zadaných hodnôt a zaokrúhlená podľa pokynov zadania je 294 m.

Štatistické vyhodnotenie:		
úspešnosť	celková	38,4 %
	žiaci GYM	44,1 %
	žiaci SOŠ	27,3 %
	chlapci	40,9 %
	dievčatá	34,2 %
neriešenosť		16,9 %
citlivosť		67,7 %
P. Bis.		41,3

Graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí:



Najčastejšie odpovede a frekvencia ich výskytu:

odpoveď	frekvencia	predpokladaná príčina uvedenej odpovede
294	38,4 %	správna odpoveď
–	16,9 %	neuvedená odpoveď
322	6,9 %	Žiaci uviedli ako výsledok úlohy dĺžku úsečky *AB*, ktorú zrejme považovali za šírku Dunaja. Zadanie úlohy a čiary v obrázku (ramená hĺbkových uhlov) však šírku Dunaja jasne vymedzujú.
303	2,3 %	Žiaci si na obrázku nevšimli, že uhly 61° a 9° sa prekrývajú. Preto v (2) nesprávne určili veľkosť uhla *ACD* (priradili mu o 9° menšiu hodnotu). Všetky ostatné výpočty vykonali správne.
297,73	1,6 %	Žiaci v (3) použili nesprávny výpočet $\cos 81° = \frac{51}{x+y}$ a vypočítali $x + y = 326{,}00$ m. Ostatné výpočty vykonali správne.
65	1,4 %	Žiaci považovali trojuholník *DCB* za pravouhlý s odvesnou $\lvert DC\rvert = 51$ a vypočítali $\operatorname{tg} 52° = \frac{y}{51}$, odkiaľ $y = 65{,}27$ m.

Komentár:

Úloha vyžadovala znalosť definície goniometrických funkcií v pravouhlom trojuholníku a zručnosť pri riešení trigonometrických úloh. Úspešnejší pri riešení úlohy boli žiaci GYM a chlapci. Šestina žiakov na úlohu neuviedla odpoveď. Z grafu distribúcie úspešností žiackych odpovedí vidíme, že úloha veľmi dobre rozlíšila žiakov.

Príklad **č. 17**

Téma: 2.4 Logaritmické a exponenciálne funkcie, geometrická postupnosť

Testované myšlienkové operácie: zložitejšie myšlienkové operácie

Predpokladaná obťažnosť: stredne ťažká úloha

Zadanie:

V geometrickej postupnosti je druhý člen $a_2 = 6$ a piaty člen $a_5 = 162$. Určte súčet prvých piatich členov tejto postupnosti.

Riešenie:

(1) Na výpočet súčtu prvých piatich členov geometrickej postupnosti potrebujeme vypočítať hodnotu prvého člena a_1 a kvocientu q.

(2) Kvocient q geometrickej postupnosti vypočítame pomocou vzťahu medzi členmi uvedenými v zadaní: $a_5 = a_2 \,.\, q^3$, odkiaľ $q^3 = \frac{a_5}{a_2} = \frac{162}{6} = 27$, $q = 3$.

(2) Vypočítame hodnotu prvého člena $a_1 = \frac{a_2}{q} = \frac{6}{3} = 2$.

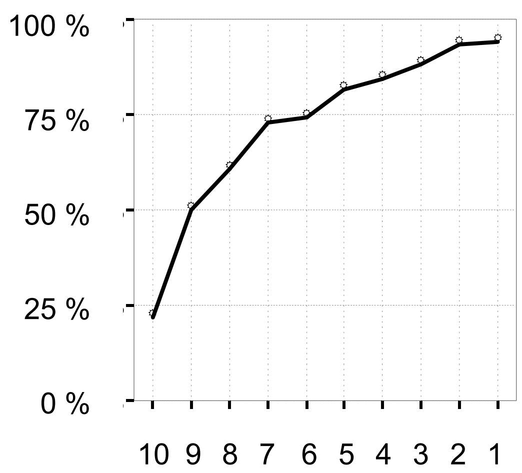
(3) Dopočítame súčet prvých piatich členov postupnosti $s_5 = a_1 . \frac{q^n - 1}{q-1} = 2 \,.\, \frac{3^5 - 1}{3-1} = 242$.

(4) Súčet prvých piatich členov postupnosti je 242.

Štatistické vyhodnotenie:

úspešnosť	celková	72,4 %
	žiaci GYM	80,4 %
	žiaci SOŠ	56,7 %
	chlapci	71,6 %
	dievčatá	73,5 %
neriešenosť		10,1 %
citlivosť		57,8 %
P. Bis.		39,6

Graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí:



Najčastejšie odpovede a frekvencia ich výskytu:		
odpoveď	frekvencia	predpokladaná príčina uvedenej odpovede
242	72,4 %	správna odpoveď
–	10,1 %	neuvedená odpoveď
290	6,7 %	Žiaci zamenili geometrickú postupnosť za aritmetickú. Všetky výpočty vykonali správne, ale namiesto vzťahov pre geometrickú postupnosť počítali so vzťahmi pre aritmetickú postupnosť.
243	1,3 %	Chyba z nepozornosti. Žiaci postupovali správne, ale v (3) pri výpočte hodnoty čitateľa zlomku po náročnejšom výpočte hodnoty 3^5 najpravdepodobnejšie na kalkulačke zabudli odčítať číslo 1.
121	0,5 %	Chyba z nepozornosti. Žiaci počítali správne, ale v (3) pri výpočte súčtu členov postupnosti zabudli vo vzťahu na číslo a_1 pred zlomkom.
Komentár: Úloha vyžadovala znalosť geometrickej postupnosti, vzťahov medzi jej členmi a zručnosť pri počítaní s výrazmi obsahujúcimi zlomky a mocniny. Z výsledkov vidíme, že väčšina žiakov príklad počítala správne, ale niektorí z nich neboli úplne sústredení a dopustili sa chýb z nepozornosti. Desatina žiakov na úlohu neuviedla odpoveď. V skupine žiakov SOŠ sme zaznamenali 2,5 – krát väčšie percento neodpovedajúcich žiakov ako v skupine žiakov GYM (8,4 % žiakov SOŠ a 3,2 % žiakov GYM). Úloha mala dobrú citlivosť a hodnotu *P. Bis.*, dobre rozlíšila najmä v teste celkove menej úspešnú polovicu žiakov.		

Príklad **č. 18**

Téma: 4.5 Telesá

Testované myšlienkové operácie: zložitejšie myšlienkové operácie

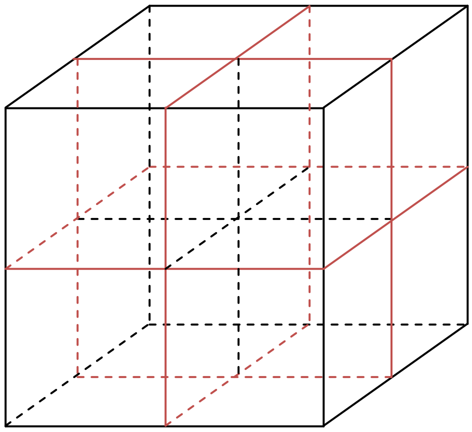
Predpokladaná obťažnosť: stredne ťažká úloha

Zadanie:

Kocku rozrežeme tromi rôznymi rovinami na menšie kocky. Každá rovina prechádza stredom kocky a je rovnobežná s niektorou dvojicou rovnobežných stien kocky. Určte pomer súčtu povrchov všetkých vzniknutých malých kociek a povrchu pôvodnej kocky.

Riešenie:

(1) Po rozrezaní vznikne 8 nových kociek. V každom smere kocky vznikne jedna nová stena, ktorá je spoločná pre dve susedné kocky. V každom smere vznikol dvojnásobný počet kociek (z 1 kocky 2 . 2 . 2 = 8 kociek) a teda dvojnásobný povrch. Preto pomer súčtu povrchov vzniknutých malých kociek je dvojnásobný ako povrch pôvodnej kocky.

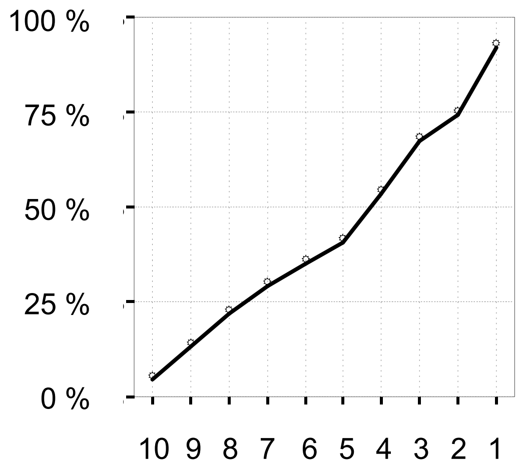


(2) Úlohu môžeme riešiť aj výpočtom:
Ak dĺžku hrany malej kocky označíme *a*, dĺžka hrany veľkej pôvodnej kocky bude 2*a*. Súčet povrchov ôsmich nových malých kociek je $8 . 6 . x^2 = 48x^2$, povrch pôvodnej veľkej kocky $6 . (2x)^2 = 6 . 4x^2 = 24x^2$. Pomer povrchov je $48x^2 : 24x^2 = 2$.

Štatistické vyhodnotenie:

úspešnosť	celková	43,3 %
	žiaci GYM	50,0 %
	žiaci SOŠ	30,6 %
	chlapci	47,0 %
	dievčatá	37,3 %
neriešenosť		23,2 %
citlivosť		74,2 %
P. Bis.		46,1

Graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí:



Najčastejšie odpovede a frekvencia ich výskytu:		
odpoveď	frekvencia	predpokladaná príčina uvedenej odpovede
2	43,3 %	správna odpoveď
–	23,2 %	neuvedená odpoveď
0,5	6,9 %	Žiaci zrejme počítali alebo uvažovali správne, ale zamenili poradie členov pomeru a zapísali prevrátený pomer.
1	3,6 %	Žiaci asi úlohu riešili iba úvahou a usúdili, že rozrezaním kocky na menšie kocky sa povrch nezmení. Pravdepodobne si pomýlili povrch s objemom.
4	3,2 %	Žiaci zrejme urobili myšlienkovú chybu pri riešení úlohy úvahou alebo pri riešení úlohy výpočtom postupovali správne, ale chybne umocnili $(2x)^2$ na $2x^2$.
0,25	2,6 %	Žiaci zrejme riešili úlohu výpočtom. Chybne však umocnili výraz $(2x)^2$ na $2x^2$ a zároveň následne vyjadrili prevrátený pomer.

