MINISTERSTVO
ŠKOLSTVA, VEDY,
VÝSKUMU A ŠPORTU
SLOVENSKEJ REPUBLIKY

KÓD TESTU
23 1504

ÉRETTSÉGI VIZSGA 2023

EXTERN RÉSZ

MATEMATIKA

NE NYISSÁK KI, VÁRJANAK AZ UTASÍTÁSRA!
ELŐSZÖR OLVASSÁK EL A TESZTHEZ TARTOZÓ UTASÍTÁSOKAT!

- A teszt **30 feladatot** tartalmaz.
- A teszt kitöltéséhez **150 perc** áll rendelkezésükre.
- A teszt kétféle feladattípust tartalmaz:
  - A feleletalkotó feladatoknál írják az eredmény egyes számjegyeit a válaszadó lap megfelelő mezőibe! Vegyék figyelembe a tizedesvessző előnyomtatott helyét!
  - A feleletválasztó feladatoknál a megadott lehetőségek közül válasszák ki a helyeset! Mindig csak egy válasz helyes. A helyes feleletet jelöljék ╳-szel a válaszadó lap megfelelő mezőjében!
- Az értékelés szempontjából minden feladat egyenértékű.
- Munka közben csak íróeszközöket, a teszt utolsó oldalán található képletek áttekintését, és csak olyan számológépet használhatnak, amely nem mobiltelefon része, nem tud grafikonokat rajzolni, változókat tartalmazó algebrai kifejezéseket alakítani és egyenletek gyökeit kiszámítani. Nem használhatnak füzeteket, tankönyveket és egyéb irodalmat sem!
- **Azzal a π értékkel dolgozzanak, amit a számológép kínál!**
- **Számoljanak pontosan, kerekítés nélkül! Ha szükséges, akkor csak a végső eredményt kerekítsék a teszt hátsó lapján feltüntetett utasítások alapján!**
- A megjegyzéseket külön papírlapra (piszkozatra) írják! A piszkozat tartalmát az értékeléskor nem vesszük figyelembe.
- **A válaszadó lap kitöltésére vonatkozó pontos utasítások a teszt utolsó oldalán találhatók.**

Sok sikert kívánunk!

Csak akkor kezdjenek dolgozni, amikor erre utasítást kapnak!

I. rész

Oldják meg az **01**-től **20**-ig terjedő feladatokat, és a válaszadó lapra mindig **csak az eredményt** írják be! Nem kell megindokolni, és nem kell feltüntetni a menetet sem, amellyel az eredményhez eljutottak.

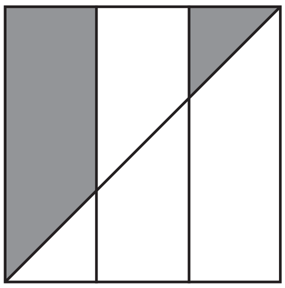
A képek csak illusztrációként szolgálnak, az Önök vázlatait helyettesítik, s itt sem a szögek nagyságának, sem a hosszúságoknak nem kell megfelelniük a valóságnak.

01 Adott két szám, az a és a b. Tudjuk, hogy $\frac{a}{b} = 4$. Számítsák ki, mivel egyenlő az $\frac{a^2 + b^2}{ab}$ kifejezés!

02 A számtani sorozatnak hat tagja van. Ezek összege 108. A sorozat első tagja 3-mal egyenlő. Számítsák ki a sorozat utolsó tagját!

03 Zsuzsa csokoládét evett. Az első napon megette a felét, a második napon megette a maradék felét. A harmadik napon ismét megette a maradék felét, és így folytatta tovább. Ily módon elméletileg a végtelenségig ehette volna a csokoládét, de mivel azt hova-tovább, annál nehezebb volt kétfelé törni, úgy döntött, hogy ha a darabka tömege kevesebb lesz, mint 4 g, akkor azt már nem fogja tovább törni, hanem inkább megeszi az egész darabkát. Hányszor törte Zsuzsa kétfelé a csokoládét, ha tudjuk, hogy annak tömege 180 g volt?

