MINISTERSTVO ŠKOLSTVA,
VEDY, VÝSKUMU A ŠPORTU
SLOVENSKEJ REPUBLIKY

KÓD TESTU
1104

ÉRETTSÉGI VIZSGA 2015

EXTERN RÉSZ

MATEMATIKA

NE NYISSÁK KI, VÁRJANAK AZ UTASÍTÁSRA!
ELŐSZÖR OLVASSÁK EL A TESZTHEZ TARTOZÓ UTASÍTÁSOKAT!

- A teszt **30 feladatot** tartalmaz.
- A teszt kitöltéséhez **120 perc** áll rendelkezésükre.
- A teszt kétféle feladattípust tartalmaz:
  - A feleletalkotó feladatoknál írják az eredmény egyes számjegyeit a válaszadó lap megfelelő mezőibe! Vegyék figyelembe a tizedesvessző előnyomtatott helyét!
  - A feleletválasztó feladatoknál a megadott lehetőségek közül válasszák ki a helyeset! Mindig csak egy válasz helyes. A helyes feleletet jelöljék ✕-szel a válaszadó lap megfelelő mezőjében!
- Az értékelés szempontjából minden feladat egyenértékű.
- Munka közben csak íróeszközöket, a teszt utolsó oldalán található képletek áttekintését és csak olyan számológépet használhatnak, amely nem mobiltelefon része. Nem használhatnak Graph, Graphic, Calc, Solve funkciókkal ellátott számológépet, programozható számológépet, grafikus kijelzőjű számológépet, füzeteket, tankönyveket és egyéb irodalmat sem.
- Számoljanak pontosan! Ha szükséges, akkor csak az eredményt kerekítsék a teszt hátsó lapján feltüntetett utasítások alapján!
- A megjegyzéseket külön papírlapra (piszkozatra) írják! A piszkozat tartalmát az értékeléskor nem vesszük figyelembe.
- **A válaszadó lap kitöltésére vonatkozó pontos utasítások a teszt utolsó oldalán találhatók.**

Sok sikert kívánunk!

Csak akkor kezdjenek dolgozni, amikor erre utasítást kapnak!

I. rész

Oldják meg az **01**-től **20**-ig terjedő feladatokat, és a válaszadó lapra mindig **csak az eredményt** írják be! Nem kell megindokolni, és nem kell feltüntetni a menetet sem, amellyel az eredményhez eljutottak.

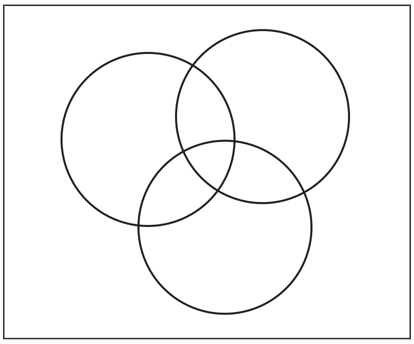
A képek csak illusztrációként szolgálnak, az Önök vázlatait helyettesítik, s itt sem a szögek nagyságának, sem a hosszúságoknak nem kell megfelelniük a valóságnak.

01 Az osztály valamennyi tanulója magasságának átlaga 162 cm. Az osztályfőnöknő magassága 178 cm. Az osztály valamennyi tanulója és az osztályfőnöknő magasságának átlaga 163 cm. Számítsák ki az osztály tanulóinak létszámát!

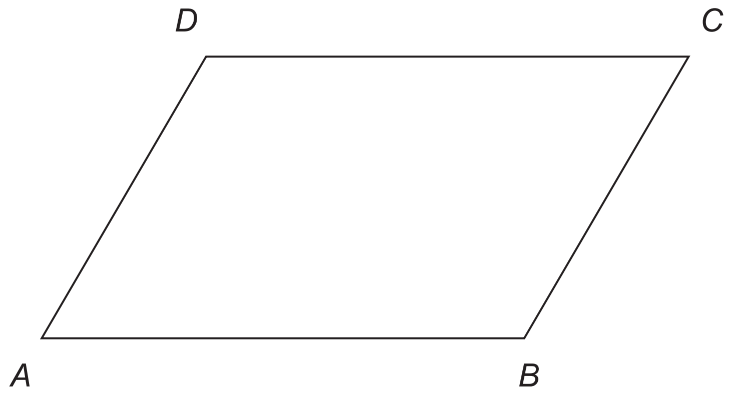
02 Az AB kétjegyű számban $A > B$. Az AB számból A vagy B további számjegy hozzáadásával néhány háromjegyű számot képeztünk. Az ABB háromjegyű szám osztható 7-tel, a BAB szám osztható 4-gyel, és az ABA szám osztható 3-mal. Keressék meg az eredeti AB kétjegyű számot!