Komentár:

Riešenie úlohy vyžadovalo správne pochopenie obsahu viet v zadaní a znalosť polohových a metrických vzťahov v kocke. Prejavil sa veľký rozdiel v priemernej úspešnosti žiakov GYM a SOŠ v prospech žiakov GYM. Pri tejto úlohe sme zaznamenali najväčší rozdiel v priemernej úspešnosti riešenia podľa pohlavia zo všetkých úloh testu. Chlapci riešili úlohu s priemernou úspešnosťou o 10 % vyššou ako dievčatá. Takmer štvrtina žiakov na úlohu neuviedla odpoveď, žiaci zrejme nepochopili zadanie úlohy. Úloha dosiahla výbornú citlivosť a vysokú hodnotu korelačného koeficientu *P. Bis.* (správnu odpoveď uvádzali takmer výlučne žiaci v teste celkove úspešní). Úloha výborne rozlíšila žiakov, čo vidíme aj na ideálnom grafe distribúcie úspešností žiackych odpovedí.

Príklad **č. 19**

Téma: 3.1 Základné rovinné útvary

Testované myšlienkové operácie: zložitejšie myšlienkové operácie

Predpokladaná obťažnosť: náročná úloha

Zadanie:

Konvexný mnohouholník má 35 uhlopriečok. Určte počet strán tohto mnohouholníka.

Riešenie:

(1) Každý z v vrcholov konvexného mnohouholníka môžeme spojiť úsečkou so zvyšnými $v - 1$ vrcholmi. Dve z týchto úsečiek však nie sú uhlopriečky, ale strany mnohouholníka, preto z každého z v vrcholov vychádza $v - 1 - 2 = v - 3$ uhlopriečok. Celkove by teda malo byť v konvexnom v-uholníku $v\,.\,(v - 3)$ uhlopriečok. Každá uhlopriečka však má dva koncové body a preto je v predchádzajúcom celkovom počte uhlopriečok každá uhlopriečka započítaná dvakrát. Skutočný počet uhlopriečok v konvexnom v-uholníku je teda $\frac{v\,.\,(v-3)}{2}$.

(2) Výraz v (1) sa podľa zadania má rovnať počtu 35 uhlopriečok.

$$\frac{v\,.\,(v-3)}{2} = 35 \rightarrow v^2 - 3v - 70 = 0 \rightarrow (v - 10)\,.\,(v + 7) = 0 \rightarrow v_1 = 10,\ v_2 = -7.$$

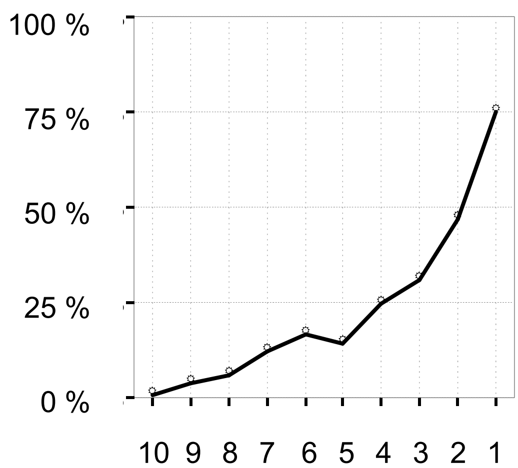
Keďže premenná v vyjadruje počet vrcholov, hľadaná hodnota musí byť kladná. Riešením úlohy je preto len číslo 10.

(3) Mnohouholník v zadaní má desať strán.

Štatistické vyhodnotenie:

úspešnosť	celková	23,2 %
	žiaci GYM	29,6 %
	žiaci SOŠ	11,0 %
	chlapci	24,9 %
	dievčatá	20,6 %
neriešenosť		9,0 %
citlivosť		58,5 %
P. Bis.		40,9

Graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí:



<table>
<tr><td colspan="3">Najčastejšie odpovede a frekvencia ich výskytu:</td></tr>
<tr><td>odpoveď</td><td>frekvencia</td><td>predpokladaná príčina uvedenej odpovede</td></tr>
<tr><td>70</td><td>40,2 %</td><td>Žiaci vynásobili počet uhlopriečok uvedený v zadaní úlohy číslom 2. Zrejme uvažovali, že každá uhlopriečka spája dva vrcholy mnohouholníka, preto je počet vrcholov dvojnásobný ako počet uhlopriečok. Zároveň si však neuvedomili, že z jednotlivých vrcholov vychádzajú aj iné uhlopriečky k ostatným vrcholom.</td></tr>
<tr><td>10</td><td>23,2 %</td><td>správna odpoveď</td></tr>
<tr><td>–</td><td>9,0 %</td><td>neuvedená odpoveď</td></tr>
<tr><td>35</td><td>3,2 %</td><td>Úvaha podobná ako pri výsledku 70. Táto skupina žiakov si však myslela, že vo svojej úvahe započítava každú uhlopriečku dvakrát a preto svoj počet predelila dvomi a získala rovnaký počet vrcholov ako počet uhlopriečok. Ak by si boli žiaci nakreslili nejaký konkrétny mnohouholník, zistili by jednoduchým spočítaním chybu vo svojej úvahe a výsledku (napríklad štvoruholník má len dve uhlopriečky).</td></tr>
<tr><td>9</td><td>2,5 %</td><td rowspan="2">Žiaci zrejme postupovali správne, ale urobili nejakú numerickú chybu v (2) pri výpočte koreňov kvadratickej rovnice.</td></tr>
<tr><td>7</td><td>2,3 %</td></tr>
<tr><td colspan="3">Komentár:
Úloha vyžadovala znalosť základných poznatkov z planimetrie a zručnosť pri výpočte koreňov kvadratickej rovnice, prípadne schopnosť pokusne nájsť riešenie úlohy. Žiaci dosiahnutou priemernou úspešnosťou potvrdili predpoklad náročnej úlohy vyžadujúcej zložité myšlienkové operácie. Pre žiakov SOŠ bola úloha takmer extrémne obťažná. Dve pätiny žiakov uviedli odpoveď, v ktorej má mnohouholník viac vrcholov ako uhlopriečok, čo je s výnimkou trojuholníka a štvoruholníka geometrický nezmysel. Ak by si nakreslili nejaký pomocný obrázok počas riešenia úlohy, zrejme by si to boli uvedomili. Úloha najlepšie rozlíšila prvé dve skupiny žiakov výkonnostného spektra.</td></tr>
</table>

Príklad **č. 20**

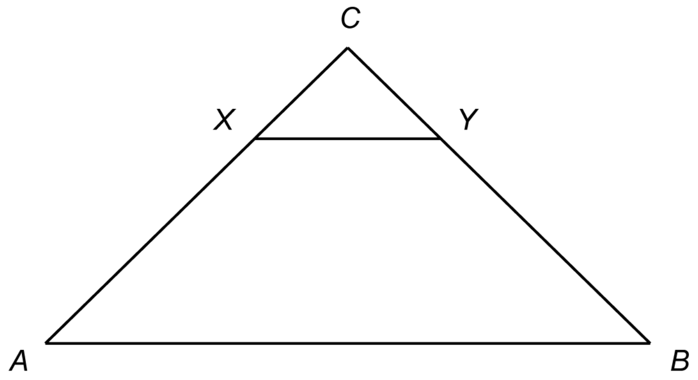
Téma: 3.4 Zhodné a podobné zobrazenia

Testované myšlienkové operácie: zložitejšie myšlienkové operácie

Predpokladaná obťažnosť: náročná úloha

Zadanie:

V rovnoramennom trojuholníku *ABC* je úsečka *XY* rovnobežná so základňou trojuholníka. Úsečka *XY* rozdelí trojuholník *ABC* na menší trojuholník a lichobežník (pozrite obrázok). Obsah menšieho trojuholníka a obsah lichobežníka sú v pomere 1 : 8. Určte dĺžku úsečky *XY*, ak $|AB| = 9$ a $|AC| = |BC| = 6$.



Riešenie:

(1) Trojuholníky *XYC* a *ABC* sú podobné. Koeficient podobnosti označíme *k*. Z pomeru obsahov uvedeného v zadaní zisťujeme, že trojuholník *ABC* má deväťkrát väčší obsah ako trojuholník *XYC*. Zapíšeme obsahy oboch trojuholníkov pomocou koeficientu podobnosti *k*, vyjadríme pomer obsahov a z neho vypočítame hodnotu koeficientu podobnosti *k*.

(2) V trojuholníku *ABC* označíme stranu $|AB| = c$, výšku na túto stranu *v*. Potom v podobnom trojuholníku *XYC* je strana $|XY| = kc$, výška na túto stranu *kv*. Obsah trojuholníka *ABC* je $S_1 = \frac{c\,.\,v}{2}$, obsah trojuholníka *XYC* je $S_2 = \frac{kc\,.\,kv}{2} = k^2.\ \frac{c\,.\,v}{2}$.

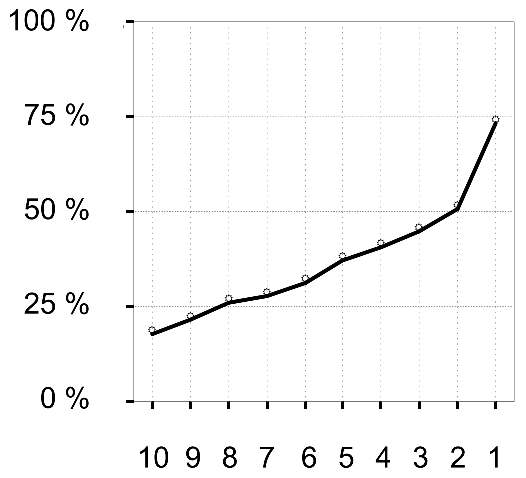
(3) Z pomeru obsahov trojuholníkov vypočítame koeficient podobnosti trojuholníkov *k*: $\frac{S_1}{S_2} = \frac{9}{1} \rightarrow \frac{\frac{c\,.\,v}{2}}{k^2.\ \frac{c\,.\,v}{2}} = \frac{9}{1} \rightarrow \frac{1}{k^2} = \frac{9}{1} \rightarrow k = \pm\frac{1}{3}$. Použijeme len kladnú hodnotu (koeficient dĺžky).

(4) Dopočítame hľadanú dĺžku úsečky *XY* podľa (2): $|XY| = kc = \frac{1}{3}\ .\ 9 = 3$, ak $|AB| = c = 9$.

(5) Správna odpoveď je 3.