04 Az ábrán a négyzet kiszínezett részének a területe $54\ \text{cm}^2$. A függőleges vonalak a négyzetet három egyforma részre osztják fel. Számítsák ki centiméterekben a négyzet kerületét!

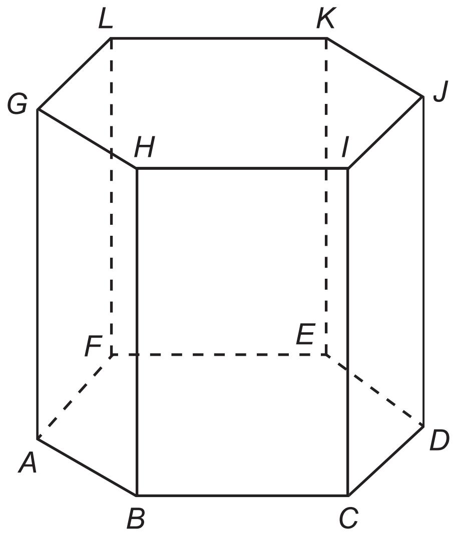


05 Határozzák meg annak a valószínűségét, hogy egy négyjegyű szám, melyet két darab 2-es, és két darab 3-mas számjegyből alkottunk, osztható lesz 11-gyel! Az eredményt a $\langle 0; 1 \rangle$ intervallumhoz tartozó számmal jegyezzék le!

© NIVAM, BRATISLAVA 2023

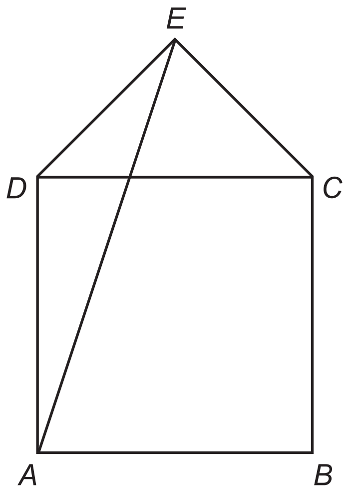
06 Hat évvel ezelőtt Erika háromszor annyi idős volt, mint Mária. Négy évvel ezelőtt Erika kétszer annyi idős volt, mint Mária. Hány éves most Erika?

07 Adott egy szabályos, 6-oldalú egyenes hasáb, amelyben érvényes, hogy az $|AB| = 2$ cm és az $|AG| = 4$ cm. A hasábnak az *ABJ* síkkal való metszete az *ABMJKN* hatszög. Az *M* és az *N* pontok a hasáb éleinek a középpontjai. Számítsák ki centiméterekben a metszet kerületét!



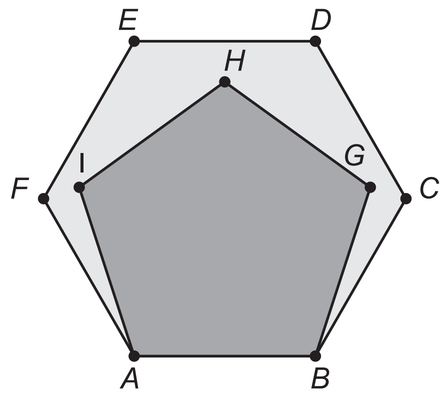
08 Adott az $f(x) = 2\cos x$ és a $g(x) = 3x - 11$ függvény. Számítsák ki a $g(f(x))$ összetett függvény függvényértékét, ha $x = 0$.

09 Az ábrán az *ABCD* négyzet, és a *DC* alapú, egyenlő szárú, derékszögű *DCE* háromszög látható. A négyzet oldalának a hossza 4 cm. Számítsák ki négyzetcentiméterekben az *AED* háromszög területét!