03 Három fiú és három lány közös fényképet akar készíteni. Hányféleképpen ülhetnek le egymás mellé egy padra úgy, hogy a fiúk és a lányok váltakozva üljenek, és mindig más fénykép keletkezzen?

04 Az osztály tanulóinak létszáma 30. Az iskolaév végén az osztály öt tanulója kapott egyest matematikából, és senki sem bukott meg ebből a tantárgyból. Az osztály 18 tanulójának volt matematikából egyesnél rosszabb, de négyesnél jobb jegye. Az osztály 16 tanulójának volt matematikából kettesnél rosszabb jegye. Az osztály hány tanulójának volt év végén matematikából hármasa? A számításnál felhasználhatják az alábbi Venn-diagramot.

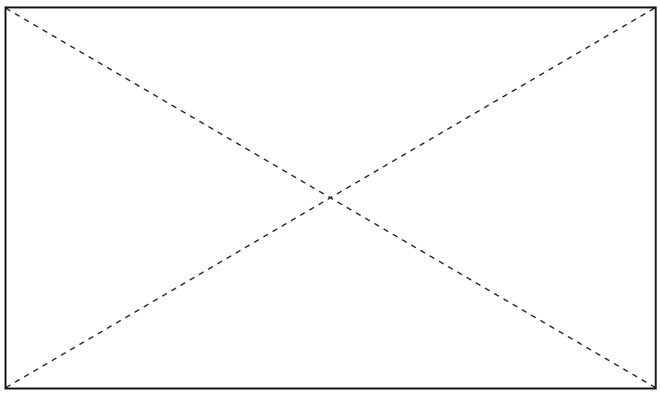


05 Az $ABCD$ paralelogramma (lásd az ábrát!) oldalainak hossza 6 cm és 4 cm. A paralelogramma egyik belső szögének nagysága $45°$. Számítsák ki centiméterben az $ABCD$ paralelogramma hosszabb átlójának hosszát!



06 A $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2^{3n}\cdot 2^{n-1}}\right)^2$ kifejezést valamennyi $n \in N$ esetében rendezhetjük és egyszerűsíthetjük 2^{an+b} alakra, ahol a, b egész számok. Határozzák meg az $a+b$ összeget!

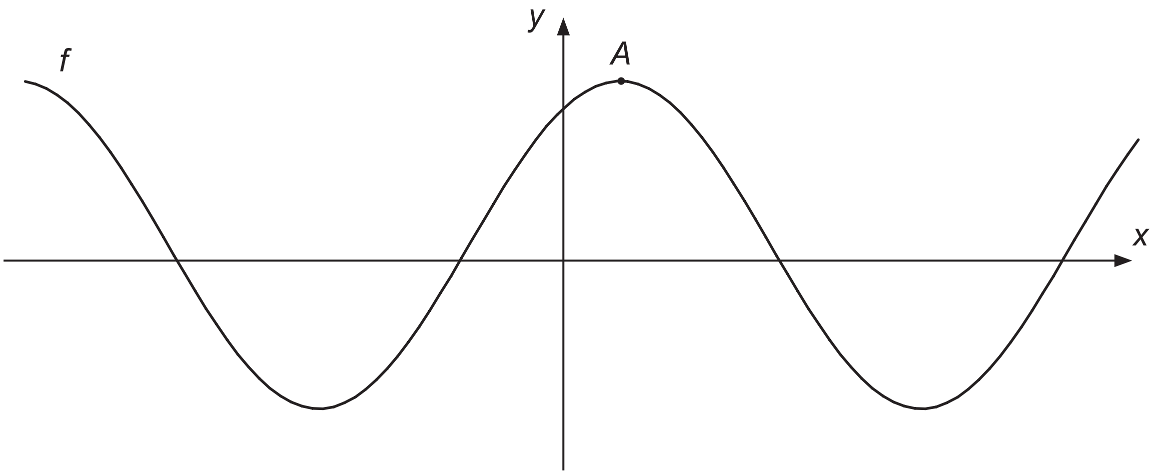
07 A téglalap (lásd az ábrát!) oldalainak és átlójának hossza egy számtani sorozat három egymás után következő tagja. A téglalap hosszabb oldalának hossza 12 cm. Határozzák meg négyzetcentiméterben ezen téglalap területét!