Štatistické vyhodnotenie:		
úspešnosť	celková	37,3 %
	žiaci GYM	39,9 %
	žiaci SOŠ	32,2 %
	chlapci	37,2 %
	dievčatá	37,5 %
neriešenosť		28,5 %
citlivosť		42,4 %
P. Bis.		23,8

Graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí:



Najčastejšie odpovede a frekvencia ich výskytu:

odpoveď	frekvencia	predpokladaná príčina uvedenej odpovede
3	37,3 %	správna odpoveď
–	28,5 %	neuvedená odpoveď
2	7,7 %	V zadaní úlohy nebola informácia o zaokrúhlení vypočítaného výsledku, preto sa žiaci zrejme domnievali, že výsledok je prirodzené číslo. V týchto odpovediach sa vyskytujú najpravdepodobnejšie dĺžky úsečky *XY* vyjadrené prirodzeným číslom zodpovedajúce obrázku a zadaniu.
1	6,2 %	
4	2,7 %	

Komentár:

Úloha vyžadovala znalosť polohových a metrických vzťahov v trojuholníku, podobnosti trojuholníkov a zručnosť pri počítaní s lomenými výrazmi s parametrami. Úlohu riešili všetky skupiny žiakov s približne rovnakou úspešnosťou. Pri tejto úlohe sme zaznamenali najvyššie percento neriešenosti. Veľa žiakov zrejme nevedelo, akým postupom sa dopracovať k výsledku alebo nezvládlo úpravy výrazov pri riešení úlohy. Úloha málo rozlišovala žiakov, odlíšila iba najúspešnejšiu skupinu žiakov.

Príklad **č. 21**

Téma: 1.3 Teória čísel

Testované myšlienkové operácie: zložitejšie myšlienkové operácie

Predpokladaná obťažnosť: ľahká úloha

Zadanie:

Koľko je všetkých trojciferných prirodzených čísel deliteľných piatimi, ktorých ciferný súčet je štyri?

Riešenie:

(1) Číslo je deliteľné piatimi, ak je zakončené číslicou 0 alebo 5. Ak má mať hľadané trojciferné číslo súčet cifier štyri a zároveň byť deliteľné piatimi, môže byť zakončené iba číslicou 0, lebo číslica 5 má hodnotu väčšiu ako celý ciferný súčet trojciferného čísla.

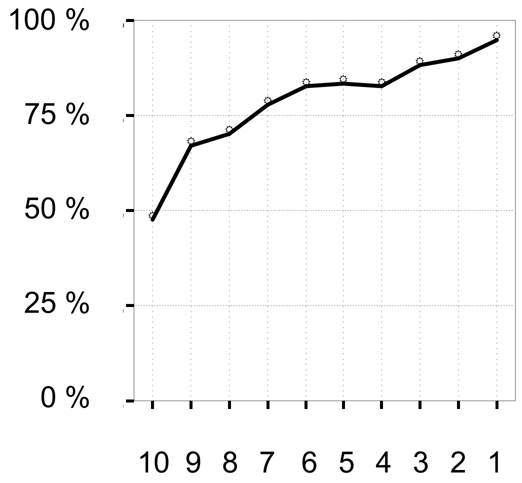
(2) Hľadané čísla budú mať na pozícii jednotiek číslicu 0. Na pozície desiatok a stoviek budeme umiestňovať dve číslice, ktorých súčet bude štyri. Môžeme použiť aj dve rovnaké číslice. Postupne získame čísla 400, 310, 130, 220.

(3) Našli sme štyri čísla vyhovujúce podmienkam zadania. Správna odpoveď je (B) 4.

Štatistické vyhodnotenie:

úspešnosť	celková	78,5 %
	žiaci GYM	81,8 %
	žiaci SOŠ	72,3 %
	chlapci	79,8 %
	dievčatá	76,4 %
neriešenosť		0,2 %
citlivosť		35,0 %
P. Bis.		25,2

Graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí:



Odpovede a frekvencia ich výskytu:			
odpoveď	frekvencia	*P. Bis.*	predpokladaná príčina uvedenej odpovede
(B) 4	78,5 %	25	správna odpoveď
(C) 3	11,4 %	– 11	Žiaci zabudli na niektoré číslo, možno vynechali 220, v ktorom sa opakuje číslica 2, ale zadanie úlohy to neobmedzuje.
(A) 5	5,2 %	– 12	Žiaci zrejme započítali aj číslo 040, ktoré je dvojciferné, čo si pri dopĺňaní dvoch cifier so súčtom štyri na pozície desiatok a stoviek asi neuvedomili.
(D) 2	2,6 %	– 11	Žiaci nenašli všetky čísla. Možno zabudli na niektoré dvojice číslic so súčtom štyri alebo vylúčili čísla s opakujúcimi sa číslicami a s nulou alebo si túto možnosť vybrali iba náhodne.
(E) 1	2,1 %	– 12	Žiaci našli iba jedno číslo alebo iba náhodne vybrali túto možnosť.
–	0,2 %	– 12	neuvedená odpoveď

Komentár:

Úloha vyžadovala znalosti z oblasti teórie čísel. Pri riešení úlohy nebolo potrebné použiť zložité matematické postupy, stačilo si premyslieť vhodnú stratégiu a systematicky vypísať vhodné čísla. Úlohu riešili všetky skupiny žiakov s približne rovnakou a vysokou úspešnosťou. Preto úloha slabšie rozlíšila žiakov, najlepšie oddelila najslabšiu desatinu žiakov výkonnostného spektra. Z hodnôt *P. Bis*. vidíme, že v teste celkove úspešnejší žiaci a časť žiakov menej úspešných si volili správnu odpoveď (B), žiaci celkove menej úspešní si v rovnakej miere volili niektorý z distraktorov.

Príklad **č. 22**

Téma: 3.1 Základné rovinné útvary

Testované myšlienkové operácie: zložitejšie myšlienkové operácie

Predpokladaná obťažnosť: stredne ťažká úloha

Zadanie:

Pomer dĺžok strán obdĺžnika *ABCD* je $\sqrt{3} : 1$. Určte veľkosť menšieho z uhlov uhlopriečok obdĺžnika *ABCD*.

Riešenie:

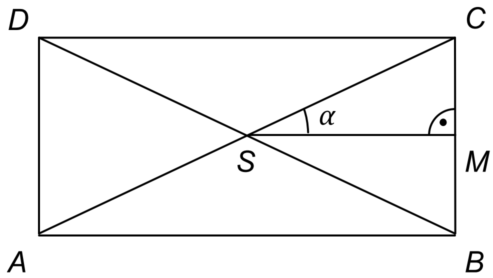
(1) Podľa zadania úlohy máme vypočítať veľkosť uhla *CSB*, kde *S* je priesečník uhlopriečok obdĺžnika. Najprv vypočítame veľkosť uhla *CSM* (je polovicou uhla *CSB*, *M* je stred *BC*) v pravouhlom trojuholníku *CSM*. Z obrázka $|CM| = \frac{|BC|}{2} = \frac{1}{2}$, $|SM| = \frac{|AB|}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

(2) $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{|CM|}{|SM|} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\alpha = 30°$

(3) Hľadaný uhol $\varphi = 2\alpha = 60°$.

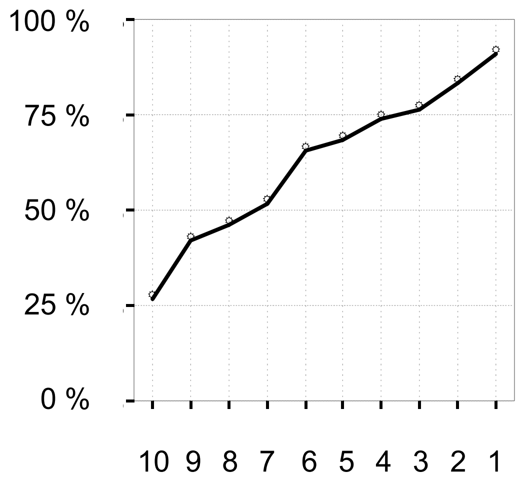
(4) Správna odpoveď je (A) 60°.



Štatistické vyhodnotenie:

úspešnosť	celková	62,6 %
	žiaci GYM	72,0 %
	žiaci SOŠ	44,7 %
	chlapci	62,0 %
	dievčatá	63,9 %
neriešenosť		0,7 %
citlivosť		52,8 %
P. Bis.		31,8

Graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí:



Odpovede a frekvencia ich výskytu:			
odpoveď	frekvencia	*P. Bis.*	predpokladaná príčina uvedenej odpovede
(A) 60°	62,7 %	32	správna odpoveď
(E) 30°	25,2 %	– 19	Žiaci zrejme správne vypočítali veľkosť pomocného uhla α, ale neuvedomili si, že to ešte nie je hľadaný uhol.
(D) 70°	8,1 %	– 15	Žiaci použili pri výpočte veľkosti uhla *CSM* namiesto funkcie tangens funkciu sínus.
(B) 120°	2,3 %	– 7	Žiaci pri výpočte veľkosti uhla *CSM* pomocou funkcie tangens zamenili správny pomer dĺžky protiľahlej odvesny k priľahlej za prevrátený pomer alebo vypočítali veľkosť väčšieho z uhlov uhlopriečok obdĺžnika (uhol *ASB*). V zadaní bola uvedená presná formulácia (určte veľkosť menšieho z uhlov), ktorá mala žiakom pomôcť a určiť im, ktorý uhol majú vypočítať. Z odborného hľadiska to ani nebolo potrebné, pretože uhol dvoch priamok už je definovaný ako menší z uhlov, ktoré priamky zvierajú.
(C) 130°	0,9 %	– 8	Žiaci túto možnosť asi iba tipovali.
–	0,8 %	– 12	neuvedená odpoveď

Komentár:

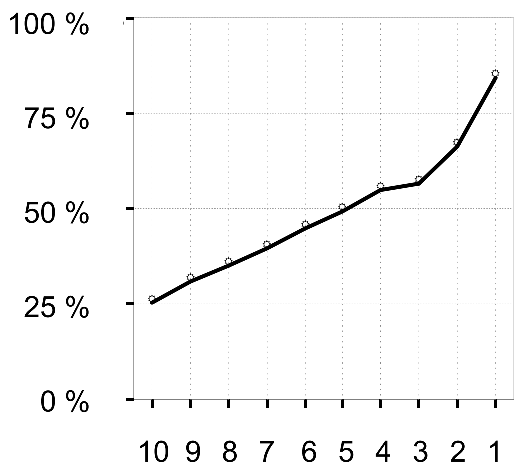
Úloha vyžadovala schopnosť riešiť jednoduché úlohy z trigonometrie v rovine, nájsť pravouhlý trojuholník, v ktorom sa dá uskutočniť výpočet a zručnosť pri práci s výrazmi s goniometrickými funkciami. Žiaci SOŠ riešili úlohu s oveľa nižšou úspešnosťou ako žiaci GYM. Úloha dobre rozlíšila výkonnostné skupiny žiakov. Správnu odpoveď (A) si podľa hodnoty *P. Bis.* volili v teste celkove úspešnejší žiaci, najfrekventovanejšie chybné odpovede (E) a (D) žiaci v teste celkove menej úspešní. Z frekvencie voľby odpovedí vidíme, že väčšina žiakov objavila správny postup riešenia úlohy, ale pri riešení úlohy bola nepozorná a nedôsledná (vypočítali iba veľkosť pomocného uhla, zamenili alebo zle identifikovali goniometrickú funkciu).