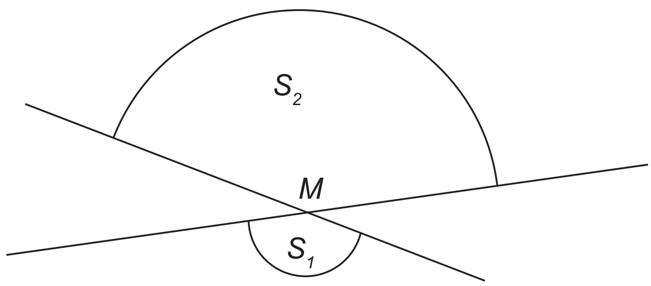
10 Adottak az $A[3;\,-1]$, a $B[0;\,-4]$ és a $C[0;\,2]$ pontok. Számítsák ki az ABC háromszög köré írt kör sugarát!

11 Adott egy szabályos hatszög, és egy szabályos ötszög, közös AB oldallal, ahogyan azt az ábrán láthatják. Számítsák ki fokokban az IAF szög nagyságát!



12 Az $y = \dfrac{4x-5}{2x-1}$ függvény hozzárendelési szabályát fejezzék ki $y = a + \dfrac{b}{2x-1}$ alakban, ahol $a, b \in R$! Írják a válaszadó lapra az a és a b számok összegét!

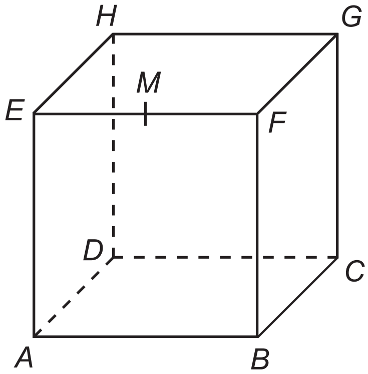
13 Az ábrán két egyenes, és két körcikk látható. A körcikkek az M középpontú körökből keletkeztek. A körök sugarainak az aránya $2:5$. Az S_2 körcikk területe 18 cm². Számítsák ki négyzetcentiméterekben az S_1 körcikk területét!



14 Hányszor írjuk le a 9-es számjegyet, ha lejegyezzük az összes természetes számot 1-től 625-ig, a 625-öt is beleértve? Mindegyik számot csak egyszer írjuk le.

© NIVAM, BRATISLAVA 2023

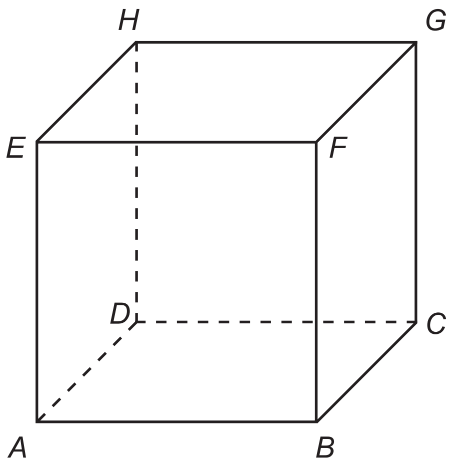
15 Adott az 5 cm élhosszúságú $ABCDEFGH$ kocka. Az M pont az EF él középpontja. Számítsák ki centiméterekben az M pont és az ABG sík távolságát!



16 A $2\,190$-es szám és a négyjegyű x szám legkisebb közös többszöröse $13\,140$. Számítsák ki az x számot!

17 Az osztályok közötti labdarúgó tornán minden osztály olyan 5-tagú csapattal indulhat, melyben legalább egy lány, és legalább két fiú lesz. A 4. B osztályból 7 fiú és 3 lány szeretett volna a tornán részt venni. Hány különböző csapatot állíthat fel a 4. B osztály?

18 Adott a 2 dm élhosszúságú $ABCDEFGH$ kocka. Továbbá adott a P pont, amely a BF szakasz középpontja, valamint a Q pont úgy, hogy a H pont a DQ szakasz középpontja legyen. Számítsák ki deciméterekben annak a szakasznak a hosszát, amelyik a PQ egyenes és a kocka metszetét képezi!