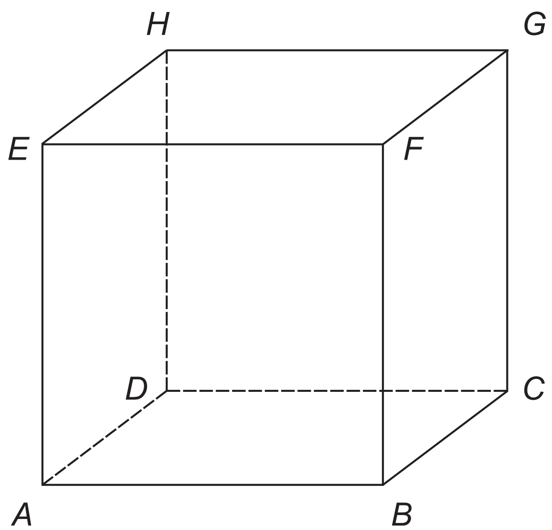
08 Egy karalábé ára $0{,}40$ euróval emelkedett. Így a vásárló 4 euróért 5 darabbal kevesebb karalábét tudott venni. Állapítsák meg euróban egy karalábé új árát!

09 Állapítsák meg, hogy az $x = 103!$ szám hányszor nagyobb az $y = 101! + 102!$ számnál!

10 Az ábrán az $f\colon y = 3 \cdot \sin(x + 65°)$ függvény grafikonjának egy része és az A pont látható, amelyben az f függvény grafikonja először veszi fel a maximumát a pozitív valós számok halmazán. Határozzák meg fokokban az A pont x-koordinátáját!

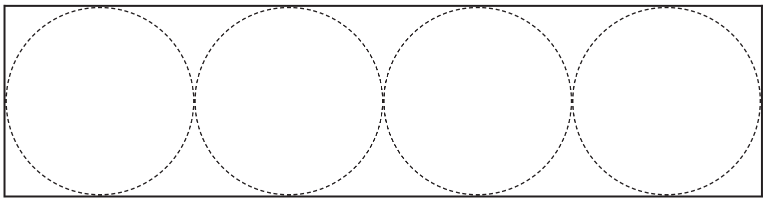


11 Az $ABCDEFGH$ kocka (lásd az ábrát!) élének hossza 4 cm. Az M pont az EH él középpontja. Számítsák ki centiméterben az $ABCDEFGH$ kocka és az ACM sík metszetének kerületét!

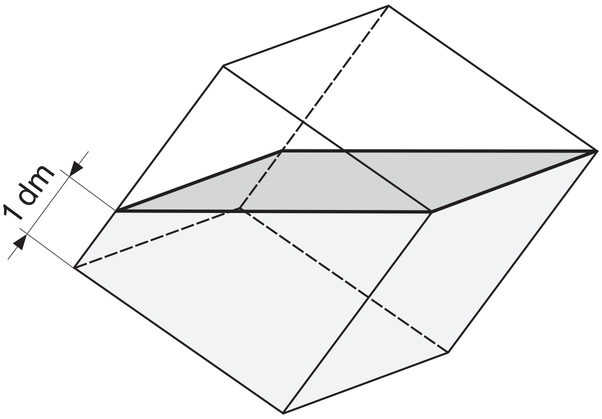


12 Határozzák meg az $f\colon y = -7 \cdot \log(x + 3)$ függvény grafikonja és az x tengely metszéspontjának x-koordinátáját!

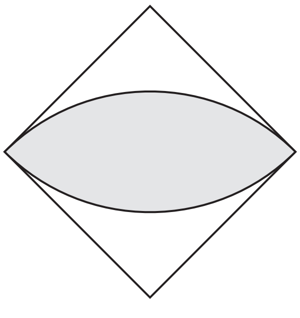
13 Négy teniszlabdát egy henger alakú csomagolásban (lásd az ábrát!) lehet megvenni. Mindegyik labda érinti a szomszédos labdát és a palástot, esetleg a henger alaplapjait. A henger belső térfogatának hány százalékát képezi az az üres tér, amelyet a teniszlabdák nem töltenek ki?