Príklad **č. 23**
Téma: 1.1 Logika a množiny
Testované myšlienkové operácie: zložitejšie myšlienkové operácie
Predpokladaná obťažnosť: stredne ťažká úloha
Zadanie: Dané sú množiny $A = \{x \in Z; x^2 > 17\}$ a $B = \{-16; -5; -3; 0; 8; 18\}$. Koľko prvkov má množina $B - A$?
Riešenie: (1) Najprv určíme prvky množiny A. Sú to všetky celé čísla, ktorých druhá mocnina je väčšia ako 17. Najmenšie prirodzené číslo vyhovujúce tejto podmienke je číslo 5 ($5^2 = 25 > 17$) a symetricky najväčšie záporné celé číslo vyhovujúce podmienke je -5. Množinu A by sme teda „amatérsky“ mohli zapísať nasledovne $A = \{\ldots, -7; -6; -5; 5; 6; 7, \ldots\}$. (2) Do rozdielu množín $B - A$ patria tie prvky množiny B, ktoré v nej zostanú, keď z nej odoberieme prvky množiny A. Z množiny B odoberieme prvky -16, -5, 8 a 18 (ich druhá mocnina je väčšia ako 17 a teda sú prvkami množiny A). (3) V množine $B - A$ zostali dva prvky -3 a 0. (4) Správna odpoveď je (C) 2.

Štatistické vyhodnotenie:

úspešnosť	celková	49,0 %
	žiaci GYM	54,0 %
	žiaci SOŠ	39,1 %
	chlapci	48,7 %
	dievčatá	49,2 %
neriešenosť		0,4 %
citlivosť		47,2 %
P. Bis.		24,9

Graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí:



Odpovede a frekvencia ich výskytu:			
odpoveď	frekvencia	*P. Bis.*	predpokladaná príčina uvedenej odpovede
(C) 2	48,9 %	25	správna odpoveď
(E) 4	33,4 %	– 1	Žiaci pri určovaní prvkov množiny *A* zabudli na záporné celé čísla, následne pri určovaní rozdielu množín odobrali z množiny *B* iba čísla 8 a 18. Ďalšia možnosť pre voľbu tejto odpovede je zámena operácie rozdiel množín za prienik množín. Správne určené množiny *A* a *B* majú 4 spoločné prvky.
(D) 3	6,6 %	– 14	Tieto distraktory boli určené pre náhodne tipujúcich žiakov. Mohli si ich vybrať aj žiaci, ktorí pri určovaní množiny *A* alebo rozdielu množín *B* – *A* urobili nejakú chybu.
(B) 1	6,2 %	– 18	
(A) 0	4,4 %	– 16	
–	0,5 %	– 12	neuvedená odpoveď

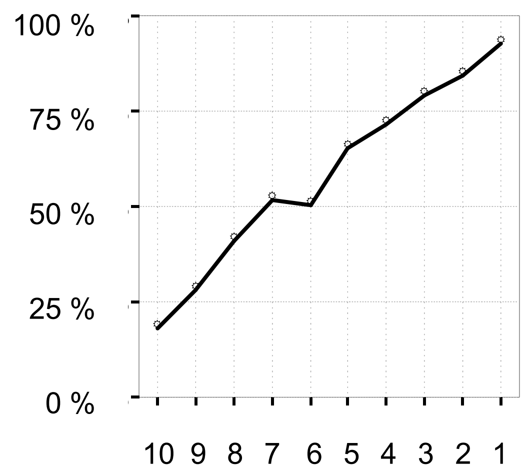
Komentár:

Riešenie úlohy vyžadovalo znalosti o číselných množinách a operácií s množinami. Všetky skupiny žiakov ju riešili priemerne. Úloha výraznejšie odlíšila prvé dve skupiny žiakov v teste celkove úspešnejších. Takmer polovica žiakov si volila správnu odpoveď (C). Najfrekventovanejší distraktor (E) si zvolila aj menšia skupina žiakov v teste celkovo úspešných (hodnota *P. Bis* blízka nule). Ostatné distraktory si volili žiaci v teste celkove menej úspešní.

Príklad **č. 24**
Téma: 5.1 Kombinatorika a pravdepodobnosť
Testované myšlienkové operácie: reprodukcia a jednoduché myšlienkové operácie
Predpokladaná obťažnosť: stredne ťažká úloha
Zadanie: V triede je 11 chlapcov a 14 dievčat. Zo žiakov triedy sa náhodne vyberú dvaja žiaci na testovanie. Aká je pravdepodobnosť, že vybraní žiaci budú rovnakého pohlavia?
Riešenie: (1) Pravdepodobnosť vypočítame ako podiel súčtu všetkých možných dvojíc vytvorených z 2 chlapcov a z 2 dievčat a počtu všetkých možných dvojíc vytvorených z 25 žiakov triedy. (2) Z 11 chlapcov triedy môžeme 2 chlapcov, bez ohľadu na poradie, vybrať $\binom{11}{2}$ spôsobmi, podobne 2 dievčatá zo 14 dievčat triedy môžeme bez ohľadu na poradie, v akom sme dievčatá do dvojice vybrali, určiť $\binom{14}{2}$ spôsobmi. (3) Ľubovoľných 2 žiakov triedy zo všetkých 25 žiakov triedy vyberieme $\binom{25}{2}$ spôsobmi. $\binom{11}{2} = \frac{11!}{9!\,.\,2!} = \frac{11\,.\,10}{2} = 55$, $\binom{14}{2} = \frac{14!}{12!\,.\,2!} = \frac{14\,.\,13}{2} = 91$, $\binom{25}{2} = \frac{25!}{23!\,.\,2!} = \frac{25\,.\,24}{2} = 300$. (4) Hľadaná pravdepodobnosť podľa (1) je $P = \frac{55+91}{300} = \frac{146}{300} = \frac{73}{150}$. (5) Správna odpoveď je (A) $\frac{73}{150}$.

Štatistické vyhodnotenie:		
úspešnosť	celková	58,2 %
	žiaci GYM	66,9 %
	žiaci SOŠ	42,0 %
	chlapci	57,0 %
	dievčatá	60,7 %
neriešenosť		1,2 %
citlivosť		65,5 %
P. Bis.		40,1

Graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí:



Odpovede a frekvencia ich výskytu:			
odpoveď	frekvencia	*P. Bis.*	predpokladaná príčina uvedenej odpovede
(A) $\frac{73}{150}$	57,7 %	40	správna odpoveď
(B) $\frac{77}{150}$	25,3 %	– 13	Žiaci nesprávne určili hodnotu čitateľa pravdepodobnosti ako súčin 11 . 14.
(C) $\frac{91}{300}$	11,6 %	– 19	Žiaci nesprávne určili hodnotu v čitateli výslednej pravdepodobnosti len ako počet všetkých možných dvojíc vytvorených z dievčat triedy.
(D) $\frac{11}{60}$	3,5 %	– 16	Žiaci nesprávne určili hodnotu v čitateli výslednej pravdepodobnosti len ako počet všetkých možných dvojíc vytvorených z chlapcov triedy.
(E) $\frac{41}{60}$	1,3 %	– 15	
–	0,6 %	– 10	neuvedená odpoveď

Komentár:

Úloha vyžadovala základné znalosti z teórie pravdepodobnosti, z kombinatoriky a zručnosť vo výpočte kombinačných čísel. Najnižšiu úspešnosť pri riešení úlohy dosiahli žiaci SOŠ. Úloha mala veľmi dobrú citlivosť, rozlíšila všetky výkonnostné skupiny žiakov. Žiaci v teste celkove úspešnejší si volili správnu odpoveď (A), menej úspešní žiaci si volili distraktory.

Príklad **č. 25**

Téma: 2.3 Mnohočleny a mocninové funkcie, lineárna lomená funkcia

Testované myšlienkové operácie: zložitejšie myšlienkové operácie

Predpokladaná obťažnosť: stredne ťažká úloha

Zadanie:

Zistite definičný obor funkcie f: $y = \sqrt{\frac{1-x}{x-2} + 2}$.

Riešenie:

(1) Výraz pod odmocninou je definovaný pre všetky nezáporné reálne čísla, preto všetky čísla, ktoré môžeme dosadiť za premennú x do výrazu tak, aby bol definovaný, vypočítame riešením nerovnice $\frac{1-x}{x-2} + 2 \geq 0$.

(2) Postupnými úpravami dostaneme $\frac{1-x+2x-4}{x-2} \geq 0$, odtiaľ $\frac{x-3}{x-2} \geq 0$

(3) Poslednú nerovnicu v (2) v podielovom tvare vyriešime metódou nulových bodov.

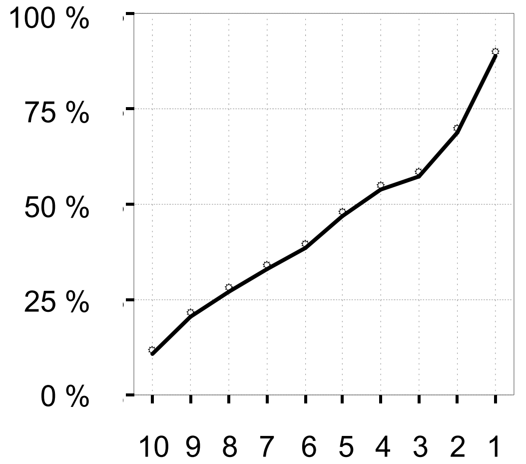
		2		3	
$x-3$	−		−		+
$x-2$	−		+		+
	⊕		⊖		⊕

(4) Zlomok v nerovnici v (2) bude nezáporný po dosadení čísel z $(-\infty; 2) \cup \langle 3; \infty)$.

(5) Správna odpoveď je (E) $(-\infty; 2) \cup \langle 3; \infty)$.