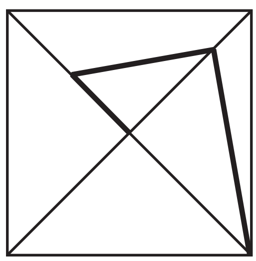


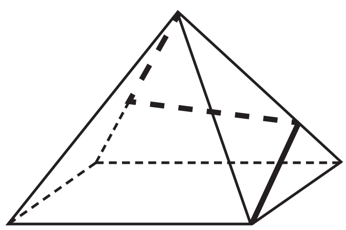
19 Minden üres mezőbe írjanak egy pozitív számot úgy, hogy a számok szorzata minden sorban, oszlopban és mindkét átló mentén is azonos legyen! Írják a válaszadó lapra ezt a szorzatot!

16	4	
	8	

20 A négyoldalú egyenes gúla alakú piramis mindegyik éle 100 méter hosszú. Az archeológus részletesen megvizsgálta. Az egyik lenti csúcsában kezdte vizsgálni, és a következő útvonalon haladt felfelé. Először eljutott a lenti csúcsból a szemközti él negyedelőpontjáig, innen a szemközti él felezőpontjáig, és utána már felment a piramis csúcsára. Számítsák ki méterekben az útvonala hosszát!

Felülnézet





© NIVAM, BRATISLAVA 2023

II. rész

A **21**-től **30**-ig számozott feladatok mindegyikében a felkínált **(A)** – **(E)** válaszok közül éppen egy a helyes. Válaszukat jelöljék ╳-szel a válaszadó lap megfelelő mezőjében!

A képek csak illusztrációként szolgálnak, az Önök vázlatait helyettesítik, s itt sem a szögek nagyságának, sem a hosszúságoknak nem kell megfelelniük a valóságnak.

21 Az alábbi lejegyzések közül hány egyenlőség érvényes?

(1) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(2) $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$

(3) $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$

(4) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** 4

22 Luca szeptember 22-én a születésnapjára olyan okostelefont kapott, amelyben lépésszámláló alkalmazás van. Mindjárt másnap használni is kezdte. Az év végéig összesen $1\,000\,000$ lépést tett meg. Október végéig naponta átlagosan $6\,725$ lépést tett meg. Hány lépést tett meg Luca naponta átlagosan novembertől december végéig? A lépések számát kerekítsék egész lépésekre!

(A) 11 984
(B) 12 408
(C) 12 295
(D) 12 094
(E) 12 204

Szeptember							Október							November							December						
H	K	Sz	Cs	P	Szo	V	H	K	Sz	Cs	P	Szo	V	H	K	Sz	Cs	P	Szo	V	H	K	Sz	Cs	P	Szo	V
	1	2	3	4	5	6				1	2	3	4							1		1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13	5	6	7	8	9	10	11	2	3	4	5	6	7	8	7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20	12	13	14	15	16	17	18	9	10	11	12	13	14	15	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	19	20	21	22	23	24	25	16	17	18	19	20	21	22	21	22	23	24	25	26	27
28	29	30					26	27	28	29	30	31		23	24	25	26	27	28	29	28	29	30	31			
														30													

23 Az alábbi függvények közül melyek azok, melyek az egész értelmezési tartományukon kölcsönösen egyértelműek is, és növekvőek is?

$f_1 : y = -\dfrac{1}{x}$ $\quad f_2 : y = x^2$ $\quad f_3 : y = \sqrt{x}$ $\quad f_4 : y = tg\ x$ $\quad f_5 : y = \ln\ x$

(A) f_1 a f_4

(B) f_3 a f_5

(C) f_1 a f_5

(D) f_2 a f_4

(E) f_2 a f_3

24 A teniszező rendszeresen lejegyzi játékai statisztikáját. Átlagosan minden 50 játékból 34-et nyer meg. Határozzák meg annak a valószínűségét, hogy a soron következő nyolc játékból pontosan hármat nyer meg!