14 A kocka alakú akvárium élének hossza 6 dm. Ha az akváriumot az alapéle körül kezdenénk forgatni, a víz éppen akkor kezdene kifolyni az akváriumból, amikor a víz szintje az akvárium szemközti oldallapján 1 dm magasságban van (lásd az ábrát!). Számítsák ki, hány liter víz van az akváriumban!



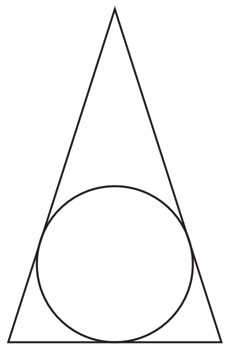
15 Az 1 cm oldalhosszú négyzetbe két negyedkörvonalat rajzoltunk, melyeknek a középpontjai a négyzet szemközti csúcspontjaiban vannak (lásd az ábrát!). Számítsák ki négyzetcentiméterben a négyzet kijelölt részének területét, amelyet két negyedkörvonal határol!



16 A mértani sorozat második és negyedik tagjának összege az első és a harmadik tag összegének a kétszerese. A sorozat első tíz tagjának összege $3\,069$. Határozzák meg a sorozat első tagját!

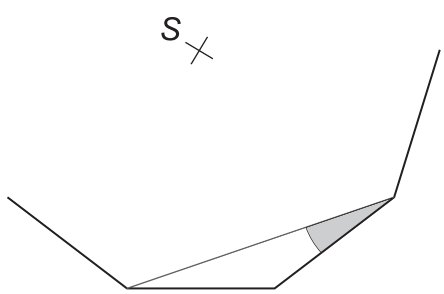
17 Számítsák ki fokokban a $\cos x = \frac{1}{2}$ egyenlet $(0°;\ 540°)$ intervallumba tartozó valamennyi gyökének összegét!

18 Az egyenlő szárú háromszögbe, amelynek az alapja 2 cm hosszú, és az alaphoz tartozó magasság 6 cm, körvonalat írtunk bele (lásd az ábrát!). Számítsák ki centiméterben a beleírt körvonal sugarát!



19 Adottak az $A\,[-1;\ 1]$ és $B\,[3;\ -2]$ pontok. Határozzák meg a $C\,[c;\ c]$ pont koordinátáiban szereplő c valós számot úgy, hogy a C pont az ABC derékszögű háromszög csúcspontja legyen, miközben a derékszög a B csúcspont mellett fekszik!

20 A szabályos sokszögben (az ábrán ennek egy része és a középpontja látható) a legkisebb átló hossza 10 cm. Ezen átló és a sokszög oldala által bezárt szög nagysága $20°$. Számítsák ki centiméterben ezen sokszög kerületét!



II. rész

A **21**-től **30**-ig számozott feladatok mindegyikében a felkínált **(A)** – **(E)** válaszok közül éppen egy a helyes. A válaszukat jelöljék ╳-szel a válaszadó lap megfelelő mezőjében!

A képek csak illusztrációként szolgálnak, az Önök vázlatait helyettesítik, s itt sem a szögek nagyságának, sem a hosszúságoknak nem kell megfelelniük a valóságnak.

21 Az $f\colon y = \dfrac{\sqrt{(x+4)\cdot(x-7)}}{(x+4)\cdot(x-3)}$ függvény értelmezési tartománya:

(A) $(-\infty; -4) \cup \langle 7; \infty)$

(B) $(-\infty; -4) \cup (7; \infty)$

(C) $(-\infty; -4\rangle \cup \langle 7; \infty)$

(D) $(-\infty; 3) \cup (7; \infty)$

(E) $(-\infty; 3) \cup \langle 7; \infty)$

22 Adott az ítélet: „Péter hazudik és lop.” Válasszák ki azt a lehetőséget, amely az adott ítélet negációját fejezi ki!

(A) Péter hazudik, de nem lop.

(B) Péter nem hazudik és nem lop.

(C) Ha Péter nem hazudik, akkor nem is lop.

(D) Péter nem hazudik, de lop.

(E) Péter nem hazudik vagy nem lop.