Štatistické vyhodnotenie:		
úspešnosť	celková	45,0 %
	žiaci GYM	53,6 %
	žiaci SOŠ	27,5 %
	chlapci	43,2 %
	dievčatá	47,1 %
neriešenosť		0,8 %
citlivosť		63,2 %
P. Bis.		37,1

Graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí:



Odpovede a frekvencia ich výskytu:			
odpoveď	frekvencia	*P. Bis.*	predpokladaná príčina uvedenej odpovede
(E) $(-\infty; 2) \cup \langle 3; \infty)$	44,7 %	37	správna odpoveď
(D) $\langle 3; \infty)$	18,7 %	– 9	Nesprávne riešenie poslednej nerovnice v (2). Žiaci vynásobili obe strany nerovnice výrazom $x - 2$, aby odstránili menovateľa zlomku na ľavej strane, ale neuvedomili si, že násobia výrazom, ktorého kladná alebo záporná hodnota závisí od hodnoty premennej x a teda by mali získať po úprave dve nové nerovnice v závislosti od kladnej alebo zápornej hodnoty násobeného výrazu. Veľmi častá chyba.
(C) $(-\infty; 2) \cup (2; \infty)$	13,9 %	– 17	Žiaci určili definičný obor len vylúčením toho čísla, pre ktoré sa menovateľ zlomku rovná nule. Podmienku definovania výrazu pod odmocninou neuvažovali.
(B) $(-\infty; 2) \cup (3; \infty)$	13,8 %	– 11	Žiaci postupovali správne, ale pri určovaní podmienky v (1) stanovili ostrú nerovnosť (podľa tejto skupiny žiakov odmocnina z čísla nula nie je definovaná).
(A) $(2; 3\rangle$	8,1 %	– 16	Žiaci zrejme spravili chybu pri riešení poslednej nerovnice v (2) a určili práve nesprávny interval, prípadne hneď na začiatku v (1) stanovili ako podmienku opačnú nerovnosť.
–	0,8 %	– 10	neuvedená odpoveď

Komentár:

Úloha vyžadovala znalosť funkcií a zručnosť pri riešení nerovníc v podielovom tvare. Úlohu správne vyriešila iba asi štvrtina žiakov SOŠ, ostatné skupiny žiakov úlohu riešili s vyššou úspešnosťou. Úloha mala výbornú citlivosť, rozlíšila všetky skupiny žiakov, najlepšie prvé dve skupiny výkonnostného spektra. Z hodnôt *P. Bis.* vidíme, že žiaci v teste celkovo úspešnejší si volili správnu odpoveď (E), menej úspešní žiaci si volili niektorý z distraktorov.

Príklad **č. 26**

Téma: 1.2 Čísla, premenné a výrazy

Testované myšlienkové operácie: tvorivý prístup

Predpokladaná obťažnosť: náročná úloha

Zadanie:

Určte, koľko z nasledovných tvrdení je pravdivých.

- Ak $x \in B$ a $x \notin A$, tak $x \in B - A$.
- Ak $x \in B$ a $x \notin A$, tak $x \in A \cup B$.
- Ak $x \in A \cup B$, tak $x \in A$ a súčasne $x \in B$.
- Ak $x \notin A \cap B$, tak $x \notin A$ a súčasne $x \notin B$.
- Ak $x \in A \cap B$, tak $x \in A$ alebo $x \in B$.

Riešenie:

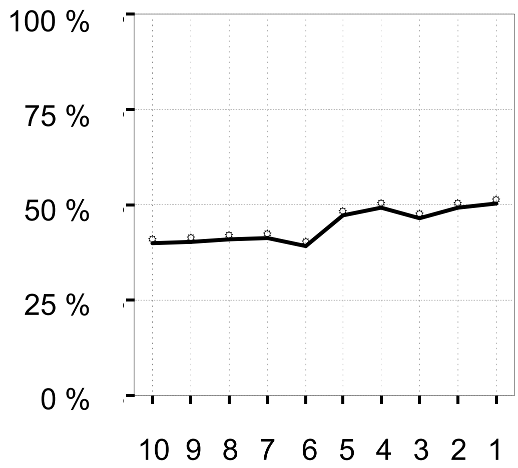
(1) Určíme pravdivostnú hodnotu každého tvrdenia. Ak je to potrebné, môžeme si pomôcť predstavou Vennových diagramov nahrádzajúcich *A* a *B*, čísla *x* budú prvky množín.

(2) Ak *x* patrí *B* a nepatrí *A*, je prvkom $B - A$ a patrí aj do zjednotenia *A* a *B*. Prvé aj druhé tvrdenie je preto pravdivé. Ak *x* patrí do zjednotenia *A* a *B*, nie je pravda, že patrí do oboch množín *A* a *B* súčasne. Stačí, ak prvok patrí do jednej z množín, už patrí aj do zjednotenia. Tretie tvrdenie neplatí. Ak prvok nepatrí do prieniku *A* a *B*, potom patrí do niektorej z množín $A - B$ alebo $B - A$, preto nemôže byť pravda, že nepatrí ani do *A*, ani do *B*. Štvrté tvrdenie preto nie je pravdivé. Ak prvok patrí do prieniku *A* a *B*, tak potom patrí do *A* aj do *B*. Piate tvrdenie je pravdivé. Správna odpoveď je (C) 3.

Štatistické vyhodnotenie:

úspešnosť	celková	44,7 %
	žiaci GYM	44,2 %
	žiaci SOŠ	45,4 %
	chlapci	44,4 %
	dievčatá	45,0 %
neriešenosť		0,3 %
citlivosť		9,5 %
P. Bis.		– 0,7

Graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí:



Odpovede a frekvencia ich výskytu:			
odpoveď	frekvencia	*P. Bis.*	predpokladaná príčina uvedenej odpovede
(C) 3	44,6 %	– 1	správna odpoveď
(B) 2	35,9 %	6	Žiaci v jednom z tvrdení nesprávne identifikovali pravdivostnú hodnotu tvrdenia. Vzhľadom na štruktúru úlohy nevieme, pri ktorom tvrdení mohli urobiť chybný úsudok.
(D) 4	11,3 %	– 3	
(A) 1	7,0 %	– 2	Žiaci v dvoch tvrdeniach nesprávne identifikovali pravdivostnú hodnotu. Vzhľadom na štruktúru úlohy nevieme, pri ktorých tvrdeniach mohli urobiť chybný úsudok.
(E) 5	0,9 %	– 4	
–	0,3 %	– 8	neuvedená odpoveď

Komentár:

Úloha vyžadovala znalosť z oblasti pravdivostných hodnôt zložených výrokov a prípadne z teórie množín. Všetky skupiny žiakov ju riešili s takmer rovnakou úspešnosťou. Z grafu distribúcie úspešností žiackych odpovedí vidíme, že posledných päť skupín žiakov riešilo úlohu s približne rovnakou priemernou úspešnosťou na úrovni 40 %, prvých päť výkonnostných skupín tiež s približne rovnakou priemernou úspešnosťou na úrovni asi 50 %. Na základe hodnôt *P. Bis.* konštatujeme, že voľba správnej odpovede alebo distraktorov nebola podmienená celkovou úspešnosťou žiaka v teste. Správnu odpoveď (C) si síce zvolilo najviac žiakov, ale v rovnakej miere žiaci v teste celkove úspešní i žiaci menej úspešní. Podobná bola aj situácia pri voľbe distraktorov (hodnoty *P. Bis.* veľmi blízko okolo nuly). Oba popísané javy sa odzrkadlili v nízkej citlivosti úlohy. Úloha vôbec nerozlíšila žiakov výkonnostného spektra.

Analýza výsledkov úlohy ukázala, že formát a štruktúra úlohy neboli zvolené najvhodnejšie. Ak sa žiak pomýlil pri určovaní pravdivosti rovnakého počtu pravdivých a nepravdivých tvrdení a pravdivostné hodnoty zvyšných tvrdení určil správne, dopracoval sa celkove k správnej odpovedi napriek tomu, že počas riešenia úlohy urobil chyby. V budúcnosti sa budeme snažiť nezaraďovať do testu úlohy podobnej štruktúry.

Príklad **č. 27**

Téma: 4.5 Telesá

Testované myšlienkové operácie: zložitejšie myšlienkové operácie

Predpokladaná obťažnosť: náročná úloha

Zadanie:

Dva pravidelné štvorsteny majú povrchy 84 cm^2 a 189 cm^2. V akom pomere sú ich objemy?

Riešenie:

(1) Každá dvojica rovnakých telies je navzájom podobná. Vyjadríme povrchy oboch telies pomocou koeficientu podobnosti *k*, následne z pomeru povrchov vypočítame hodnotu *k*. $P_1 = 4 . \frac{a . v_a}{2} = 2 . a . v_a$, $P_2 = 2 . ka . kv_a = k^2 . 2 . a . v_a$

(2) Z pomeru povrchov telies určíme *k*: $\frac{P_1}{P_2} = \frac{84}{189} \to \frac{2av_a}{k^2 . 2av_a} = \frac{84}{189} \to \frac{1}{k^2} = \frac{84}{189} \to k = \frac{3}{2}$.

(3) Vyjadríme objemy telies: $V_1 = S_p . v = \frac{a . v_a}{2} . v$, $V_2 = \frac{ka . kv_a}{2} . v = k^3 . \frac{a . v_a}{2} . v$.

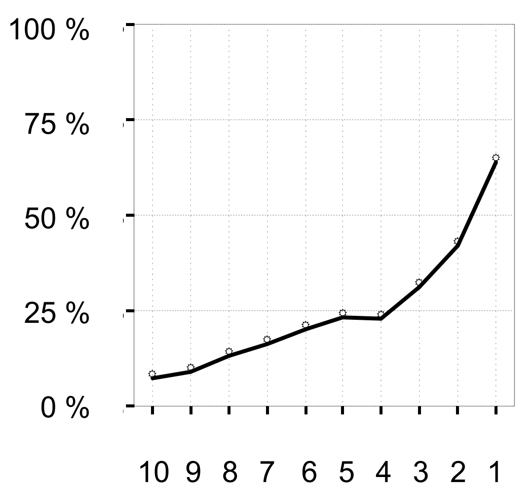
(4) Vyjadríme pomer objemov telies: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{k^3} = \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^3} = \frac{8}{27}$.

(5) Úlohu je možné riešiť aj bez využitia podobnosti. Stačí si uvedomiť, že telesová výška štvorstena "dopadá" do ťažiska trojuholníka ležiaceho oproti vrcholu štvorstena. Následne využitím vzniknutého pravouhlého trojuholníka je možné vyjadriť veľkosť výšky trojuholníka (steny telesa) v závislosti od dĺžky hrany telesa a obdobne veľkosť povrchu telesa.