(A) $\left(\dfrac{34}{50}\right)^3 \left(\dfrac{16}{50}\right)^5 \dbinom{8}{3}$

(B) $\left(\dfrac{34}{50}\right)^3 \left(\dfrac{16}{50}\right)^5$

(C) $\left(\dfrac{34}{50}\right)^5 \left(\dfrac{16}{50}\right)^3 \dfrac{8!}{5!}$

(D) $\left(\dfrac{34}{50}\right)^3 \left(\dfrac{16}{50}\right)^5 \dfrac{8!}{3!}$

(E) $\left(\dfrac{34}{50}\right)^5 \left(\dfrac{16}{50}\right)^3 \dbinom{8}{5}$

25 Adott a $\left\{\dfrac{3n+8}{n+2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat. A sorozatra érvényes, hogy:

(A) Növekvő és korlátos.

(B) Növekvő és alulról korlátos.

(C) Csökkenő és korlátos.

(D) Növekvő és felülről korlátos.

(E) Csökkenő és nem korlátos.

© NIVAM, BRATISLAVA 2023

26 Az f függvény megegyezik a g függvénnyel, ha a D értelmezési tartományuk megegyezik, és minden x-re, amely a közös D-be tartozik, érvényes, hogy $f(x) = g(x)$. Döntsék el, hogy az alábbi függvénypárok közül melyek egyeznek meg!

(1) $f_1 : y = 1$ $\qquad f_2 : y = \dfrac{x}{x}$

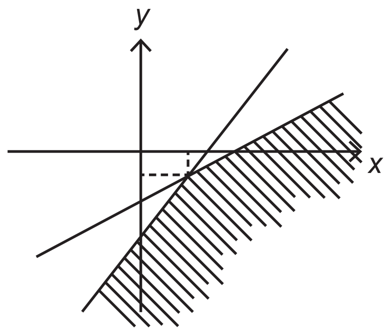
(2) $f_3 : y = x^2$ $\qquad f_4 : y = \sqrt{x^4}$

(3) $f_5 : y = \dfrac{1}{x}$ $\qquad f_6 : y = \dfrac{x}{x^2}$

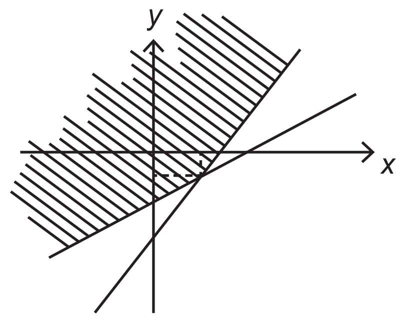
(A) egyik sem **(B)** (1), (2) és (3) **(C)** (1) és (2) **(D)** (1) és (3) **(E)** (2) és (3)

27 Adott az $M = \{(x, y) \in R \times R;\ x - 2y \le 4 \wedge 2x - y - 5 \ge 0\}$ halmaz. A halmaz grafikus ábrázolása:

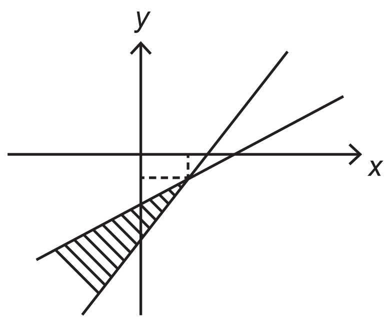
(A)



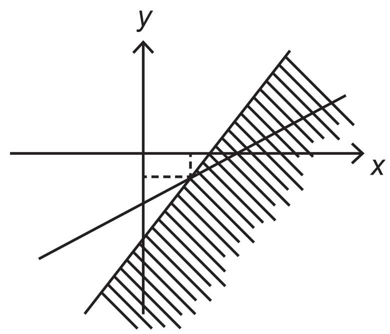
(B)



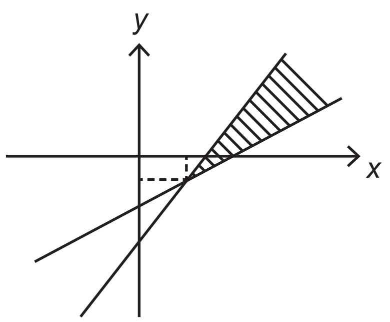
(C)