23 Válasszák ki az $f\colon y = \dfrac{3x-2}{x+1}$ függvény $(0;\ \infty)$ intervallumon való monotonitásával és korlátosságával kapcsolatos igaz állítást!

(A) Az f függvény a $(0;\ \infty)$ intervallumon növekedő és csak alulról korlátos.

(B) Az f függvény a $(0;\ \infty)$ intervallumon fogyó és csak felülről korlátos.

(C) Az f függvény a $(0;\ \infty)$ intervallumon növekedő és korlátos.

(D) Az f függvény a $(0;\ \infty)$ intervallumon növekedő és nem korlátos.

(E) Az f függvény a $(0;\ \infty)$ intervallumon fogyó és nem korlátos.

24 Adott az ABC háromszög, miközben $A[3;\,5]$, $B[0;\,1]$ és $C[3;\,-2]$. Az $A_1B_1C_1$ háromszög tengelyesen szimmetrikus az ABC háromszöggel az x tengely szerint. Határozzák meg az ABC és az $A_1B_1C_1$ háromszögek közös részének területét!

(A) 2

(B) 3

(C) 4

(D) 5

(E) 6

25 Az urnában fekete és fehér golyók vannak. Együttvéve 9 golyó van benne. A fehér golyókból több van. Hány fehér golyó van az urnában, ha egy fehér és egy fekete golyó véletlenszerű, egyszerre történő kihúzásának a valószínűsége $0{,}5$?

(A) 5

(B) 6

(C) 7

(D) 8

(E) 9

26 Adott az $f\colon y = 2x^2 + bx + 8$ másodfokú függvény, ahol b természetes szám. Határozzák meg a legkisebb b számot, amelyre a parabola (az f függvény grafikonja) csúcspontja az x tengely alatt fog feküdni (lásd az ábrát!)!

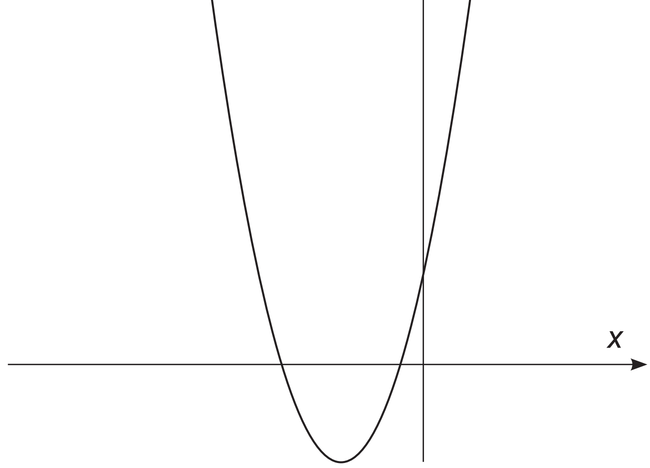
(A) 6

(B) 7

(C) 8

(D) 9

(E) 10



27 Döntsenek a $p\colon x + 2 = 0$ egyenes és a $k\colon x^2 + y^2 - 10x + 2y + 17 = 0$ körvonal kölcsönös helyzetéről!

(A) A p a k körvonalon kívül haladó egyenes.

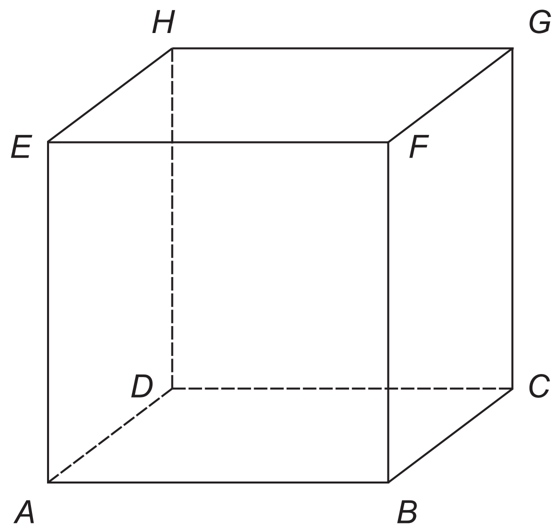
(B) A p egyenes a k körvonal x tengellyel párhuzamos érintője.

(C) A p egyenes a k körvonal y tengellyel párhuzamos érintője.