Štatistické vyhodnotenie:

úspešnosť	celková	25,2 %
	žiaci GYM	29,2 %
	žiaci SOŠ	17,3 %
	chlapci	26,9 %
	dievčatá	22,2 %
neriešenosť		1,2 %
citlivosť		44,8 %
P. Bis.		28,6

Graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí:



Odpovede a frekvencia ich výskytu:			
odpoveď	frekvencia	*P. Bis.*	predpokladaná príčina uvedenej odpovede
(B) 4 : 9	46,7 %	– 13	Žiaci nesprávne predpokladali, že pomer objemov telies je rovnaký ako pomer povrchov telies. Veľkosť povrchu oboch telies uvedený v zadaní dali do pomeru a zjednodušili.
(D) 8 : 27	25,1 %	29	správna odpoveď
(A) 2 : 3	11,5 %	– 9	Žiaci zrejme vypočítali iba koeficient podobnosti oboch telies (ak riešili úlohu s využitím podobnosti telies). Neuvedomili si, že pri výpočte povrchu telesa sa násobia dva rozmery (koeficient k^2), pri výpočte objemu telesa sa násobia tri rozmery (koeficient k^3).
(C) 4 : 27	7,9 %	– 3	Žiaci zrejme nevyužili podobnosť telies a počítali postupom uvedeným v (5). Pri vyjadrení výšky telesa v závislosti od hrany telesa alebo pri vyjadrení povrchu a následne objemu telesa v závislosti od hrany telesa numericky zabudli alebo vykrátili jednu číslicu 2 navyše.
(E) 3 : 8	7,6 %	– 6	Žiaci urobili numerickú chybu vo výpočte alebo zvolili túto možnosť preto, lebo bola výslednou hodnotou najbližšia pomeru v najfrekventovanejšie volenej možnosti (B).
–	1,2 %	– 6	neuvedená odpoveď

Komentár:

Úloha vyžadovala základné poznatky o vlastnostiach štvorstena a zručnosť pri počítaní objemov a povrchov telies a úprave výrazov s parametrami. Pre žiakov SOŠ bola úloha veľmi obťažná. Takmer polovica žiakov si volila distraktor (B), iba štvrtina žiakov, väčšinou v teste celkove úspešnejších, si volila správnu odpoveď (D). Na základe výsledkov predpokladáme, že žiaci nevedeli objaviť postup, ako správne vypočítať výsledok úlohy.

Príklad **č. 28**
Téma: 2.1 Funkcia a jej vlastnosti, postupnosti
Testované myšlienkové operácie: zložitejšie myšlienkové operácie
Predpokladaná obťažnosť: stredne ťažká úloha

Zadanie:

Určte tvar grafu funkcie f: $y = \dfrac{x^2-6x+9}{x-3}$.

Riešenie:

(1) Funkcia f je definovaná pre všetky reálne čísla okrem čísla 3, pre ktoré by hodnota menovateľa zlomku bola rovná nule.

(2) Pre všetky čísla z definičného oboru môžeme predpis funkcie upraviť nasledovne:

$$f\colon y = \frac{x^2-6x+9}{x-3} = \frac{(x-3)^2}{x-3} = x - 3$$

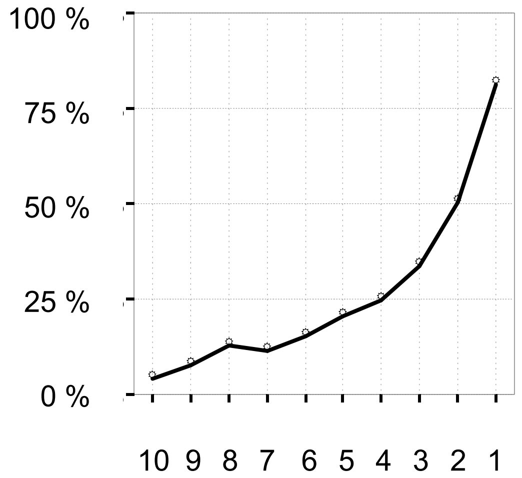
(3) Funkcia f v (2) je rastúca lineárna funkcia, ktorej grafom je priamka. Ak zohľadníme jej definičný obor, ktorý zo všetkých reálnych čísel vylučuje číslo 3, musíme aj z bodov grafu funkcie vynechať bod definovaný pre číslo 3. Získame tak priamku bez jedného bodu.

(4) Správna odpoveď je (E) priamka bez jedného bodu.

Štatistické vyhodnotenie:

úspešnosť	celková	26,3 %
	žiaci GYM	33,5 %
	žiaci SOŠ	12,5 %
	chlapci	26,1 %
	dievčatá	26,8 %
neriešenosť		0,6 %
citlivosť		60,0 %
P. Bis.		39,3

Graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí:



Odpovede a frekvencia ich výskytu:			
odpoveď	frekvencia	*P. Bis.*	predpokladaná príčina uvedenej odpovede
(D) priamka	27,4 %	1	Žiaci zabudli vynechať z grafu funkcie bod, v ktorom pôvodná funkcia nie je definovaná.
(E) priamka bez jedného bodu	26,3 %	39	správna odpoveď
(B) parabola bez jedného bodu	17,1 %	– 3	Žiaci zohľadnili definičný obor funkcie a vynechali z grafu funkcie jeden bod, ale zrejme neupravili zadaný predpis funkcie a podľa kvadratického trojčlena v čitateli predpisu funkcie určili ako graf parabolu (graf kvadratickej funkcie).
(A) parabola	14,5 %	– 27	Žiaci neurčili definičný obor funkcie v zadaní a neupravili predpis funkcie a preto vybrali ako graf parabolu so všetkými bodmi.
(C) hyperbola	14,0 %	– 18	Žiaci identifikovali v predpise funkcie zlomok a preto sa zrejme domnievali, že v zadaní úlohy je uvedený predpis lineárnej lomenej funkcie, ktorej grafom je hyperbola.
–	0,7 %	– 9	neuvedená odpoveď

Komentár:

Úloha vyžadovala znalosť vlastností funkcií. Na prvý pohľad pomerne jednoduchú úlohu správne vyriešila len asi štvrtina žiakov. Prejavil sa veľký rozdiel v úspešnosti žiakov GYM a SOŠ. Pre žiakov SOŠ bola úloha veľmi obťažná. Viac ako polovica žiakov riešila úlohu správne, ale iba polovica z nich bola dôsledná a uvedomila si aj definičný obor funkcie. Správnu odpoveď (E) si volili väčšinou žiaci v teste celkove úspešní, najfrekventovanejšie distraktory (D) a (B) si volili žiaci celkove menej úspešní, ku ktorým sa v malej miere pridali aj úspešnejší žiaci. Ostatné možnosti si volili najmä žiaci v teste menej úspešní. Úloha dobre rozlíšila najmä úspešnejšiu polovicu žiakov výkonnostného spektra.

Príklad **č. 29**

Téma: 1.4 Rovnice, nerovnice a ich sústavy

Testované myšlienkové operácie: zložitejšie myšlienkové operácie

Predpokladaná obťažnosť: náročná úloha

Zadanie:

Určte najväčšiu hodnotu výrazu $|x - y|$, ak pre reálne čísla x, y platí $|x - 4| \leq 2$ a $|10 - y| \leq 3$.

Riešenie:

(1) Najprv určíme, ktoré reálne čísla x a y vyhovujú podmienkam zadania.

(2) Nerovnici $|x - 4| \leq 2$ vyhovujú všetky reálne čísla x, ktorých vzdialenosť od čísla 4 na číselnej osi je menšia alebo rovná 2. Sú to čísla z intervalu $\langle 2; 6 \rangle$.

(3) Nerovnici $|10 - y| \leq 3$ vyhovujú všetky reálne čísla y, ktorých vzdialenosť od čísla 10 na číselnej osi je menšia alebo rovná 3. Sú to čísla z intervalu $\langle 7; 13 \rangle$.

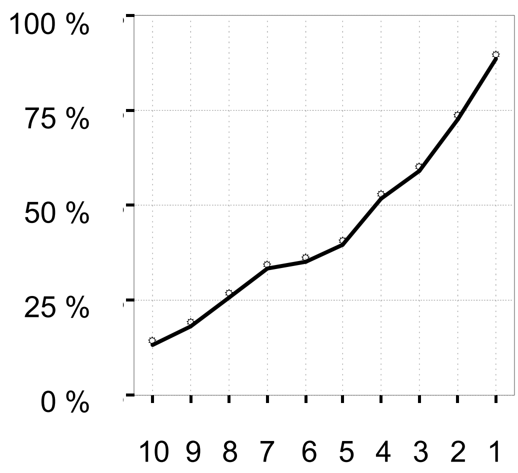
(4) Hodnota výrazu $|x - y|$ je vzdialenosť čísel x a y na číselnej osi. Keďže táto vzdialenosť má byť najväčšia, hľadáme v intervaloch uvedených v (2) a (3) čísla, ktoré sú od seba na číselnej osi najvzdialenejšie. Sú to čísla 2 a 13. Ich vzdialenosť je $|2 - 13| = |-11| = 11$.

(5) Správna odpoveď je (C) 11.

Štatistické vyhodnotenie:

úspešnosť	celková	43,5 %
	žiaci GYM	52,7 %
	žiaci SOŠ	26,7 %
	chlapci	44,6 %
	dievčatá	42,5 %
neriešenosť		0,7 %
citlivosť		65,0 %
P. Bis.		37,7

Graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí:



Odpovede a frekvencia ich výskytu:			
odpoveď	frekvencia	*P. Bis.*	predpokladaná príčina uvedenej odpovede
(C) 11	43,8 %	38	správna odpoveď
(D) 13	18,6 %	– 17	Žiaci nerozumeli otázke zadania alebo významu výrazu $\|x-y\|$ a ako odpoveď uviedli najväčšie číslo, ktoré obsahoval niektorý z intervalov určených v (2) a (3).
(B) 7	18,3 %	– 12	Žiaci dosadili do výrazu $\|x-y\|$ najväčšie čísla x, y z intervalov a vypočítali $\|6-13\| = \|-7\| = 7$. Neuvedomili si, že čím bude získané záporné číslo v absolútnej hodnote vzdialenejšie od nuly, tým väčšia bude výsledná hodnota počítaného výrazu.
(A) 5	10,8 %	– 17	Žiaci si zrejme uvedomili, že všetky čísla x sú menšie ako čísla y, zároveň sú všetky čísla kladné a preto hodnota výrazu v absolútnej hodnote bude vždy záporná. Snažili sa vo vnútri absolútnej hodnoty získať záporné číslo, ktoré by bolo najbližšie k nule a teda by bolo najväčšie. Neuvedomili si, že z čísla vo vnútri výrazu sa ešte počíta absolútna hodnota.
(E) 19	7,8 %	– 4	Žiaci dosadili do výrazu $\|x-y\|$ najväčšie možné čísla x, y a chybne vypočítali absolútnu hodnotu rozdielu $\|6-13\| = \|-19\| = 19$.
–	0,7 %	– 11	neuvedená odpoveď

Komentár:

Úloha vyžadovala znalosť absolútnej hodnoty a zručnosť pri riešení lineárnych nerovníc. Výhodu pri riešení úlohy mali žiaci, ktorí lineárne nerovnice aj hodnotu výrazu $|x-y|$ riešili využitím geometrickej interpretácie absolútnej hodnoty a nie postupnými úpravami a dosadzovaním. Žiaci GYM boli pri riešení úlohy dvojnásobne úspešnejší ako žiaci SOŠ. Úloha výborne rozlíšila žiakov (vysoká citlivosť, hodnota medzipoložkovej korelácie *P. Bis.* a takmer ideálny priebeh grafu distribúcie úspešností žiackych odpovedí). Správnu odpoveď (C) si volili žiaci v teste celkove úspešnejší, distraktory si volili menej úspešní žiaci.