(D)



(E)



28 Adottak a pozitív egész számok halmazai, az A, a B és a C halmaz.

A = {5-tel osztható számok},

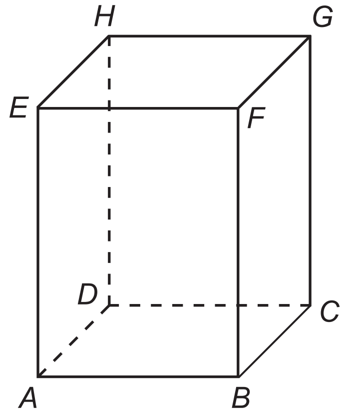
B = {200-nál kisebb számok},

C = {azok a számok, melyeket ha elosztunk 7-tel, a maradék 3 lesz}.

Hány eleme van az $(A \cap B) - C$ halmaznak?

(A) 33 **(B)** 34 **(C)** 35 **(D)** 36 **(E)** 37

29 Adott egy téglatest, amelynek az alaplapja négyzet, és amelyben az $|AB| = 2$ cm és az $|AE| = 9$ cm. A K pont a BC él középpontja. Számítsák ki az α szög tangensét, ha az α az AKH sík és az alaplap ABC síkja által bezárt szög.



(A) $tg\,\alpha = \frac{27\sqrt{5}}{5}$

(B) $tg\,\alpha = \frac{4\sqrt{5}}{45}$

(C) $tg\,\alpha = \frac{27\sqrt{5}}{10}$

(D) $tg\,\alpha = \frac{10\sqrt{5}}{135}$

(E) $tg\,\alpha = \frac{9\sqrt{5}}{4}$

30 A t valós szám mely értékei esetén lesz az $y = 2\left[x(x+2)-3\right]+t$ fügvény mindig pozitív?

(A) $\langle 8; \infty)$

(B) $(-\infty; 8\rangle$

(C) $\langle -8; \infty)$

(D) $(8; \infty)$

(E) $(-\infty; 8)$

 © NIVAM, BRATISLAVA 2023

KÉPLETEK ÁTTEKINTÉSE

Hatványok:

$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ $\quad \dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ $\quad \left(a^x\right)^y = a^{x\cdot y}$ $\quad (a\cdot b)^x = a^x \cdot b^x$ $\quad \left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$ $\quad a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$ $\quad a^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{a^x}$

Goniometrikus függvények:

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ $\qquad \operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

$\sin 2x = 2\cdot \sin x \cos x$ $\qquad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ $\qquad \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Trigonometria: Szinusztétel: $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma} = 2r$ Koszinusztétel: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\gamma$

Logaritmus: $\log_z(x\cdot y) = \log_z x + \log_z y$ $\qquad \log_z \dfrac{x}{y} = \log_z x - \log_z y$

$\log_z x^k = k\cdot \log_z x$ $\qquad \log_y x = \dfrac{\log_z x}{\log_z y}$

Számtani sorozat: $a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$ $\qquad s_n = \dfrac{n}{2}(a_1 + a_n)$

Mértani sorozat: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ $\qquad s_n = a_1 \dfrac{q^n - 1}{q-1},\ q \neq 1$

Kombinatorika: $P(n) = n!$ $\qquad V(k,n) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ $\qquad C(k,n) = \dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{(n-k)!\,k!}$

$P'(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \dfrac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!}$ $\qquad V'(k,n) = n^k$ $\qquad C'(k,n) = \dbinom{n+k-1}{k}$

Analitikus geometria:

Az egyenes paraméteres kifejezése: $X = A + t\vec{u},\quad t\in R$

Az egyenes általános egyenlete: $ax + by + c = 0;\quad [a;b] \neq [0;0]$

Vektorok hajlásszöge: $\cos\varphi = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$

Az $M[m_1; m_2]$ pont távolsága a p: $ax + by + c = 0$ egyenestől: $|Mp| = \dfrac{|am_1 + bm_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

A körvonal egyenletének középponti alakja: $(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2$