(D) A p egyenes a k körvonal x tengellyel párhuzamos szelője.

(E) A p egyenes a k körvonal y tengellyel párhuzamos szelője.

28 Adott az $ABCDEFGH$ kocka (lásd az ábrát!). Az alábbi ítéletek közül melyik hamis?



(A) Az AH és a HC szakaszok által bezárt szög nagysága $60°$.

(B) A BC és a HC szakaszok kölcsönösen merőlegesek egymásra.

(C) Az AE és a CG egyenesek kölcsönösen párhuzamosak egymással.

(D) Az EF és a DH egyenesek metszik egymást.

(E) A HAB és az ABC síkok hajlásszögének nagysága $45°$.

29 A főiskolai felvételi vizsgán négy feladat van. Minden feladat megoldására 0, 1, 2, 3 vagy 4 pontot lehet kapni. A sikeres felvételi vizsgához legalább 14 pontot kell elérni. Hányféle különböző pontozása lehet az egyes feladatoknak, amelyeknél a tanuló sikeresen leteheti ezt a felvételi vizsgát?

(A) 9

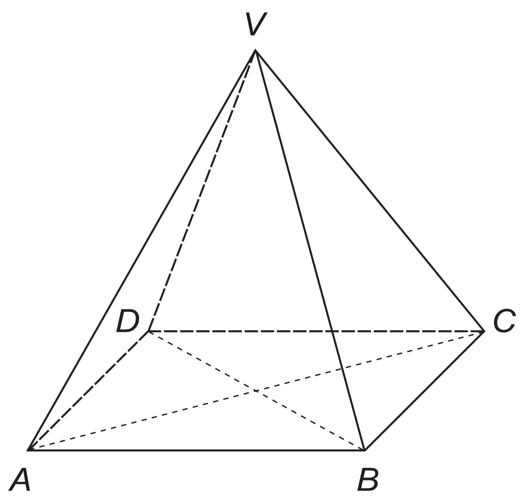
(B) 11

(C) 12

(D) 15

(E) 17

30 Az $ABCDV$ szabályos négyoldalú gúlában (lásd az ábrát!) az oldallap síkja és az alaplap síkja által bezárt hajlásszög nagysága $45°$. A gúla alapéle hosszának és a gúla magasságának aránya:



(A) 1 : 1

(B) 2 : 1

(C) $\sqrt{2}$: 2

(D) 1 : 2

(E) 2 : $\sqrt{2}$

VÉGE A TESZTNEK.

KÉPLETEK ÁTTEKINTÉSE

Hatványok:

$a^x.a^y = a^{x+y}$ $\quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ $\quad (a^x)^y = a^{x.y}$ $\quad (a.b)^x = a^x.b^x$ $\quad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$ $\quad a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ $\quad a^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{a^x}$

Goniometrikus függvények:

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ $\qquad \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$\sin 2x = 2.\sin x \cos x$ $\qquad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ $\qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

x	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Trigonometria:

Szinusztétel: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r$ $\qquad$ Koszinusztétel: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos\gamma$

Logaritmus: $\log_z(x\,.\,y) = \log_z x + \log_z y$ $\qquad \log_z \frac{x}{y} = \log_z x - \log_z y$

$\log_z x^k = \mathrm{k}.\log_z x$ $\qquad \log_y x = \frac{\log_z x}{\log_z y}$

Számtani sorozat: $a_n = a_1 + (n-1).d$ $\qquad s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

Mértani sorozat: $a_n = a_1.q^{n-1}$ $\qquad s_n = a_1\frac{q^n - 1}{q - 1}$, $q \neq 1$

Kombinatorika: $P(n) = n!$ $\qquad V(k,n) = \frac{n!}{(n-k)!}$ $\qquad C(k,n) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$

$P'(n_1, n_2, ..., n_k) = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\,...\,n_k!}$ $\qquad V'(k,n) = n^k$ $\qquad C'(k,n) = \binom{n+k-1}{k}$

Analitikus geometria:

Az egyenes paraméteres kifejezése: $X = A + t\vec{u}, \quad t \in R$

Az egyenes általános egyenlete: $ax + by + c = 0$; $[a; b] \neq [0; 0]$

Vektorok hajlásszöge: $\cos\varphi = \frac{\vec{u}\,.\,\vec{v}}{|\vec{u}|\,.\,|\vec{v}|}$