Príklad **č. 30**

Téma: 3.2 Analytická geometria v rovine

Testované myšlienkové operácie: tvorivý prístup

Predpokladaná obťažnosť: náročná úloha

Zadanie:

Daná je priamka, ktorá prechádza bodmi $A[-3; 22]$ a $B[33; -2]$. Určte počet všetkých bodov tejto priamky, ktorých obidve súradnice sú kladné celé čísla.

Riešenie:

(1) Napíšeme rovnicu priamky prechádzajúcej bodmi A a B a podľa nej rozhodneme, pre koľko celých kladných čísel x dosadených do rovnice získame aj celé kladné číslo y.

(2) Rovnicu priamky budeme hľadať v smernicovom tvare $y = kx + q$. Určíme smernicu $k = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1} = \frac{-2-22}{33-(-3)} = -\frac{24}{36} = -\frac{2}{3}$. Získame rovnicu $y = -\frac{2}{3}x + q$. Vypočítame q pomocou súradníc bodu A: $22 = -\frac{2}{3} \cdot (-3) + q$, odkiaľ $q = 20$. Rovnica priamky je $y = -\frac{2}{3}x + 20$.

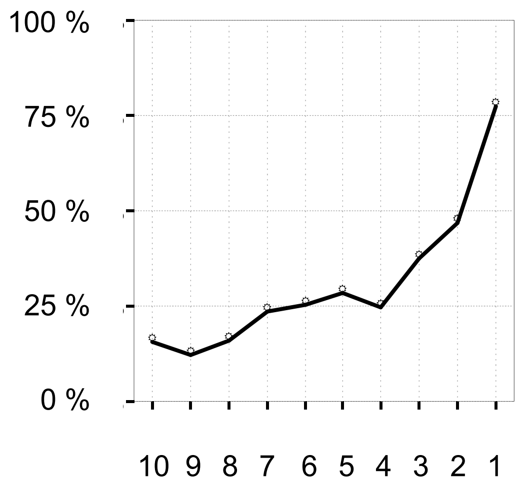
(3) Ak chceme získať kladné celé čísla y, za x musíme dosadzovať kladné celé násobky čísla 3, aby sme vykrátili zlomok na pravej strane rovnosti. Po dosadení najmenšieho takého kladného celého čísla 3 za x získame kladné celé y. Najväčšie číslo, ktoré môžeme dosadiť za x, je 27 $\left(\text{lebo } -\frac{2}{3} \cdot 30 + 20 = 0\right)$. Vhodné sú teda čísla 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27.

(4) Na priamke je 9 vhodných bodov. Správna odpoveď je (D) 9.

Štatistické vyhodnotenie:

úspešnosť	celková	30,8 %
	žiaci GYM	36,0 %
	žiaci SOŠ	21,2 %
	chlapci	31,3 %
	dievčatá	30,4 %
neriešenosť		1,0 %
citlivosť		48,1 %
P. Bis.		27,7

Graf distribúcie úspešností žiackych odpovedí:



Odpovede a frekvencia ich výskytu:

odpoveď	frekvencia	*P. Bis.*	predpokladaná príčina uvedenej odpovede
(D) 9	31,0 %	28	správna odpoveď
(E) 11	30,2 %	– 7	Žiaci zrejme postupovali správne, ale číslo 0 považovali za celé kladné číslo. Preto ako správne uznali aj body [0; 20] a [30; 0], čím rozšírili počet vhodných bodov o dva na celkový počet 11 bodov.
(C) 7	13,4 %	– 8	Žiaci zrejme nevyužili na riešenie úlohy rovnicu priamky, ale iba postupne dosadzovali čísla za *x*. Pri niektorých vhodných číslach *x* urobili numerickú chybu a nevypočítali kladnú celú hodnotu pre *y*. Ďalšou možnosťou je využitie rovnice priamky, pričom pri jej určovaní urobili numerickú chybu a následne použili nesprávnu rovnicu priamky pri doriešení úlohy.
(A) 3	12,8 %	– 12	Žiaci zrejme urobili numerickú chybu pri určovaní smernice priamky alebo si tieto možnosti vybrali iba náhodne.
(B) 5	11,6 %	– 7	
–	1,0 %	– 7	neuvedená odpoveď

Komentár:

Úloha vyžadovala znalosť analytickej geometrie, rovnice priamky, lineárnej funkcie a zručnosť v počítaní so zlomkami. Žiaci museli objaviť spôsob, ako sa k riešeniu úlohy dopracovať. V opačnom prípade museli postupne výpočtom preskúmať pomerne veľký počet vhodných kladných nezáporných čísel *x*, prípadne na základe výpočtov nakresliť situačný obrázok, z ktorého odčítali počet vhodných bodov. Najväčšie problémy s úspešným vyriešením úlohy mali žiaci SOŠ, pre ktorých bola úloha takmer veľmi obťažná. Správnu odpoveď (D) si volila necelá tretina všetkých odpovedajúcich žiakov. Úloha najlepšie rozlíšila prvé štyri skupiny žiakov výkonnostného spektra. Ostatné skupiny ju riešili s úspešnosťou okolo 20 %.

Záver

Na výsledky riešenia testu externej časti maturitnej skúšky z matematiky sa môžeme pozerať z hľadiska kvality výkonu žiakov, ako aj z hľadiska kvality meracieho nástroja – testu, pričom tieto dva aspekty sú navzájom prepojené.

Test MAT11 riešilo 8 803 maturantov. Počet žiakov v jednotlivých krajoch bol vyrovnaný. Podľa zriaďovateľa významne viac žiakov bolo zo štátnych škôl, zvyšok boli žiaci cirkevných a súkromných škôl. V rozdelení podľa druhu školy takmer dve tretiny žiakov boli žiaci gymnázií. Podiel chlapcov a dievčat bol približne 17 : 10 v prospech chlapcov. Po tretíkrát sa realizoval on-line test z matematiky. Štatistické analýzy potvrdili, že nová forma testovania nespôsobila rozdiely vo výkonoch.

Priemerná úspešnosť celého súboru (národný priemer) bola 57,9 %. Ukázalo sa, že výkon žiakov podľa krajov bol vyrovnaný. Podľa zriaďovateľa rozdiel vo výsledkoch medzi žiakmi cirkevných a súkromných škôl v prospech cirkevných je iba na veľmi miernej úrovni signifikancie. Z hľadiska druhu školy, výkon žiakov gymnázií (priemerná úspešnosť 64,1 %) je stredne významne lepší, ako výkon žiakov stredných odborných škôl, kde priemerná úspešnosť bola 45,9 %. Gymnazisti boli vo všetkých oblastiach testu lepší ako žiaci stredných odborných škôl. Aj keď test z matematiky písalo viac chlapcov ako dievčat, v porovnaní úspešnosti podľa pohlavia nezaznamenávame štatisticky významné rozdiely. Rozdiely v úspešnosti chlapcov a dievčat sa nepotvrdili ani v jednotlivých oblastiach testu. Celkovo bol test z rodového hľadiska náročnosti položiek dobre vyvážený. Súlad polročnej klasifikácie žiakov a ich výkonu v EČ MS je primeraný. Dosiahnuté priemerné úspešnosti zodpovedali širokospektrálnej populácii, ktorá test riešila.

V záujme nezávislosti riešenia testu boli vyvinuté dva varianty, ktoré boli zo všetkých skúmaných hľadísk ekvivalentné.

Základné charakteristiky testu MAT11 nepoukazujú na závažné neštandardné vybočenia. Reliabilita testu bola primeraná, Cronbachovo $\alpha = 0{,}84$ potvrdzuje vysokú presnosť merania. Aj ďalšie parametre testu svedčia o uspokojivej rozlišovacej sile testu. O kvalite testu vypovedá aj kvalita jednotlivých položiek: obťažnosť, citlivosť, neriešenosť a predovšetkým konzistentnosť položiek (medzipoložková korelácia). Charakteristiky troch položiek testu vykázali jednu výrazne nepriaznivú hodnotu, ale preukázala sa opodstatnenosť týchto položiek v teste.

Vyhodnotenie úspešnosti žiakov v jednotlivých oblastiach konštatuje primerané výsledky pri riešení príkladov známych z učebníc a zbierok úloh. Žiaci v podstate bez problémov riešia úlohy, ktoré vyžadujú jednoduchú aplikáciu poznatkov. Podrobná analýza položiek ukázala, že žiaci majú problém riešiť náročnejšie úlohy vyžadujúce vzájomné prepojenie poznatkov a využitie algebraického výpočtu. Zaznamenali sme nižšiu priemernú úspešnosť žiakov pri riešení úloh z tematického celku Funkcie. Ukázali sa pretrvávajúce nedostatky pri riešení úloh z geometrie. Vo vyučovaní matematiky v stredných školách je potrebné klásť dôraz na úlohy a zadania vyžadujúce tvorivý prístup žiaka, aplikáciu a vzájomné prepojenie poznatkov z rôznych oblastí matematiky, prácu s informáciami, grafmi, tabuľkami. Dostatočný priestor je potrebné venovať matematizácii problémov z bežného života, precvičovaniu algebraických zručností potrebných pri vysokoškolskom štúdiu a úlohám podporujúcim pozornosť, sústredenosť a dôslednosť žiaka počas ich riešenia.