A testek térfogata és felszíne:

	téglatest	henger	gúla	kúp	gömb
térfogat	abc	$\pi r^2 v$	$\frac{1}{3}S_p v$	$\frac{1}{3}\pi r^2 v$	$\frac{4}{3}\pi r^3$
felszín	$2(ab+ac+bc)$	$2\pi r^2 + 2\pi r v$	$S_p + S_{pl}$	$\pi r^2 + \pi r s$	$4\pi r^2$

Útmutató a válaszadó lap kitöltéséhez

A válaszadó lapokat lapolvasóval dolgozzuk fel. Másolásuk, gyűrésük, összehajtásuk tilos!
Ahhoz, hogy válaszaikat a lapolvasó felismerhesse, vegyék figyelembe a következő utasításokat!

- Írjanak fekete vagy kék tollal! Ne használjanak hagyományos töltőtollat, túl vékonyan író tollat, hagyományos vagy rotringceruzát!
- A feleletalkotó feladat eredményét egész számmal vagy tizedes szám segítségével fejezzék ki! Ha az eredmény egész szám, illetve tizedes szám legfeljebb két tizedes hellyel, a **pontos** eredményt írják be! Ha az eredmény tizedes szám több mint két tizedes hellyel, akkor a **két tizedes helyre kerekített** eredményt írják be!
- Az eredmény egyes számjegyeit írják a megjelölt mezőbe! Egy mezőbe legfeljebb egy számjegyet, illetve „–” (mínusz) jelet írjanak!
- Beíráskor vegyék figyelembe a tizedesvessző előnyomtatott helyét! A „–” (mínusz) előjelet külön mezőbe írják az első számjegy elé!
- Ha az eredményük egész szám, ne töltsék ki a tizedesvessző utáni mezőket!
- A mértékegységek (fokok, méterek, percek, grammok, …) jelét ne írják a válaszadó lapra!

Például:

a 4 633 eredmény beírása:

□ □ □ □ 4 6 3 3 , □ □ □ □

a 81,424 61 m eredmény beírása:

□ □ □ □ □ □ 8 1 , 4 2 □ □

az 1 : 8 = 0,125 eredmény (arány) beírása:

□ □ □ □ □ □ □ 0 , 1 3 □ □

az $\frac{5}{3} = 1{,}\overline{6}$ eredmény (tört) beírása:

□ □ □ □ □ □ □ 1 , 6 7 □ □

- Az eredmény helytelen kitöltése esetében ne kérjenek új válaszadó lapot! A helytelenül kitöltött mezőt teljesen fessék be, és a helyes adatot a befestett mező elé vagy mögé írják.
- A –3,1 eredmény **helyes** beírása:

□ □ □ □ □ □ – 3 , 1 □ □ □

- A –3,1 eredmény **helytelen** beírása:

□ □ □ □ □ □ □ – , □ 3 , 1

- A –3,1 eredmény helytelen beírásának javítása:

□ □ □ □ □ – 3 ■ , ■ ■ ■ 1

□ □ □ □ □ – 3 ■ , 1 ■ ■ ■

- A feleletválasztó feladat megoldását jelöljék ✕-szel a válaszadó lap megfelelő mezőjében.
- A **(C)** válasz **helyes** megjelölése:

A B C D E

□ □ ☒ □ □

- A **(C)** válasz **helytelen** megjelölése:

A B C D E

☒ □ ☒ □ □

A B C D E

□ □ ✕ □ □

- Ha tévesztenek, vagy később véleményüket megváltoztatják, a helytelenül megjelölt mezőt teljesen fessék be, és jelöljék ✕-szel a másik mezőt!

A B C D E

☒ □ ■ □ □

- Ha esetleg ismét meggondolják magukat, és az eredetileg ✕-szel jelölt, majd befestett választ szeretnék újból megjelölni, írjanak ✕-et az összes mezőbe, és a befestett mezőt karikázzák be!

A B C D E

☒ ☒ ■ ☒ ☒

Csak akkor nyissák ki a tesztet, amikor erre utasítást kapnak!