Az $M\,[m_1; m_2]$ pont távolsága a p: $ax + by + c = 0$ egyenestől: $|Mp| = \frac{|am_1 + bm_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

A körvonal egyenletének középponti alakja: $(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$

A testek térfogata és felszíne:

	téglatest	henger	gúla	kúp	gömb
térfogat	abc	$\pi r^2 v$	$\frac{1}{3}S_p v$	$\frac{1}{3}\pi r^2 v$	$\frac{4}{3}\pi r^3$
felszín	$2(ab + ac + bc)$	$2\pi r^2 + 2\pi r v$	$S_p + S_{pl}$	$\pi r^2 + \pi r s$	$4\pi r^2$

Útmutató a válaszadó lap kitöltéséhez

A válaszadó lapokat lapolvasóval dolgozzuk fel. Másolásuk, gyűrésük, összehajtásuk tilos. Ahhoz, hogy válaszaikat a lapolvasó felismerhesse, vegyék figyelembe a következő utasításokat.

- Írjanak fekete vagy kék tollal! Ne használjanak hagyományos töltőtollat, túl vékonyan író tollat, hagyományos vagy rotringceruzát!
- A feleletalkotó feladat eredményét egész számmal vagy tizedes szám segítségével fejezzék ki. Ha az eredmény egész szám, illetve tizedes szám legfeljebb két tizedes hellyel, a **pontos** eredményt írják be. Ha az eredmény tizedes szám több mint két tizedes hellyel, akkor a **két tizedes helyre kerekített** eredményt írják be.
- Az eredmény egyes számjegyeit írják a megjelölt mezőbe! Egy mezőbe legfeljebb egy számjegyet, illetve „–” jelet írjanak.
- Beíráskor vegyék figyelembe a tizedesvessző előnyomtatott helyét! A „–” (mínusz) előjelet külön mezőbe írják az első számjegy elé!
- Ha az eredményük egész szám, ne töltsék ki a tizedesvessző utáni mezőket!
- A mértékegységek (fokok, méterek, percek, grammok, …) jelét ne írják a válaszadó lapra!

Például:

a 4 633 eredmény beírása:

☐☐☐☐4633 , ☐☐☐☐

a 81,424 61 m eredmény beírása:

☐☐☐☐☐☐81 , 42☐☐

az 1 : 8 = 0,125 eredmény (arány) beírása:

☐☐☐☐☐☐☐0 , 13☐☐

az $\frac{5}{3} = 1,\overline{6}$ eredmény (tört) beírása:

☐☐☐☐☐☐☐1 , 67☐☐

- Az eredmény helytelen kitöltése esetében ne kérjenek új válaszadó lapot! A helytelenül kitöltött mezőt teljesen fessék be, és a helyes adatot a befestett mező elé vagy mögé írják.
- A –3,1 eredmény **helyes** beírása:

☐☐☐☐☐☐–3 , 1☐☐☐

- A –3,1 eredmény **helytelen** beírása:

☐☐☐☐☐☐☐– , ☐3,1

- A –3,1 eredmény helytelen beírásának javítása:

☐☐☐☐☐–3■ , ■■■1

☐☐☐☐☐–3■ , 1■■■

- A feleletválasztó feladat megoldását jelöljék ✕-szel a válaszadó lap megfelelő mezőjében.
- A **(C)** válasz **helyes** megjelölése:

A	B	C	D	E
☐	☐	☒	☐	☐

- A **(C)** válasz **helytelen** megjelölése:

A	B	C	D	E
☒	☐	☒	☐	☐

A	B	C	D	E
☐	☐	☒	☐	☐

- Ha tévesztenek, vagy később véleményüket megváltoztatják, a helytelenül megjelölt mezőt teljesen fessék be, és jelöljék ✕-szel a másik mezőt!

A	B	C	D	E
☒	☐	■	☐	☐

- Ha esetleg ismét meggondolják magukat, és az eredetileg ✕-szel jelölt, majd befestett választ szeretnék újból megjelölni, írjanak ✕-et az összes mezőbe, és a befestett mezőt karikázzák be!

A	B	C	D	E
☒	☒	■	☒	☒

Csak akkor nyissák ki a tesztet, amikor erre utasítást kapnak!