Literatúra

1. Burjan, V.: Tvorba a využívanie školských testov vo vzdelávacom procese. Exam: Bratislava 1999.
2. Cieľové požiadavky na vedomosti a zručnosti maturantov z matematiky. ŠPÚ: Bratislava 2008.
3. Hendl, J.: Přehled statistických metod zpracování dát. Portál: Praha 2004.
4. Grošeková, M.: Jazykové skúšky a štandardizované testy 1. časť. In: Bulletin SAIA Slovenská akademická informačná agentúra, Informačný mesačník o štúdiu v zahraničí č. 9, ročník XIV, september 2004.
   http://www.saia.sk/images/Bulletin%20SAIA/www9[3].pdf (20. 6. 2006)
5. Juščáková, Z. – Kelecsényi, P. – Pichaničová, I.: Správa o výsledkoch externej časti maturitnej skúšky. Matematika. NÚCEM: Bratislava 2009.
6. Juščáková, Z. – Kelecsényi, P.: Správa o výsledkoch externej časti maturitnej skúšky z matematiky. NÚCEM: Bratislava 2010.
7. Juščáková, Z. – Ringlerová, V.: Príručka. Vysvetlenie pojmov používaných v správach zo štatistického spracovania testov EČ MS. NÚCEM: Bratislava 2009.
8. Juščáková, Z.: Záverečná správa zo štatistického spracovania testu z matematiky. NÚCEM: Bratislava 2011.
9. Kolektív: Standardy pro pedagogické a psychologické testování. Testcentrum: Praha 2001.
10. Špecifikačná tabuľka testu z matematiky. Interný materiál. NÚCEM: Bratislava 2009.
11. Lapitka, M.: Tvorba a použitie didaktických testov. ŠPÚ: Bratislava 1996.
12. Ringlerová, V.: Záverečná správa zo štatistického spracovania testu z matematiky úrovne A. ŠPÚ: Bratislava 2008.
13. Ritomský, A. – Zelmanová, O.: Štatistické spracovanie a analýza dát rozsiahlych monitorovaní. Položková a multivariačná analýza s využitím systému SPSS. ŠPÚ: Bratislava 2003.
14. Ritomský, A. – Zelmanová, O. – Zelman, J.: Štatistické spracovanie a analýza dát rozsiahlych monitorovaní s využitím systému SPSS. ŠPÚ: Bratislava 2002.
15. SPSS Base 10.0 User`s Guide. by SPSS Inc.: Chicago 1999.
16. SPSS Base 7.0 Syntax Reference Guide. by SPSS Inc.: Chicago 1996.
17. Turek, I.: Učiteľ a pedagogický výskum. Metodické centrum: Bratislava 1998.
18. Wimmer, G.: Štatistické metódy v pedagogickom výskume. Gaudeamus: Hradec Králové 1993.
19. URL: http://www.scio.cz/tvorba_testu/teorie_testu/index.asp (15. 6. 2006)

Príloha – Vysvetlenie niektorých použitých pojmov

Úspešnosť žiaka je definovaná ako percentuálny podiel bodov za položky, na ktoré žiak odpovedal správne z celkového počtu bodov, ktoré mohol v teste získať. Najvyššia dosiahnutá úspešnosť niektorého žiaka v teste je **maximum**, najnižšia dosiahnutá úspešnosť je **minimum**. Aritmetický priemer úspešností všetkých žiakov riešiacich test je **priemerná úspešnosť** (národný priemer).

Štandardná odchýlka je priemer odchýlok úspešností všetkých žiakov od priemernej úspešnosti. Vyjadruje mieru rozptýlenia úspešností žiakov od priemernej úspešnosti. Čím je väčšia, tým väčšie sú rozdiely vo výkonoch žiakov. Pomocou štandardnej odchýlky určujeme **intervalový odhad úspešnosti populácie**

⟨– 1,96 . štandardná odchýlka; 1,96 . štandardná odchýlka⟩,

v ktorom sa umiestnilo 95 % testovaných žiakov.

Štandardná chyba priemernej úspešnosti určuje presnosť vypočítania priemernej úspešnosti. Čím menšia je štandardná chyba priemernej úspešnosti, tým presnejšie charakterizuje priemerná úspešnosť testovaných žiakov. Pomocou štandardnej chyby priemernej úspešnosti určujeme **interval spoľahlivosti pre priemernú úspešnosť**

⟨– 1,96 . štandardná chyba priem. úspešnosti; 1,96 . štandardná chyba priem. úspešnosti⟩,

v ktorom sa s 95 % – nou pravdepodobnosťou nachádza priemerná úspešnosť celého súboru.

Štandardná chyba merania je ukazovateľom presnosti merania. Čím je menšia, tým presnejšie je určený **intervalový odhad úspešnosti individuálneho žiaka**

⟨priemer – 1,96 . štandardná chyba merania ; priemer + 1,96 . štandardná chyba merania ⟩

v ktorom sa s 95 % – nou pravdepodobnosťou nachádza úspešnosť individuálneho žiaka.

Reliabilita testu (spoľahlivosť merania) určuje, do akej miery sa podarilo v teste vylúčiť vplyv náhodnosti, či by testovaní žiaci dosiahli rovnaké alebo podobné výsledky pri opakovanom testovaní podobnými úlohami. Koeficientom reliability testu je **Cronbachovo alfa**.

Percentil individuálneho žiaka určuje percentuálne poradie žiaka v celom súbore, koľko percent žiakov celého súboru dosiahlo horší výsledok ako individuálny žiak.

Štatistická signifikancia určuje mieru zhody alebo rozdielnosti dvoch porovnávaných skupín súboru, napríklad priemerných úspešností. Keďže štatistická signifikancia sa preukáže už pri malých rozdieloch medzi úspešnosťami skupín, pre potreby pedagogických výskumov je vhodnejšia **vecná signifikancia** rozdielov priemerných úspešností, ktorá aj pri veľkých súboroch zohľadňuje počet žiakov v jednotlivých porovnávaných skupinách.

Mieru zhody alebo rozdielnosti porovnávaných skupín podľa vecnej signifikancie vyjadruje stupnica v nasledujúcej tabuľke.

Tab. 14 Klasifikácia miery vecnej signifikancie

Hodnota vecnej signifikancie *r*	Miera signifikancie
0,00 – 0,10	žiadna
0,11 – 0,20	veľmi mierna
0,21 – 0,30	mierna
0,31 – 0,50	stredná
0,51 – 1,00	silná, veľmi silná až úplná

Úspešnosť položky je percentuálny podiel žiakov, ktorí správne riešili úlohu. **Obťažnosť položky** je doplnkom úspešnosti položky do hodnoty 100 %. Rozdelenie položiek podľa percentuálnej hodnoty úspešnosti uvádza nasledujúca tabuľka.

Tab. 15 Klasifikácia obťažnosti položiek

Hodnota úspešnosti	Obťažnosť položky
100,0 % – 90,0 %	extrémne ľahká
89,9 % – 80,0 %	veľmi ľahká
79,9 % – 20,0 %	stredne obťažná (okolo 50,0 % optimálna)
19,9 % – 10,0 %	veľmi obťažná
9,9 % – 0,0 %	extrémne obťažná

Medzipoložková korelácia *P. Bis.* (*Point Biserial*) určuje vzťah medzi úspešnosťou položky a úspešnosťou vo zvyšných položkách testu. Hodnoty *P. Bis.* uvádzame v stonásobku skutočnej hodnoty pre lepšiu čitateľnosť. Čím väčšia je kladná hodnota *P. Bis.* položky, tým väčší podiel v teste celkove úspešnejších žiakov a menší podiel menej úspešných žiakov odpovedalo správne na položku. Rozdelenie položiek podľa *P. Bis.* je v nasledujúcej tabuľke.

Tab. 16 Klasifikácia položiek podľa *P. Bis.*

Hodnota *P. Bis.*	Rozlišovacia schopnosť položky
záporná hodnota	nerozlišuje dobrých a slabých žiakov
hodnota okolo 0	veľmi slabá rozlišovacia schopnosť
hodnota väčšia ako 25	dobrá rozlišovacia schopnosť

Citlivosť (rozlišovacia sila položky) je schopnosť položky rozlíšiť dobrých a slabších žiakov. Ak všetkých žiakov rozdelíme podľa vzostupnej úspešnosti do desiatich skupín (od 10 do 1), tak rozdiel priemernej úspešnosti najlepšej (1) a najslabšej (10) skupiny je hodnota citlivosti položky. Položky podľa citlivosti rozdeľuje nasledujúca tabuľka.

Tab. 17 Rozdelenie položiek podľa citlivosti

Hodnota citlivosti	Miera citlivosti
záporná hodnota	kritická
0,0 % – 10,0 %	nedostatočná
10,1 % – 20,0 %	nízka
nad 20,0 %	vyhovujúca

Distribúcia úspešnosti vyjadruje vzťah medzi úspešnosťou položky a celkovou úspešnosťou žiaka v teste. Interpretuje sa grafmi, ktoré majú na osi *x* rozdelenie žiakov do 10 výkonnostných skupín od najmenej úspešnej desiatej skupiny po najúspešnejšiu prvú skupinu a na osi *y* priemernú úspešnosť danej položky v danej výkonnostnej skupine.

Neriešenosť položky je percentuálny podiel žiakov, ktorí na položku neuviedli odpoveď. Určuje sa ako súčet vynechanosti a nedosiahnutosti. Žiak vynechal položku, ak na danú úlohu neodpovedal, ale na niektorú ďalšiu úlohu áno. Za nedosiahnutú považujeme položku, po ktorej žiak už žiadnu položku neriešil. Nedosiahnutosť poslednej položky určujeme ako nedosiahnutosť predposlednej položky. Za kritickú považujeme hodnotu neriešenosti vyššiu ako 50 %.

Úlohy s výberom odpovede vyhodnocujú osobitne každú ponúknutú odpoveď. Uvádza sa *P. Bis.* každej možnosti, percentuálny podiel žiakov, ktorí si vybrali danú možnosť (frekvencia) a počet žiakov, ktorí si vybrali danú možnosť. Tieto údaje sú uvedené aj pre skupinu neodpovedajúcich žiakov. Žltou farbou je označený stĺpec (prípadne riadok) so správnou odpoveďou. Položky s výberom odpovede hodnotíme podľa nasledovných kritérií:

1. Podiel žiakov, ktorí si vybrali správnu odpoveď, by mal byť najväčší.
2. Hodnota *P. Bis.* pri správnej odpovedi by mala byť väčšia ako 20 (optimálne 25).
3. Hodnota *P. Bis.* pri nesprávnej odpovedi (distraktore) by mala byť záporná.

Akékoľvek nedodržanie týchto kritérií je v tabuľkách farebne zvýraznené.